

יהוה


INSTITVTIO THEOLOGICA
ANDOVER FVNDATA MDCCCVII.
Ps. CXIX. 169.
כדברך הבינני
JOH. XVII. 17.
ὁ λογος ὁ σος αληθεια εστι
ΑΚΡΟΓΩΝΙ
ΟΥ ΧΡΙΣΤΟΥ



Die Chronologie

in ihrem

ganzen Umfange,

mit

vorzüglicher Rücksicht auf ihre Anwendung

in der

Astronomie, Weltgeschichte und Urkundenlehre,

nebst einem

Vorschlage zu einer streng wissenschaftlich geregelten Zeitrechnung;

durch höhere Arithmetik

begründet und erläutert

von

Wilhelm Matzka,

Doctor der Philosophie, k. k. öffentl. ordentl. Professor der Mathematik an der k. k. philosophischen Lehranstalt zu Tarnow, emeritirtem Lieutenant und Lehrer der höheren Mathematik und Mechanik im k. k. Bombardier-Corps zu Wien.



Wien, 1844.

In der Fr. Beck'schen Universitäts-Buchhandlung.



Dem

Hochwürdigsten Herrn

Fr. Ser. Cassian Hallaschka,

Doctor der Philosophie, infulirtem Propste zu Alt-Bunzlau, und Landes-Prälaten des Königreiches Böhmen; Präses der philosophischen Facultät und Director der philosophischen Studien an der k. k. Universität zu Wien, k. k. nied. öst. wirklichem Regierungsrathe und Referenten bei der k. k. Studien-Hofcommission; der k. Gesellschaft der Wissenschaften, der k. k. patriotisch-ökonomischen Gesellschaft und des Vereines zur Belebung des Gewerbfleißes in Böhmen, der k. k. Landwirthschafts-Gesellschaft in Wien wirklichem, der k. k. Landwirthschafts-Gesellschaften in Krain und zu Görz Ehren-Mitgliede, der k. k. Gesellschaft des Ackerbaues, der Natur- und Landeskunde in Mähren und Schlesien, der k. preußischen Gesellschaft für vaterländische Cultur, der Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Dresden correspondirendem Mitgliede; Ehren-Mitgliede der Akademie der Künste und Wissenschaften zu Padua, zu Roveredo, Udine, Verona und Bergamo und des Franz Carls Museums zu Linz, Mitgliede der philosophischen Facultät an der Universität zu Padua; im Jahre 1823 gewesenem Decane der philosophischen Facultät und im Jahre 1832 gewesenem Rector Magnificus und Vice-Kanzler der Prager Universität, im Jahre 1834 gewesenem Rector Magnificus der Wiener Universität, rc. rc.

in tiefster Ehrerbietung und mit der Pietät eines ehemaligen Schülers

geweiht

von dem Verfasser.



Vorrede.

Bei den Bestimmungen von Ereignissen und Handlungen wird die Angabe der Zeit und des Ortes gefordert, wann und wo sie entweder bereits geschehen sind, oder gegenwärtig geschehen oder erst noch geschehen sollen. Darum werden die Chronologie und Geographie, als Zeit- und Erdkunde, schon längst treffend die beiden Augen der Weltgeschichte genannt. Andrerseits dient allen Wissenschaften, deren Objecte Größe besitzen, die Mathematik, als Größen- und Zahlenlehre, nicht blos zur Begründung, sondern auch zur Ausbildung und Vervollkommnung. Daher dürfte es wohl nicht unverdienstlich sein, auch die Chronologie, als eine der nützlichsten und schwierigsten Hilfswissenschaften der Weltgeschichte und Urkundenlehre (Diplomatik), so weit als möglich, durch die Lehren der höheren Arithmetik (théorie des nombres) zu begründen und zu vereinfachen. Dies nun versucht das vorliegende, den Freunden der historischen und mathematischen Wissenschaften dargebotene, von dem Herrn Verleger mit dankwürdiger Liberalität ausgestattete und aus der rühmlichst bekannten J. P. Sollinger'schen Buchdruckerei mit seltener Eleganz hervorgegangene Werk in einem so großen Umfange, mit solcher streng wissenschaftlichen Anordnung, ausführlichen Zergliederung und umständlichen Beweisführung, wie es bisher noch von Niemanden unternommen worden war; und strebt darin den Anforderungen der jetzigen Höhe der praktisch-mathematischen Wissenschaften zu genügen und in diesen eine Lücke auszufüllen.

Doch nicht nur der unbestreitbare Nutzen, den die höhere Arithmetik der Chronologie leistet, indem sie theils den Methoden der Zeitrechnung mehr Einfachheit und Sicherheit verschafft, theils weit ausgedehnte Tafeln in oft überraschend einfache allgemeine arithmetische Formen zusammen drängt, theils umgekehrt nach diesen Formen geschmeidigere Hilfstafeln darstellt; sondern auch das intellectuelle Vergnügen, welches die

Aufstellung und Auflösung derjenigen Gleichungen oder Ungleichungen, die den Zusammenhang zwischen den in Betracht genommenen Zahlen aussprechen, besonders da, wo sie dem Gebiete der unbestimmten Analytik angehören, oder welches die Bildung allgemeiner arithmetischer Formen für Ausnahmswerthe mancher veränderlichen Zahlen gewährt, verdient Beachtung und Anerkennung.

Den Impuls zur höheren arithmetischen Behandlung der Zeitrechnung gab der geniale deutsche Mathematiker Herr Hofrath Gauß durch seine, in des Barons Zach „Monatlicher Correspondenz" zu Anfang unseres Jahrhundertes veröffentlichte, und wie verdient mit allgemeinem Beifalle aufgenommene Berechnung des Datums des christlichen und jüdischen Osterfestes. Sie veranlaßte mehrere, zum Theil berühmte Mathematiker, wie Delambre, Cisa de Crésy, Cavaliere de Ciccolini, Tittel u. a., entweder die Gaußische Rechnung zu beweisen, oder Fragen der Zeitrechnung ähnlich zu bearbeiten. Die Ergebnisse meiner eigenen Forschungen in diesem, von der Neuzeit angebauten, Felde der höheren Zahlenlehre waren zwar schon längst zum größten Theile gefunden; was ein von mir bereits im Jahre 1828 in den dritten Band von Crelle's „Journal für die reine und angewandte Mathematik" eingerückter Aufsaz bestätigt; allein ein unüberwindliches Hinderniß ihrer Veröffentlichung, und der Erfüllung des a. a. O. gegebenen Versprechens, war mir die schwerfällige, von meinen Vorgängern gewählte, Bezeichnung der Quoti und Reste, da ich erst im Jahre 1841 auf die gegenwärtig von mir gebrauchte Bezeichnung verfiel, welche mir sowohl für die Schrift als auch für den Druck möglichst einfach und bequem däucht.

In der geschichtlichen Aufstellung der Principien, auf die sich die Zeitrechnungen der verschiedenen Völker stüzen, benüzte ich fast durchgängig die Resultate der mit ungemeiner Umsicht und Gründlichkeit durchgeführten kritischen Forschungen des auch als Mathematiker berühmten Astronomen und Chronologen Herrn Ludwig Ideler, die er sowohl in seinem „Handbuche der mathematischen Chronologie, Berlin 1825," als auch auszugsweise in seinem „Lehrbuche der Chronologie, Berlin 1831," niederlegte. Dieser scharf sichtende Gelehrte ist demnach in allen Grundlagen der von mir behandelten Zeitrechnungen der Völker mein erklärter Gewährsmann, wofern ich nicht ausdrücklich eine andere Quelle nenne;

weswegen ich hier ein- für allemal auf seine vortrefflichen chronologischen Werke verweise. In die Aufspürung dieser Principien, die sich nicht ersinnen lassen, sondern mit historischer Kritik in den Schriften der Alten aufgesucht werden müssen, vermochte ich mich um so weniger einzulassen, als mir die dazu erforderlichen Behelfe mangelten. Ich durfte daher das bereits von Herrn Ideler als richtig oder höchst wahrscheinlich Befundene mit um so mehr Recht benützen, als ich mein Verdienst keineswegs in dem Herbeischaffen des Stoffes, sondern in der, dem vorgesezten Zwecke entsprechenden, wissenschaftlichen Bearbeitung desselben suchte.

Als interessanteste und verdienstlichste Punkte dieser Bearbeitung glaube ich hervorheben zu dürfen: die einleitende Zusammenstellung der zum Studium der mathematischen Zeitkunde erforderlichen Lehren der höheren Arithmetik, die zum Theil auch sonst wohl als Anhang zu ausführlicheren Lehrbüchern der Algebra dienen könnten; — in der allgemeinen Chronologie: die Principien der Ausgleichung der bürgerlichen Zeitrechnung mit der mittleren astronomischen, und die allgemeine Erforschung und Umtauschung der Aeren; — in der besonderen Chronologie: die Ausführlichkeit der Behandlung der am weitesten verbreiteten christlichen Zeitrechnung, vornehmlich die Untersuchung der Grundkykeln, die Wochentags- und Osterrechnung der Christen, welch leztere auch die, in der Geschichte zu kennen nothwendigen anfänglichen Osterrechnungsweisen der lateinischen Kirche umfaßt; ganz besonders die von mir geschaffene arithmetische Berechnung der Jahre, in denen ein gewisser, entweder beweglicher oder unbeweglicher, Festtag auf einen bezeichneten Monatstag fällt, oder die Ostern alten und neuen Styles zusammen treffen, so wie die Erforschung der Aenderung der Sonntagsbuchstaben und Festzahlen von einem Jahre zum nächst folgenden oder zu einem beliebigen späteren; die erste algebraische Behandlung der metonischen und kallippischen Zeitrechnung bei den Athenern; die scharfe und selbständige Darstellung der verwickelten Zeitrechnung der neueren Juden; die Ausmittelung der wahrscheinlichsten dschelalischen Schaltrechnung bei den Persern; — endlich im ganzen Zuge der besonderen Zeitrechnung die Kleinheit und Bequemlichkeit sowohl der meist neu entworfenen, die Rechnung theils erleichternden theils ganz umgehenden (für die christliche Festrechnung zum schnelleren Aufschlagen in einem besonderen Anhange beigegebenen) Hilfstafeln, als auch der von mir erdachten

arithmetischen Schemata zur Reduction der Data in Aeren von nahe oder ganz gleich langen mittleren Sonnenjahren.

Meinem in einer besonderen Zugabe angeschlossenen Vorschlage zu einer möglichst einfachen, wissenschaftlich angeordneten genauen Zeitrechnung, welche vorläufig wenigstens in der Weltgeschichte und Astronomie zu gebrauchen wäre, bis sie vielleicht einst auch in den bürgerlichen Verkehr eingeht, möchte ich nur unbefangene Beurtheilung und Würdigung, noch mehr aber einhellige und unveränderte Benüzung von anerkannten historiographischen und astronomischen Autoritäten wünschen.

Schließlich sei noch eines stillen Verdienstes, das sonst gewöhnlich (bei nett gesezten mathematischen Werken aber wohl mit Unrecht) übergangen wird, mit Dank und Lob öffentlich gedacht, — der Geduld und Geschicklichkeit der Sezer A. Birnbaum und P. Kürsten, denen besonders die Zierlichkeit und Reinheit des Sazes der algebraischen Formen und der Tafeln zuzurechnen kommt.

Tarnow, im Juni 1844.

Der Verfasser.

Inhalt.

Vorbegriffe zur Chronologie.

Zugabe.

Anhang.

Vorbegriffe

zur

Chronologie.



Vorbegriffe.

Allgemeine Säze der höheren Arithmetik, welche in der Chronologie vielfache Anwendung finden.

I.

Annahmen.

In der vorliegenden arithmetischen Darstellung der Chronologie werden häufig Lehren der höheren Arithmetik oder der vorzugsweise so genannten »Theorie der Zahlen« angewendet, deren die Lehrbücher der Algebra nicht gedenken; deswegen sollen sie hier in Kürze zusammengestellt und begründet werden.

Die in dieser Zusammenstellung zu betrachtenden allgemeinen, durch Buchstaben vorgestellten, Zahlen werden ohne Ausnahme ganze Zahlen, mit Einschluß der Nulle, oder blos Anzahlen andeuten, daher ihr Beiname »ganze« entbehrlich ist. Dabei können sie entweder absolute, oder algebraisch relative, und im lezteren Falle entweder positive oder negative Zahlen sein.

Sehr oft wird eine allgemeine Zahl a nur gewisse besondere Zahlen, von einer bestimmten kleinsten α an ununterbrochen bis zu einer angegebenen größten β vorstellen dürfen; dann gibt man diese Einschränkung gewöhnlich durch folgenden Ansaz

$$a = \alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots . \beta,$$

oder zuweilen in umgekehrter Ordnung

$$a = \beta, \beta - 1, \beta - 2, \ldots . \alpha$$

zu erkennen. Für algebraisch größer als eine andere gilt hiebei eine Zahl, wenn jene, von dieser abgezogen, einen positiven Rest gibt.

Manchmal müssen jedoch alle zulässigen Werthe der allgemeinen Zahl, durch Beistriche getrennt, nach einander hingestellt werden; insbesondere dann immer, wenn sie nicht in der natürlichen Folge der Zahlen fortlaufen.

So z. B. zeigt $a = 0, 1, 2, \ldots . 18$ an, daß a je eine der Zahlen von 0 bis 18 vorstellt, und $a = 2, 5, 1, 4,$ daß a der Reihe nach den Zahlen 2, 5, 1, 4 gleich werde.

II.

Congruenz der Zahlen.

Ist der Unterschied zweier Zahlen, a und α, durch eine dritte Zahl, m, theilbar; so nennt man jene zwei Zahlen einander congruent nach dieser dritten, m, diese selbst den Modul der Congruenz, und schreibt nach Gauß, der diesen folgereichen Begriff und das Zeichen der Congruenz, ($\equiv$), in die Zahlenlehre einführte, $a \equiv \alpha$, mod m.

In einer Congruenz kommt demnach blos bei den zwei congruenten Zahlen, nicht aber bei ihrem Unterschiede und Modul, zu beachten, ob sie positiv oder negativ seien. Im Verlaufe der vorliegenden Abhandlung wird der Modul sogar immer absolut genommen werden.

So ist z. B. $17 \equiv 3$, mod 7, weil $17 - 3 = 14 = 7.2$,
$8 \equiv -14$, mod 11, weil $8-(-14)=22=11.2$.

Ist eine Zahl insbesondere der Null congruent, so heißt dies eigentlich, sie selbst ist durch den Modul theilbar; z. B. $96 \equiv 0$, mod 4 sagt, 96 ist durch 4 theilbar. Mithin läßt sich die Theilbarkeit einer Zahl durch eine andere mittels des Congruenzzeichens andeuten.

III.

Lehrsäze über die Congruenz der Zahlen.

1. Gleiche Zahlen sind nach jedem Modul congruent, weil ihr Unterschied Null, daher durch jede Zahl theilbar ist.

Die Gleichheit zweier Zahlen kann demnach als ein besonderer Fall ihrer Congruenz nach beliebigem Modul angesehen werden.

2. Sind zwei Zahlen einer dritten nach einerlei Modul congruent, so sind sie auch unter sich congruent. Ist nemlich $a \equiv c$, mod m und $b \equiv c$, mod m; so ist auch $a \equiv b$, mod m.

Denn nach der Annahme sind die Unterschiede a—c und c—b durch den Modul m theilbar, daher auch ihre Summe $a-c+c-b$, die sich auf den Unterschied a—b zusammenzieht.

3. Von zwei congruenten Zahlen wird jede erhalten, wenn man die andere um ein Vielfaches des Moduls entweder vermehrt oder vermindert. Wenn nemlich $a \equiv b$, mod m ist, läßt sich $a = b \pm hm$ sezen und darin h beliebig groß annehmen.

Denn von den congruenten Zahlen a und b muß der Unterschied a — b ein positives oder negatives Vielfaches, allgemein das h fache, des Moduls m, nemlich $a-b = \pm hm$ sein; mithin ist $a = b \pm hm$.

4. Die Congruenz $a \equiv b$, mod m drückt daher, in so fern aus ihr $a = b \pm hm$ folgt, auch aus, daß die Zahl a jedes Glied derjenigen nach beiden

Richtungen in's Unendliche auslaufenden arithmetischen Progression vorstelle, deren ein Glied b und beständiger Unterschied der Modul m ist.

5. Addirt man, bei einerlei Modul, congruente Zahlen zu congruenten, so sind die Summen congruent; und

6. Zieht man congruente Zahlen von congruenten ab, so sind die Unterschiede congruent.

Ist nemlich $a \equiv \alpha$, mod m und $b \equiv \beta$, mod m, so ist eben sowohl $a+b \equiv \alpha+\beta$, mod m als $a-b \equiv \alpha-\beta$, mod m.

Denn nach den Annahmen sind die Unterschiede $a-\alpha$ und $b-\beta$ durch den Modul m theilbar, sonach auch ihre Summe $a-\alpha+b-\beta$ sowohl, als ihr Unterschied $a-\alpha-b+\beta$, oder dort der Unterschied $a+b-(\alpha+\beta)$ und hier $a-b-(\alpha-\beta)$.

7. Da sämmtliche Vielfachen des Moduls der Null und unter sich congruent sind, so bleibt es immer gestattet, jeder aus zwei congruenten Zahlen was immer für Vielfachen ihres Moduls zuzugeben oder zu entziehen, indem man diese Vielfachen gleichsam als Nullen ansieht. Man benützt dieses Verfahren vorzüglich dann, wenn die congruenten Zahlen zusammengesezte Ausdrücke sind; um sowohl die einzelnen Glieder derselben, als auch sie selbst auf die möglich einfachste Gestalt zurück zu führen.

So ist z. B. $\quad 3+76-5 \equiv 15+4-22$, mod 7,
also auch $\quad 3+76-70-5 \equiv 15-14+4-22+21$, mod 7,
oder $\quad 3+6-5 \equiv 1+4-1$, mod 7.

8. Multiplicirt man, bei einerlei Modul, congruente Zahlen mit congruenten — oder insbesondere mit gleichen — Zahlen, so sind auch die Producte congruent. Ist $a \equiv \alpha$, mod m und $b \equiv \beta$, mod m, so ist auch $ab \equiv \alpha\beta$, mod m.

Denn vermöge der Voraussezung sind die Unterschiede $a-\alpha$ und $b-\beta$ durch den Modul m theilbar, daher auch, wenn man den ersteren Unterschied mit b, und den anderen mit α multiplicirt, die Producte $ab-\alpha b$ und $\alpha b-\alpha\beta$; folglich ist auch ihre Summe $ab-\alpha b+\alpha b-\alpha\beta$, d. h. der Unterschied $ab-\alpha\beta$, durch m theilbar.

9. Erhebt man congruente Zahlen zu einerlei Potenz nach einem ganzen absoluten Exponenten, so sind auch die Potenzen nach demselben Modul congruent. Ist $a \equiv \alpha$, mod m, so ist auch $a^n \equiv \alpha^n$, mod m.

Denn solche Potenzen sind Producte gleich vieler, durchgängig gleicher Factoren, daher (nach 8) congruent.

10. **Sind zwei congruente Zahlen, a und b, durch zwei andere, nach demselben Modul, m, congruente Zahlen, α und β, von denen jede gegen den Modul relativ prim ist, einzeln theilbar; so sind auch ihre Quotienten, a: α und b : β, nach eben diesem Modul congruent.**

Denn sei $a \equiv b$, mod m und $\alpha \equiv \beta$, mod m, ferner $a : \alpha = a'$ und $b : \beta = b'$, folglich $a = a'\alpha$ und $b = b'\beta$. Dann sind durch den Modul m theilbar die Unterschiede $a - b$ und $\alpha - \beta$, also auch $a'\alpha - b'\beta$ und sowohl $a'(\alpha - \beta) = a'\alpha - a'\beta$, als $b'(\alpha - \beta) = b'\alpha - b'\beta$; folglich wenn man von jenem diese beiden abzieht, die Unterschiede $a'\beta - b'\beta$ und $a'\alpha - b'\alpha$, oder die ihnen gleichen Producte $(a' - b')\beta$ und $(a' - b')\alpha$. Hat aber, nach der Annahme, in diesen Producten weder α noch β mit dem Modul m einen Theiler gemeinschaftlich, so können die Producte nur dazumal durch m theilbar sein, wenn ihr anderer Factor $a' - b'$ durch m theilbar, also $a' \equiv b'$, mod m, oder $a : \alpha \equiv b : \beta$, mod m ist.

11. **Hat eine aus zwei congruenten Zahlen mit dem Modul einen Theiler gemeinschaftlich, so muß dieser auch der anderen Zahl zukommen.**

Denn sei $a \equiv b$, mod m, und t ein gemeinschaftlicher Theiler von b und m. Da die andere Zahl $a = b + (a - b)$, und sowohl die Zahl b als auch der Modul m, daher auch der durch diesen Modul theilbare Unterschied $a - b$ durch t theilbar ist; so muß die Summe $b + (a - b)$, oder die Zahl a, gleichfalls durch den gemeinschaftlichen Theiler t theilbar sein.

12. **Eine Congruenz bleibt bestehen, wenn man die congruenten Zahlen und den Modul durch einerlei Zahl multiplicirt oder durch einen gemeinschaftlichen Theiler theilt.** Ist nemlich $a \equiv \alpha$, mod m, so ist auch $ap \equiv \alpha p$, mod mp und wofern a, α, m durch p theilbar sind, auch $a : p \equiv \alpha : p$, mod $(m : p)$. Z. B. Weil $21 \equiv 9$, mod 12, ist auch $42 \equiv 18$, mod 24 und $7 \equiv 3$, mod 4.

Denn nach der Voraussezung ist der Quotient $(a - \alpha) : m$ eine ganze Zahl, daher auch, wenn man Dividend und Theiler desselben mit einerlei Zahl p multiplicirt oder durch den gemeinschaftlichen Theiler p dividirt, jeder der ihm gleichen Quotienten $(ap - \alpha p) : mp$ und $\left(\frac{a}{p} - \frac{\alpha}{p}\right) : \frac{m}{p}$.

13. **Sind zwei Zahlen nach einem Modul congruent, so sind sie auch nach jedem Modul congruent, der ein Theiler jenes Moduls ist.** Wenn nemlich $a \equiv b$, mod m, und μ ein Theiler von m ist, so muß auch $a \equiv b$, mod μ sein.

Denn der Annahme zu Folge ist der Unterschied $a - b$ durch die Zahl m theilbar, daher auch durch jeden ihrer Theiler μ.

14. Zwei Zahlen, welche nach mehreren Moduln congruent sind, müssen auch nach dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen dieser Moduln congruent sein. Ist nemlich $a \equiv b$, mod $(m, m', m'', \ldots)$ und μ die kleinste durch $m, m', m'', \ldots$ theilbare Zahl, so ist auch $a \equiv b$, mod μ.

Denn da der Unterschied $a - b$ durch die Zahlen $m, m', m'', \ldots$ einzeln theilbar ist, so muß er auch durch ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches μ theilbar sein.

IV.

Betrachtungen über das Theilen der Zahlen.

Bei dem Theilen einer Zahl — Dividend — durch eine andere — Theiler oder Divisor — verlangt man eigentlich diejenige, ganze oder gebrochene, Zahl — Quotient —, welche, mit der lezteren, dem Theiler, multiplicirt, die erstere, den Dividend, zum Producte liefert. Sehr oft, und in den Rechnungen der Zeitkunde fast immer, wo man mit lauter ganzen Zahlen rechnet, fordert man, bei dem Theilen eines Dividends durch einen Theiler, diejenige ganze Zahl — zur Unterscheidung zu nennen der **Quotus** — welche, mit dem Theiler multiplicirt, ein Product gibt, das sich von dem Dividend um eine positive oder negative Zahl — Rest — unterscheidet, die absolut genommen kleiner, oder höchstens ausnahmsweise so groß, als der absolut genommene Theiler ist.

Soll nemlich d durch t getheilt zum Quotus d' und zum Reste d'' geben, so muß der Rest

$$(1) \qquad d - t\,d' = d'' \leqq t$$

sein, wofern man von den Zeichen des Theilers und Restes absieht. Daraus folgt der bekannte Saz

$$(2) \qquad d = t\,d' + d'',$$

d. h. Man erhält den Dividend, wenn man zum Producte aus Theiler und Quotus den Rest addirt.

Dieselbe Form (2) werden wir auch benüzen, um kurz anzudeuten, daß eine Zahl d, durch eine andere t getheilt, d' zum Quotus und d'' zum Reste gebe.

Fordert man, daß der Rest, dem Zahlwerthe nach, so klein als möglich, mithin höchstens so groß als der halbe Theiler genommen werde; dann heißt er der kleinste (mögliche) Rest, und ist bald positiv, bald negativ.

Bemerkt mag hier noch werden, daß wir im Folgenden nie veranlaßt sein werden, andere als absolute Theiler in Rechnung zu bringen.

V.

Bezeichnung der Quoti und positiven Reste.

Gewöhnlich wird verlangt, daß bei der Theilung einer Zahl d durch eine andere t der Rest d'' nur positiv genommen werde.

1. Soll der Rest d'' dabei auch noch stets kleiner als der Theiler t, also der kleinste positive Rest sein: so bezeichnet man den Quotus gewöhnlich durch $\mathfrak{q}\frac{d}{t}$ oder zuweilen durch $d \underset{\mathfrak{q}}{:} t$,

lesend: »Quotus von d (getheilt) durch t«,

oder: »Quotus der Theilung von d durch t«;

und den Rest gewöhnlich durch $\mathfrak{r}\frac{d}{t}$ oder zuweilen durch $d \underset{\mathfrak{r}}{:} t$,

lesend: »Rest von d (getheilt) durch t«,

oder: »Rest der Theilung von d durch t«.

Dann ist im Vergleich mit der obigen Bezeichnung in IV

$$d' = \mathfrak{q}\frac{d}{t} = d \underset{\mathfrak{q}}{:} t,$$

$$d'' = \mathfrak{r}\frac{d}{t} = d \underset{\mathfrak{r}}{:} t = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ t-1$$

und nach den Gleichungen (1) und (2)

$$(3) \qquad d - t\,\mathfrak{q}\frac{d}{t} = \mathfrak{r}\frac{d}{t} = 0, 1, 2, \ldots\ t-1,$$

$$(4) \qquad d = t\,\mathfrak{q}\frac{d}{t} + \mathfrak{r}\frac{d}{t}.$$

Z. B. So ist $23 = 7.3 + 2$, d. h. 23 durch 7 getheilt gibt 3 zum Quotus und $+2$ zum Reste (IV); also ist

$$\mathfrak{q}\frac{23}{7} = 23 \underset{\mathfrak{q}}{:} 7 = 3, \text{ und } \mathfrak{r}\frac{23}{7} = 23 \underset{\mathfrak{r}}{:} 7 = 2,$$

dagegen ist $-23 = 7. -4 + 5$, d. h. -23 durch 7 getheilt gibt -4 zum Quotus und $+5$ zum Reste; daher ist

$$\mathfrak{q}\frac{-23}{7} = -23 \underset{\mathfrak{q}}{:} 7 = -4, \text{ und } \mathfrak{r}\frac{-23}{7} = -23 \underset{\mathfrak{r}}{:} 7 = 5.$$

2. Soll aber der Rest d'' nie Null, sondern damals dem Theiler t selbst gleich genommen werden, so oft der Dividend d durch den Theiler t theilbar, folglich der kleinste Rest Null ist; so sollen dergleichen Quoti und Reste außerordentliche oder ausnahmsweise genannt, und zu ihrer Bezeichnung, anstatt der kleinen Charaktere $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$, die großen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ verwendet werden.

In einem solchen Falle ist, nach der obigen Bezeichnung in IV,

$$d' = \mathfrak{Q}\frac{d}{t} = d \underset{\mathfrak{Q}}{:} t,$$

$$d'' = \not{R}\frac{d}{t} = d \underset{\not{R}}{:} t = 1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .\ .\ .\ t,$$

und vermöge der Gleichungen (1) und (2)

$$(5) \qquad d - t\,\not{Q}\frac{d}{t} = \not{R}\frac{d}{t} = 1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .\ .\ .\ t,$$

$$(6) \qquad d = t\,\not{Q}\frac{d}{t} + \not{R}\frac{d}{t}.$$

So z. B. ist $21 = 7.\,3 + 0 = 7.\,2 + 7$, also

$$\not{q}\frac{21}{7} = 3 \text{ und } \not{r}\frac{21}{7} = 0, \text{ dagegen } \not{Q}\frac{21}{7} = 2 \text{ und } \not{R}\frac{21}{7} = 7.$$

Allein $-21 = 7.\,-3 + 0 = 7.\,-4 + 7$, daher

$$\not{q}\frac{-21}{7} = -3 \text{ und } \not{r}\frac{-21}{7} = 0, \text{ hingegen } \not{Q}\frac{-21}{7} = -4 \text{ und } \not{R}\frac{-21}{7} = 7.$$

Anmerkung. *Cisa de Cresi* gebraucht die leicht zu mißdeutenden Bezeichnungen $Q.\frac{d}{t}$ und $R.\frac{d}{t}$; *de Ciccolini* bezeichnet den Quotus mit $\left(\frac{d}{t}\right)_i$, *Delambre* durch $\left(\frac{d}{t}\right)_e$, beide den Rest durch $\left(\frac{d}{t}\right)_r$; ich selbst folgte früher*) dem Letzteren, weil ich zur Bezeichnung des außerordentlichen Quotus den undeutlichen Buchstaben I oder J nicht brauchen konnte. Bei den letzteren Bezeichnungen kommt jedoch, gegen die mathematische Grundregel, das Hauptrechnungszeichen erst ganz am Ende, und die sich häufenden Klammern (Parenthesen) verundeutlichen die Rechnungsausdrücke; dies bewog mich, obige Zeichen in Vorschlag zu bringen.

VI.

Zusammenhang der gewöhnlichen und außerordentlichen Quoti und Reste.

Zwischen den gewöhnlichen und außerordentlichen Quotis und Resten bestehen einfache Beziehungs- und Verwandlungs-Gleichungen, die sich leicht aus folgenden Betrachtungen ergeben.

1. Zieht man von beiden Theilen der Gleichung

$$(6) \qquad d = t\,\not{Q}\frac{d}{t} + \not{R}\frac{d}{t}$$

die Zahl 1 ab, so erhält man

$$d - 1 = t\,\not{Q}\frac{d}{t} + \not{R}\frac{d}{t} - 1.$$

Nun ist $\not{R}\frac{d}{t} = 1,\ 2,\ .\ .\ .\ .\ .\ t,$

also $\not{R}\frac{d}{t} - 1 = 0,\ 1,\ 2,\ .\ .\ .\ t - 1;$

daher findet man, nach dem Begriffe und der Bezeichnung des gewöhnlichen Quotus und Restes (IV und V, 1), aus der letzten Gleichung

*) Crelle Journal für Mathematik, 3. Bd., S. 387.

$$(7) \qquad \mathfrak{Q}\frac{d}{t} = \mathfrak{q}\frac{d-1}{t},$$

$$\mathfrak{R}\frac{d}{t} - 1 = \mathfrak{r}\frac{d-1}{t},$$

daher

$$(8) \qquad \mathfrak{R}\frac{d}{t} = \mathfrak{r}\frac{d-t}{t} + 1.$$

2. Addirt man zu beiden Theilen der Gleichung

$$(4) \qquad d = t\,\mathfrak{q}\frac{d}{t} + \mathfrak{r}\frac{d}{t}$$

die Zahl 1, so erhält man

$$d + 1 = t\,\mathfrak{q}\frac{d}{t} + \mathfrak{r}\frac{d}{t} + 1.$$

Es ist aber $\mathfrak{r}\frac{d}{t} = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ t-1$,

daher $\mathfrak{r}\frac{d}{t} + 1 = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ t$;

mithin gibt die lezte Gleichung, nach den Begriffen von den außerordentlichen Theilungsergebnissen, (IV und V, 2) die Beziehungen

$$(9) \qquad \mathfrak{q}\frac{d}{t} = \mathfrak{Q}\frac{d+1}{t},$$

$$\mathfrak{r}\frac{d}{t} + 1 = \mathfrak{R}\frac{d+1}{t},$$

also

$$(10) \qquad \mathfrak{r}\frac{d}{t} = \mathfrak{R}\frac{d+1}{t} - 1.$$

Anmerkung 1. Aus den Gleichungen (7) und (8) können (9) und (10) gewonnen werden, wenn man d in $d + 1$ verwandelt; umgekehrt aus diesen jene, wenn man d in $d - 1$ übergehen läßt.

Anmerkung 2. Sowohl aus der Erklärung der außerordentlichen Theilungsergebnisse (V, 2), als aus den Gleichungen (7) bis (10) ist ersichtlich, daß beide Arten der Theilungsergebnisse ganz einerlei sind, so lange der Dividend durch den Theiler untheilbar ist, und daß sie sich blos da, wo der Dividend durch den Theiler theilbar ist, von einander in der Weise unterscheiden, daß der außerordentliche Quotus numerisch um 1 kleiner oder größer ist, je nachdem man es mit einem positiven oder negativen Dividende zu thun hat, und daß der außerordentliche Rest der Theiler, der gewöhnliche dagegen Null ist. So hat man z. B.

$\mathfrak{Q}\frac{16}{7} = \mathfrak{q}\frac{16}{7} = 2$, $\mathfrak{R}\frac{16}{7} = \mathfrak{r}\frac{16}{7} = 2$, $\mathfrak{R}\frac{-16}{7} = \mathfrak{r}\frac{-16}{7} = 5$; hingegen ist

$\mathfrak{Q}\frac{14}{7} = 1$, $\mathfrak{q}\frac{14}{7} = 2$; $\mathfrak{Q}\frac{-14}{7} = -3$, $\mathfrak{q}\frac{-14}{7} = -2$ und $\mathfrak{R}\frac{\pm 14}{7} = 7$, $\mathfrak{r}\frac{\pm 14}{7} = 0$.

Anmerkung 3. Nach den hier aufgestellten Verwandlungsgleichungen könnte man allerdings blos mit einer Art von Theilung sich behelfen; allein wer die Einfachheit und Zierlichkeit der Rechnungsformen nicht überhaupt

gering schätzt, wird es uns im Folgenden gewiß billigen, wenn wir stets diejenige Theilungsweise wählen, bei welcher die Rechnungsformen am einfachsten und am zierlichsten sich ergeben.

VII.

Vertauschung der positiven und negativen Dividende.

Negative Dividende lassen sich, wofern, wie hier immer bedungen wird, die Reste positiv genommen werden, durch positive und umgekehrt ersetzen, wenn man sich an folgende Verwandlungsgleichungen hält.

1. Aendert man in der Gleichung

$$(4) \qquad d = t\, q\frac{d}{t} + r\frac{d}{t}$$

alle Zeichen, so ergibt sich

$$-d = -t\, q\frac{d}{t} - r\frac{d}{t},$$

und wenn man im zweiten Theile t abzieht und addirt,

$$-d = -t\left(q\frac{d}{t} + 1\right) + t - r\frac{d}{t}.$$

Nun ist $\quad r\frac{d}{t} = 0, 1, 2, \ldots . t-1,$

daher $\quad t - r\frac{d}{t} = t,\ t-1,\ t-2, \ldots . 1,$

und somit ergeben sich nach den Begriffen von den außerordentlichen Theilungsergebnissen (V, 2), zur Verwandlung der negativen Dividende in positive, die Gleichungen

$$(11) \qquad Q\frac{-d}{t} = -\left(q\frac{d}{t} + 1\right) = -q\frac{d}{t} - 1,$$

$$(12) \qquad R\frac{-d}{t} = t - r\frac{d}{t}.$$

3. B. $\quad Q\frac{-19}{7} = -q\frac{19}{7} - 1 = -2 - 1 = -3,$

$$R\frac{-19}{7} = 7 - r\frac{19}{7} = 7 - 5 = 2.$$

2. Behandelt man auf gleiche Weise die Gleichung

$$(6) \qquad d = t\, Q\frac{d}{t} + R\frac{d}{t},$$

oder vertauscht man in den gefundenen Gleichungen (11) und (12) die kleinen Charaktere q und r mit den großen Q und R, so findet man die ferneren Verwandlungsgleichungen:

$$(13) \qquad q\frac{-d}{t} = -Q\frac{d}{t} - 1,$$

$$(14) \qquad r\frac{-d}{t} = t - R\frac{d}{t}.$$

3. Will man bei diesen Verwandlungen der negativen Dividende die nemliche Theilungsweise beibehalten, so darf man blos mit den eben gefundenen

vier Gleichungen jene des vorhergehenden Artikels verbinden. Dann findet man noch die Gleichungen:

$$(15)\qquad \not q\,\frac{-d}{t} = -\not q\,\frac{d-1}{t} - 1,$$

$$(16)\qquad \not r\,\frac{-d}{t} = t - 1 - \not r\,\frac{d-1}{t},$$

$$(17)\qquad \not Q\,\frac{-d}{t} = -\not Q\,\frac{d+1}{t} - 1,$$

$$(18)\qquad \not R\,\frac{-d}{t} = t + 1 - \not R\,\frac{d+1}{t}.$$

4. Zum Uebergange von positiven Dividenden auf negative erhält man aus den gefundenen acht Gleichungen die folgenden vier doppelten:

$$(19)\qquad \not q\,\frac{d}{t} = -\not Q\,\frac{-d}{t} - 1 = -\not q\,\frac{-d-1}{t} - 1,$$

$$(20)\qquad \not r\,\frac{d}{t} = t - \not R\,\frac{-d}{t} = t - 1 - \not r\,\frac{-d-1}{t},$$

$$(21)\qquad \not Q\,\frac{d}{t} = -\not q\,\frac{-d}{t} - 1 = -\not Q\,\frac{-d+1}{t} - 1,$$

$$(22)\qquad \not R\,\frac{d}{t} = t - \not r\,\frac{-d}{t} = t + 1 - \not R\,\frac{-d+1}{t}.$$

VIII.

Aufwärtiges Theilen. Negative Reste.

Das bisher besprochene, gewöhnliche und außerordentliche Theilen, welches auch in der Folge immer verstanden werden muß, wofern nicht eine Ausnahme bestimmt ausgesprochen wird, sezt voraus, daß der Divisionsrest jederzeit positiv sei, folglich daß der Quotus andeutet, das Wievielfache des Theilers, im algebraischen Sinne, nächst kleiner oder höchstens so groß als der Dividend ist, nemlich, vom Dividende abgezogen, einen positiven, den Theiler nicht übersteigenden, Rest gibt. Zuweilen sieht man sich jedoch veranlaßt, dergestalt zu theilen, daß der Quotus angibt, das Wievielfache des Theilers, im algebraischen Sinne, nächst größer oder mindestens so groß als der Dividend ist, nemlich, vom Dividende abgezogen, einen negativen, numerisch den Theiler nicht übersteigenden, Rest liefert. Ein solches Theilen mit negativen Resten kann man ein aufwärtiges, mithin das Theilen mit positiven Resten das abwärtige nennen; und auch bei jenem, wie bei diesem, ein gewöhnliches und außerordentliches unterscheiden.

Die Vergleichung der Ergebnisse beider Theilungsweisen liefern die Gleichungen:

$$(4)\qquad d = t\,\not q\,\frac{d}{t} + \not r\,\frac{d}{t},$$

$$(6)\qquad d = t\,\not Q\,\frac{d}{t} + \not R\,\frac{d}{t},$$

wenn man in ihren zweiten Theilen t addirt und abzieht, wodurch sie in

$$d = t\left(q\frac{d}{t} + 1\right) - \left(t - r\frac{d}{t}\right),$$

$$d = t\left(Q\frac{d}{t} + 1\right) - \left(t - R\frac{d}{t}\right)$$

sich verwandeln, und folgende Säze lehren.

1. Theilt man eine Zahl d durch eine andere t aufwärts, so daß der Rest, mit Ausschluß der Nulle, negativ und numerisch höchstens so groß als der Theiler ausfällt, und benüzt man die Verwandlungsgleichungen (11) und (12), so ist

der außerordentliche aufwärtige Quotus von d durch $t = q\frac{d}{t} + 1 = -Q\frac{-d}{t}$,

» » » Rest $= -\left(t - r\frac{d}{t}\right) = -R\frac{-d}{t}$,

$= -1, -2, -3, \ldots -t.$

2. Theilt man dagegen eine Zahl d durch eine andere t dergestalt aufwärts, daß der Rest, mit Einschluß der Nulle, negativ und numerisch kleiner als der Theiler ausfällt, und verwendet man die Verwandlungsgleichungen (13) und (14); so ist

der gewöhnliche aufwärtige Quotus von d durch $t = Q\frac{d}{t} + 1 = -q\frac{-d}{t}$,

» » » Rest $= -\left(t - R\frac{d}{t}\right) = -r\frac{-d}{t}$,

$= 0, -1, -2, \ldots -(t-1).$

Die Zahlwerthe der negativen Reste sind demnach die Ergänzungen der positiven Reste zum Theiler. Und der kleinste negative Rest von d durch t ist $= -\left(t - R\frac{d}{t}\right) = -r\frac{-d}{t}$, weil er stets kleiner als der Theiler sein muß.

Im Zusammenhange lassen sich die Ergebnisse der viererlei Theilungen mittels folgender Betrachtung aufstellen. Sei d eine positive oder negative Zahl; durch die absolute Zahl t getheilt gebe sie d' zum Quotus und d'' zum Reste, welche mit dem Dividende d gleichzeitig entweder positiv oder negativ sein sollen. Sezt man ihnen demnach ihr gemeinschaftliches Qualitätszeichen vor, so sind $\pm d$, $\pm d'$, $\pm d''$ entschieden positiv. Man hat aber allgemein

$$(2) \qquad d = t.\,d' + d'',$$

daher auch

$$\pm d = \pm t.\,d' \pm d'',$$

und dabei immer $\pm d'' \leqq t$.

Somit findet man bei der gewöhnlichen Theilung, wo

$$\pm d'' = 0, 1, \ldots t-1 \text{ ist},$$

$$\pm d' = q\frac{\pm d}{t}, \quad \pm d'' = r\frac{\pm d}{t},$$

also wie in V, 1 und VIII, 2,

$$(23) \qquad d' = \pm \mathfrak{q}\frac{\pm d}{t}, \qquad d'' = \pm \mathfrak{r}\frac{\pm d}{t};$$

und bei der außerordentlichen Theilung, wo

$$\pm d'' = 1, 2, \ldots t \text{ ist},$$

$$\pm d' = \mathfrak{Q}\frac{\pm d}{t}, \qquad \pm d'' = \mathfrak{R}\frac{\pm d}{t},$$

also wie in V 2, und VIII, I,

$$(24) \qquad d' = \pm \mathfrak{Q}\frac{\pm d}{t}, \qquad d'' = \pm \mathfrak{R}\frac{\pm d}{t}.$$

IX.

Besondere Betrachtung des Theilens durch 2.

Ein sehr oft in Anwendung kommendes Theilen ist jenes durch 2, nemlich das Zerfällen einer Zahl, n, in zwei Theile, x und y, die sich um nicht mehr als 2 von einander unterscheiden. Sei der Theil x mindestens so groß, wenn nicht größer, als der andere y, und ihr Unterschied d, so ist

$$(25) \qquad x + y = n, \quad x - y = d,$$

folglich, wenn man addirt und abzieht,

$$2x = n + d,$$
$$2y = n - d.$$

Hieraus folgt einerseits

$$(26) \qquad x = \frac{n}{2} + \frac{d}{2}, \quad y = \frac{n}{2} - \frac{d}{2},$$

andrerseits

$$(27) \qquad n = 2x - d = 2y + d.$$

Läßt sich nun die Zahl n in zwei gleiche Theile zerfällen, so daß ihr Unterschied d keiner oder Null ist; so nennt man diese Zahl n **gerade**, und jeden ihrer beiden gleichen Theile x und y ihre **Hälfte**, so daß

$$x = y = \frac{n}{2} \text{ ist.}$$

Kann man dagegen die Zahl n nicht in zwei gleiche, sondern höchstens in zwei möglichst wenig, nur um 1, von einander verschiedene, ungleiche Theile zerfällen; so nennt man diese Zahl n **ungerad**, und den größeren Theil x die **größere Hälfte**, den kleineren Theil y die **kleinere Hälfte**; so daß man hat:

größere Hälfte $\quad x = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2},$

kleinere Hälfte $\quad y = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}.$

1. Will man demnach eine Zahl n in zwei, entweder gleiche, oder höchstens nur um 1 verschiedene, Theile x und y zerlegen, mithin beide Zerfällungsweisen durch obige Gleichungen (27) auf einmal ausdrücken, so gibt man diesen die Gestalt

$$n + 1 = 2x + 1 - d,$$
$$n = 2y + d.$$

Je nachdem nun n gerade oder ungerade ist,

hat man $d = 0$ oder 1,

also $1 - d = 1$ oder 0;

daher, nach der Erklärung der gewöhnlichen Theilung (in IV),

$$x = q\frac{n+1}{2}, \quad y = q\frac{n}{2},$$
$$1 - d = r\frac{n+1}{2}, \quad d = r\frac{n}{2}.$$

Daraus folgt nun, nach den Gleichungen (25) und wenn man die zwei lezten Gleichungen addirt,

$$(28) \qquad q\frac{n+1}{2} + q\frac{n}{2} = n,$$
$$q\frac{n+1}{2} - q\frac{n}{2} = r\frac{n}{2}$$

und

$$(29) \qquad r\frac{n+1}{2} + r\frac{n}{2} = 1.$$

Je nachdem also

die Zahl n entweder gerade, oder ungerade ist,

muß der Rest $r\frac{n}{2} = 0$ oder 1 und

der Rest $r\frac{n+1}{2} = 1$ oder 0,

also die Summe beider Reste jeden Falls 1 sein; ferner sind die zwei, entweder gleichen oder höchstens um 1 verschiedenen Theile von n die Quoti $q\frac{n}{2}$ und $q\frac{n+1}{2}$; und zwar ist

α) der Quotus $q\frac{n}{2}$ entweder genau die Hälfte,
oder nur die kleinere Hälfte, und

β) der Quotus $q\frac{n+1}{2}$ entweder genau die Hälfte,
oder schon die größere Hälfte.

2. Will man dagegen eine Zahl n in zwei ungleiche, möglichst wenig von einander verschiedene, Theile x und y zerfällen; so muß, je nachdem n gerade oder ungerade ist, der Unterschied $d = 2$ oder 1, folglich nach Gleichung (26)

der größere Theil $x = \frac{n}{2} + 1$ oder $= \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$,

der kleinere „ $y = \frac{n}{2} - 1$ oder $= \frac{n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}$,

und nach den Gleichungen (27)

$$n = 2(x-1) + 2 - d,$$
$$n = 2y + d$$

sein.

Je nachdem nun n gerade oder ungerade ist,

hat man $d = 2$ oder 1,

also $2 - d = 0$ oder 1;

daher nach der Erklärung des gewöhnlichen und außerordentlichen Theilens (in IV und V),

$$x - 1 = \not{q}\frac{n}{2}, \quad x = \not{q}\frac{n}{2} + 1, \quad y = \not{Q}\frac{n}{2},$$
$$2 - d = \not{r}\frac{n}{2}, \quad d = \not{R}\frac{n}{2}.$$

Daraus folgt nun, nach den Gleichungen (25), und wenn man die beiden lezten Gleichungen addirt,

$$(30) \qquad \left(\not{q}\frac{n}{2} + 1\right) + \not{Q}\frac{n}{2} = n,$$
$$\left(\not{q}\frac{n}{2} + 1\right) - \not{Q}\frac{n}{2} = \not{R}\frac{n}{2},$$

und

$$(31) \qquad \not{r}\frac{n}{2} + \not{R}\frac{n}{2} = 2.$$

Je nachdem also

die Zahl n entweder gerade oder ungerade ist,

muß der Rest $\not{r}\frac{n}{2} = 0$ oder 1,

und der Rest $\not{R}\frac{n}{2} = 2$ oder 1,

also die Summe beider Reste jeden Falls 2 sein; ferner sind die zwei, möglichst wenig von einander verschiedenen, Theile von n der außerordentliche Quotus $\not{Q}\frac{n}{2}$ und der aufwärtige Quotus $\not{q}\frac{n}{2} + 1$; und zwar ist

α) der Quotus $\not{Q}\frac{n}{2} = \not{q}\frac{n-1}{2}$ entweder um 1 kleiner als die Hälfte, oder die kleinere Hälfte selbst, und

β) der Quotus $\not{q}\frac{n}{2} + 1$ entweder um 1 größer als die Hälfte, oder die größere Hälfte selbst.

Anmerkung. Die Gleichungen (30) und (31) fließen auch aus den früheren (28) und (29), wenn man darin n mit $n - 1$ vertauscht, und die Gleichungen (7), (8) berücksichtiget.

X.

Kleinste Reste.

Kennt man den gewöhnlichen positiven Rest der Theilung einer Zahl d durch eine andere t, nemlich $r\frac{d}{t}$, so läßt sich leicht der ihm angehörige negative Rest $-\left(t-r\frac{d}{t}\right)=-R\frac{-d}{t}$, vermöge Gleichung (12), finden, wenn man jenen von dem Theiler t abzieht, und den entfallenden Unterschied negativ ansezt. Sobald aber beide Reste, der kleinste positive $r\frac{d}{t}$ und der ihn zum Theiler ergänzende negative $-\left(t-r\frac{d}{t}\right)=-R\frac{-d}{t}$, bekannt sind, so ist der kleinere aus ihnen, oder, falls sie gleich groß wären, jeder von ihnen der **kleinste Rest** der Theilung von d durch t.

1. **Der kleinste Rest** ist demnach **positiv**, folglich $=r\frac{d}{t}$, wenn $r\frac{d}{t}\leqq t-r\frac{d}{t}$, also $2r\frac{d}{t}\leqq t$, und $r\frac{d}{t}\leqq\frac{1}{2}t$, d. h. wenn $r\frac{d}{t}$ nicht größer als der halbe Theiler ist; nemlich wenn, vermöge IX, $r\frac{d}{t}\leqq q\frac{t}{2}$, d. h. nicht $>q\frac{t}{2}$, folglich $<q\frac{t}{2}+1$, und somit

$$r\frac{d}{t}=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ Q\frac{t}{2},\ q\frac{t}{2}$$

ist. Dann wird auch

der kleinste Rest $=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ Q\frac{t}{2},\ q\frac{t}{2}.$

2. **Der kleinste Rest** ist dagegen **negativ**, folglich $=-\left(t-r\frac{d}{t}\right)$, wenn $r\frac{d}{t}\geqq t-r\frac{d}{t}$, also $2r\frac{d}{t}\geqq t$, und $r\frac{d}{t}\geqq\frac{1}{2}t$, d. h. wenn $r\frac{d}{t}$ nicht kleiner als der halbe Theiler ist; nemlich wenn, vermöge IX, $r\frac{d}{t}\geqq q\frac{t+1}{2}$, d. h. nicht $<q\frac{t+1}{2}$, folglich $>Q\frac{t}{2}$, und somit

$$r\frac{d}{t}=q\frac{t+1}{2},\ q\frac{t}{2}+1,\ \ldots\ldots\ t-1$$

ist. Dann wird

der kleinste Rest $=-q\frac{t}{2},-Q\frac{t}{2},\ \ldots\ldots\ -1.$

3. **Der kleinste Rest** ist endlich **eben sowohl positiv** $=r\frac{d}{t}$ **als negativ** $=-\left(t-r\frac{d}{t}\right)$, wenn $r\frac{d}{t}=t-r\frac{d}{t}$, also $2r\frac{d}{t}=t$, und $r\frac{d}{t}=\frac{1}{2}t$, d. h. wenn $r\frac{d}{t}$ die Hälfte des Theilers ist; was voraussezt, daß der Theiler t eine gerade Zahl sei. Dann ist

der kleinste Rest eben sowohl $=\pm q\frac{t}{2}$, als $\pm q\frac{t+1}{2}$.

Anmerkung. Man kann auch den kleinsten positiven Rest $\not{r}\frac{d}{t}$ mit dem kleinsten negativen $-\not{r}\frac{-d}{t}$ vergleichen, und aus ihnen den kleinsten möglichen bestimmen.

XI.

Zusammenhang der Zahlen mit ihren Resten.

1. Jeder Zahl sind alle ihre Reste, daher auch diese einander, congruent, wenn man den Theiler, oder einen Factor desselben, zum Modul nimmt.

Denn gibt d durch t getheilt d' zum Quotus und d'' zum Reste, mag dieser wie immer beschaffen sein, so ist, vermöge **IV**, Gleichung (2),

$$d = td' + d''.$$

Nimmt man demnach den Theiler t, oder einen Factor Θ desselben, zum Modul; übergeht nach **III**, 1 von der Gleichheit auf die Congruenz; und wirft nach **III**, 7 das durch den Modul theilbare Product td' weg: so erhält man vermöge **III**, 13

$$d \equiv d'', \text{ mod } (t, \Theta).$$

So ist insbesondere

$$(32) \qquad d \equiv \not{r}\frac{d}{t} \equiv -\left(t - \not{r}\frac{d}{t}\right) \equiv -\not{R}\frac{-d}{t}$$
$$\equiv \not{R}\frac{d}{t} \equiv -\left(t - \not{R}\frac{d}{t}\right) \equiv -\not{r}\frac{-d}{t}, \text{ mod } (t, \Theta).$$

Z. B. Wenn man 147 durch 30 theilt, ist

$$147 \equiv 27 \equiv -3, \text{ mod } (30, 15, 10, 6, 5, 3, 2).$$

2. Soll demnach eine Zahl x irgend einer der Reste einer anderen Zahl d, nach einem Theiler oder Modul t, sein; so kann man dies am einfachsten allgemein durch die Congruenz

$$(33) \qquad x \equiv d, \text{ mod } t$$

andeuten. Obschon diese Bezeichnung unbestimmt ist, weil sie x nur als irgend eine nach dem Modul t mit d congruente Zahl, folglich vermöge **III**, 4 als jedes Glied der arithmetischen Progression angibt, deren ein Glied d und Unterschied t ist; so kann man sie doch, wegen ihrer besonderen Bequemlichkeit, überall verwenden, wo man aus dem Zusammenhange der Rede oder aus der Bedeutung der Zahl x bereits weiß, ob selbe Null, nur positiv oder auch negativ, blos kleiner oder auch so groß als der Modul, oder wohl gar noch größer als derselbe sein darf; folglich ob man sie dem positiven oder negativen, gewöhnlichen oder außerordentlichen, oder — was meistens der Fall sein wird — dem kleinsten möglichen Reste der Zahl d durch t, oder sonst einem Gliede obiger arithmetischer Progression gleich zu stellen hat. Um mehr Bestimmtheit in den Ausdruck

zu bringen, kann man nebenbei den Umfang der Werthe der gesuchten Zahl ansezen, folglich den gewöhnlichen Rest

$$x = \not{r}\frac{d}{t} \text{ durch } x \equiv d, \ \mathrm{mod}\, t = 0,\ 1,\ \ldots\ t-1,$$

den außerordentlichen Rest

$$x = \not{R}\frac{d}{t} \text{ durch } x \equiv d, \ \mathrm{mod}\ t = 1,\ 2,\ \ldots\ t,$$

und den möglich kleinsten Rest durch

$$x \equiv d, \ \mathrm{mod}\ t = -\not{q}\frac{t-1}{2}, \ldots \not{q}\frac{t}{2}$$

andeuten.

3. Wird demnach von einem zusammengesezten Ausdrucke, d. i. von der Summe oder dem Unterschiede mehrerer theils zu addirender, theils abzuziehender Zahlen, welche selbst wieder zum Theil Producte oder Potenzen sein können, ein Rest nach einem angegebenen Theiler oder Modul gesucht; so darf man, zur Vereinfachung der Rechnung, zu Folge **III**, 5 und 6, anstatt jedes Gliedes, mag es zu addiren oder abzuziehen sein, oder vermöge **III**, 8 statt jedes Factors eines Gliedes, oder endlich, vermöge **III**, 9, statt der in einem Gliede zu potenzirenden Zahl, einen Rest nach demselben Modul, am vortheilhaftesten den kleinsten, in Rechnung bringen; folglich von jedem Gliede, oder von einem Factor oder einer zu potenzirenden Zahl in demselben, den Theiler oder Modul, so oft es angeht, wegwerfen. Erhält man endlich für den Dividend eine negative den Theiler nicht erreichende Zahl, und soll der Rest positiv ausfallen, so wird man blos noch den Zahlwerth des negativen Restes zum Theiler ergänzen.

4. Congruente Zahlen geben, durch den Modul oder durch einen Theiler des Moduls getheilt, gleiche Reste derselben Art, welche nemlich beide gewöhnlich oder außerordentlich, positiv oder negativ sind.

Denn ist $d \equiv \delta$, mod m, und geben die Zahlen d und δ durch einen Theiler μ des Moduls m, dem er auch gleich sein kann, auf einerlei Weise getheilt die Reste r und ρ; so ist, vermöge **III**, 13, $d \equiv \delta$, mod μ, vermöge **XI**, 1, $d \equiv r$, und $\delta \equiv \rho$, mod μ; daher auch, zu Folge **III**, 2,

$$r \equiv \rho, \ \mathrm{mod}\ \mu,$$

d. h. die Reste r und ρ der congruenten Zahlen d und δ sind nach jedem Theiler μ des Moduls m congruent, nemlich der Unterschied jener Reste ist durch diesen Theiler μ theilbar. Weil nun die Zahlwerthe der Reste r und ρ nie größer als der Theiler μ, und beide Reste gleichzeitig entweder positiv oder negativ, gewöhnlich oder außerordentlich sind; so muß ihr Unterschied $r - \rho$ oder $\rho - r$, kleiner als der Theiler μ ausfallen, mithin Null, und sofort der Rest $r = \rho$ sein; da durch eine Zahl keine kleinere außer Null theilbar ist.

So ist z. B. $131 \equiv -93 \mod 28$, beide Zahlen geben durch den Modul 28 und seine Theiler 14, 7, 4, 2 getheilt die positiven Reste 19, 5, 5, 3, 1 und die negativen Reste $-9, -9, -2, -1, -1$.

5. Insbesondere muß, weil vermöge XI, 1,

$$d \equiv \mathfrak{r}\frac{d}{t} \equiv \mathfrak{R}\frac{d}{t}, \mod t$$

ist, auch

$$(34) \qquad \mathfrak{r}\frac{d}{t} = \mathfrak{r}\frac{\mathfrak{r}\frac{d}{t}}{t} = \mathfrak{r}\frac{\mathfrak{R}\frac{d}{t}}{t},$$

$$\mathfrak{R}\frac{d}{t} = \mathfrak{R}\frac{\mathfrak{r}\frac{d}{t}}{t} = \mathfrak{R}\frac{\mathfrak{R}\frac{d}{t}}{t}$$

sein.

XII.

Verwandlung der Quoti und Reste.

1. Ein Quotus bleibt ungeändert, wenn man den Dividend und Theiler mit einerlei Zahl multiplicirt oder durch einen gemeinschaftlichen Theiler dividirt.

2. Ein Rest bleibt derselbe, wenn man entweder den Dividend und Theiler mit einerlei Zahl multiplicirt und den neuen Rest durch diesen Multiplicator theilt, oder wenn man den Dividend und Theiler durch einen gemeinschaftlichen Theiler dividirt und den neuen Rest mit diesem Divisor multiplicirt.

Denn wenn man d durch t theilt, ist

$$(4) \qquad d = t\,\mathfrak{q}\frac{d}{t} + \mathfrak{r}\frac{d}{t} \text{ und}$$

$$\mathfrak{r}\frac{d}{t} = 0, 1, 2, \ldots t-1;$$

folglich, wenn man mit der Zahl n beide Theile dieser Gleichungen multiplicirt,

$$nd = nt\,\mathfrak{q}\frac{d}{t} + n\,\mathfrak{r}\frac{d}{t}$$

und

$$n\,\mathfrak{r}\frac{d}{t} = 0, n, 2n, \ldots . nt - n.$$

Mithin ist, nach der Erklärung der gewöhnlichen Theilung in IV,

$$(35) \qquad \mathfrak{q}\frac{nd}{nt} = \mathfrak{q}\frac{d}{t},$$

$$(36) \qquad \mathfrak{r}\frac{nd}{nt} = n\,\mathfrak{r}\frac{d}{t} \text{ und } \mathfrak{r}\frac{d}{t} = \mathfrak{r}\frac{nd}{nt} : n.$$

Aus denselben Gründen ist

$$(37) \qquad \mathfrak{Q}\frac{nd}{nt} = \mathfrak{Q}\frac{d}{t},$$

$$(38) \qquad \mathfrak{R}\frac{nd}{nt} = n\,\mathfrak{R}\frac{d}{t} \text{ und } \mathfrak{R}\frac{d}{t} = \mathfrak{R}\frac{nd}{nt} : n.$$

Z. B. $\mathfrak{q}\frac{17}{7} = 2 = \mathfrak{q}\frac{102}{42} = \mathfrak{q}\frac{51}{21}$,

$$r\frac{17}{7} = 3 = r\frac{102}{42} : 6 = 18 : 6,$$
$$r\frac{102}{42} = 2\,r\frac{51}{21} = 2.9 = 18.$$

XIII.

Das Theilen durch ein Product. Nach einander folgendes Theilen.

Sei die Zahl d zuerst durch m zu theilen, und der entfallende Quotus wieder durch p, so findet man

$$d = m\,q\frac{d}{m} + r\frac{d}{m},$$

$$q\frac{d}{m} = p\,q\frac{q\frac{d}{m}}{p} + r\frac{q\frac{d}{m}}{p},$$

daher, wenn man substituirt,

$$d = mp\,q\frac{q\frac{d}{m}}{p} + m\,r\frac{q\frac{d}{m}}{p} + r\frac{d}{m}.$$

Nun ist

$$r\frac{d}{m} = 0,\ 1, \ldots\ldots m - 1,$$

$$r\frac{q\frac{d}{m}}{p} = 0,\ 1, \ldots\ldots p - 1,$$

also

$$m\,r\frac{q\frac{d}{m}}{p} + r\frac{d}{m} = 0, 1, \ldots\ldots mp - 1;$$

mithin liefert die gewöhnliche Theilung

$$q\frac{d}{mp} = q\frac{q\frac{d}{m}}{p},$$

$$r\frac{d}{mp} = m\,r\frac{q\frac{d}{m}}{p} + r\frac{d}{m}.$$

Verwechselt man in diesen Gleichungen m und p, so findet man

$$q\frac{d}{pm} = q\frac{q\frac{d}{p}}{m},$$

$$r\frac{d}{pm} = p\,r\frac{q\frac{d}{p}}{m} + r\frac{d}{p},$$

daher, wegen mp = pm, auch

$$q\frac{d}{mp} = q\frac{q\frac{d}{m}}{p} = q\frac{q\frac{d}{p}}{m}, \tag{39}$$

$$r\frac{d}{mp} = m\,r\frac{q\frac{d}{m}}{p} + r\frac{d}{m} = p\,r\frac{q\frac{d}{p}}{m} + r\frac{d}{p}. \tag{40}$$

Die erste dieser Gleichungen enthält folgende Sätze:

1. Ist eine Zahl durch das Product zweier Zahlen zu theilen, so erhält man den Quotus, wenn man die Zahl zuerst durch den einen Theiler und den entfallenden Quotus durch den zweiten Theiler dividirt.

2. Anstatt eine Zahl durch zwei andere der Reihe nach zu theilen, kann man sie auch sogleich durch das Product derselben theilen.

3. Die Ordnung des nach einander folgenden Theilens ist beliebig.

Z. B. Ist $d = 87$ durch $m = 4$ und $p = 5$ nach einander oder durch das Product $mp = 20$ auf einmal zu theilen, so hat man

$$87 = 20.\ 4 + 7 = 4.\ 21 + 3 = 5.\ 17 + 2,$$

$$21 = 5.\ 4 + 1,\quad 17 = 4.\ 4 + 1,\quad 7 = 4.\ 1 + 3 = 5.\ 1 + 2.$$

Soll die Theilung durch das Product eine außerordentliche sein, so muß man zuerst durch den einen Factor außerordentlich und nachher durch den anderen gewöhnlich theilen. Denn aus

$$d = m\,\mathfrak{Q}\frac{d}{m} + \mathfrak{R}\frac{d}{m},$$

$$\mathfrak{Q}\frac{d}{m} = p\,\mathfrak{q}\frac{\mathfrak{Q}\frac{d}{m}}{p} + \mathfrak{r}\frac{\mathfrak{Q}\frac{d}{m}}{p}$$

folgt

$$d = mp\,\mathfrak{q}\frac{\mathfrak{Q}\frac{d}{m}}{p} + m\,\mathfrak{r}\frac{\mathfrak{Q}\frac{d}{m}}{p} + \mathfrak{R}\frac{d}{m};$$

zugleich ist

$$m\,\mathfrak{r}\frac{\mathfrak{Q}\frac{d}{m}}{p} + \mathfrak{R}\frac{d}{m} = m\,(0, 1, \ldots p-1) + (1, 2, \ldots m)$$
$$= 1, 2, \ldots .\ mp;$$

daher findet man

$$(41)\qquad \mathfrak{Q}\frac{d}{mp} = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{Q}\frac{d}{m}}{p},$$

$$(42)\qquad \mathfrak{R}\frac{d}{mp} = m\,\mathfrak{r}\frac{\mathfrak{Q}\frac{d}{m}}{p} + \mathfrak{R}\frac{d}{m}.$$

Auch hier ist die Verwechslung der Factoren oder der Theiler gestattet.

XIV.

Quoti von Summen und Unterschieden.

Seien a, b, c, d, ... absolute Zahlen, theils zu einer Zahl n zu addiren, theils abzuziehen, oder theils positiv, theils negativ zusammenzufassen, der

dadurch erhaltene zusammengesetzte Ausdruck durch die Zahl t zu theilen und der Quotus zu suchen.

1. Vermöge Gleichung (4) ist

$$a = t\,q\frac{a}{t} + r\frac{a}{t},$$
$$b = t\,q\frac{b}{t} + r\frac{b}{t},$$
$$c = t\,q\frac{c}{t} + r\frac{c}{t},$$
$$\cdots\cdots$$

daher, wenn man noch eine beliebige Zahl u in der Rechnung unverändert mitführen will,

$$u \pm a \pm b \pm c \ldots = t\left(\pm q\frac{a}{t} \pm q\frac{b}{t} \pm q\frac{c}{t}\ldots\right) + u \pm r\frac{a}{t} \pm r\frac{b}{t} \pm r\frac{c}{t}\ldots$$

Aus demselben Grunde ist

$$u \pm r\frac{a}{t} \pm r\frac{b}{t} \pm r\frac{c}{t}\ldots = t\,q\frac{u \pm r\frac{a}{t} \pm r\frac{b}{t} \pm r\frac{c}{t}\ldots}{t} + r\frac{u \pm r\frac{a}{t} \pm r\frac{b}{t} \pm r\frac{c}{t}\ldots}{t}$$

und vermöge XI, 3

$$r\frac{u \pm r\frac{a}{t} \pm r\frac{b}{t} \pm r\frac{c}{t}\ldots}{t} = r\frac{u \pm a \pm b \pm c\ldots}{t},$$

folglich, wenn man diese Ausdrücke substituirt,

$$u \pm a \pm b \pm c \ldots = t\left(\pm q\frac{a}{t} \pm q\frac{b}{t} \pm q\frac{c}{t}\ldots + q\frac{u \pm r\frac{a}{t} \pm r\frac{b}{t} \pm r\frac{c}{t}\ldots}{t}\right) + r\frac{u \pm a \pm b \pm c\ldots}{t}.$$

Die gewöhnliche Theilung gibt demnach

$$(43)\quad q\frac{u \pm a \pm b \pm c\ldots}{t} = \pm q\frac{a}{t} \pm q\frac{b}{t} \pm q\frac{c}{t}\ldots + q\frac{u \pm r\frac{a}{t} \pm r\frac{b}{t} \pm r\frac{c}{t}\ldots}{t}.$$

2. Will man auch negative Dividende in der Rechnung behalten, so hat man nach Gleichung (4)

$$\pm a = t\,q\frac{\pm a}{t} + r\frac{\pm a}{t},$$
$$\pm b = t\,q\frac{\pm b}{t} + r\frac{\pm b}{t},$$
$$\pm c = t\,q\frac{\pm b}{t} + r\frac{\pm c}{t},$$
$$\cdots\cdots$$

also

$$u \pm a \pm b \pm c \ldots = t\left(q\frac{\pm a}{t} + q\frac{\pm b}{t} + q\frac{\pm c}{t}\ldots\right) + u + r\frac{\pm a}{t} + r\frac{\pm b}{t} + r\frac{\pm c}{t}\ldots$$

Weil ferner aus gleichem Grunde

$$u + r\frac{\pm a}{t} + r\frac{\pm b}{t} + r\frac{\pm c}{t}\ldots = t\,q\frac{u + r\frac{\pm a}{t} + r\frac{\pm b}{t} + r\frac{\pm c}{t}\ldots}{t}$$
$$+ r\frac{u + r\frac{\pm a}{t} + r\frac{\pm b}{t} + r\frac{\pm c}{t}\ldots}{t}$$

und vermöge XI, 3

$$r\frac{u + r\frac{\pm a}{t} + r\frac{\pm b}{t} + r\frac{\pm c}{t}\ldots}{t} = r\frac{u \pm a \pm b \pm c\ldots}{t}$$

ist, so findet man

$$u \pm a \pm b \pm c \ldots = t\left(q\frac{\pm a}{t} + q\frac{\pm b}{t} + q\frac{\pm c}{t}\ldots + q\frac{u + r\frac{\pm a}{t} + r\frac{\pm b}{t} + r\frac{\pm c}{t}\ldots}{t}\right)$$
$$+ r\frac{u \pm a \pm b \pm c\ldots}{t}.$$

Darnach gibt die gewöhnliche Theilung

$$(44)\quad q\frac{u \pm a \pm b \pm c\ldots}{t} = q\frac{\pm a}{t} + q\frac{\pm b}{t} + q\frac{\pm c}{t}\ldots + q\frac{u + r\frac{\pm a}{t} + r\frac{\pm b}{t} + r\frac{\pm c}{t}\ldots}{t}.$$

3. Ist ein Glied des zusammengesetzten Ausdruckes durch den Theiler theilbar, oder ein Vielfaches des Theilers, z. B. $a = \alpha t$, so ist

$$q\frac{a}{t} = \alpha, \quad r\frac{a}{t} = 0, \quad q\frac{-a}{t} = -\alpha, \quad r\frac{-a}{t} = 0,$$

daher nach Gleichung (43) und (44)

$$(45)\quad q\frac{u \pm \alpha t \pm b \pm c\ldots}{t} = \pm\alpha \pm q\frac{b}{t} \pm q\frac{c}{t}\ldots + q\frac{u \pm r\frac{b}{t} \pm r\frac{c}{t}\ldots}{t}$$
$$= \pm\alpha + q\frac{\pm b}{t} + q\frac{\pm c}{t}\ldots + q\frac{u + r\frac{\pm b}{t} + r\frac{\pm c}{t}\ldots}{t}.$$

Anmerkung. In diesen Gleichungen kann überall statt der gewöhnlichen Theilung auch die außerordentliche gesetzt werden.

4. **Besondere Fälle.** Sind die Zahlen a, b, c, . . . sämmtlich zu addiren, oder stellt man sich unter den Buchstaben a, b, c, . . . eben sowohl negative als positive Zahlen vor, so geben die Gleichungen (43) und (44)

$$(46)\quad q\frac{u + a + b + c + \ldots}{t} = q\frac{a}{t} + q\frac{b}{t} + q\frac{c}{t} + \ldots + q\frac{u + r\frac{a}{t} + r\frac{b}{t} + r\frac{c}{t} + \ldots}{t}$$

Eben so findet man nach Gleichung (43)

$$(47)\qquad q\frac{u+a\pm b}{t}=q\frac{a}{t}\pm q\frac{b}{t}+q\frac{u+r\frac{a}{t}\pm r\frac{b}{t}}{t},$$

und wenn man erst $a=0$ und dann a statt u setzt.

$$(48)\qquad q\frac{a\pm b}{t}=\pm q\frac{b}{t}+q\frac{a\pm r\frac{b}{t}}{t}.$$

Läßt man hierin b in $b-1$ und a in $a\pm 1$ übergehen, so erhält man

$$(49)\qquad q\frac{a\pm b}{t}=\pm q\frac{b-1}{t}+q\frac{a\pm\left(1+r\frac{b-1}{t}\right)}{t},\ \text{oder nach Gleich. (8)}$$

$$=\pm q\frac{b-1}{t}+q\frac{a\pm R\frac{b}{t}}{t};$$

oder es ist

$$(50)\qquad q\frac{a\pm b}{t}=q\frac{a\pm tQ\frac{b}{t}\pm R\frac{b}{t}}{t}=\pm Q\frac{b}{t}+q\frac{a\pm R\frac{b}{t}}{t}.$$

5. Kommen unter den theils zu addirenden, theils abzuziehenden Zahlen (den Gliedern des zu theilenden zusammengesezten Ausdruckes), selbst wieder Divisionsreste vor; so geben dafür die Gleichungen (43) bis (49) folgende Rechnungsweisen an die Hand.

$$(51)\qquad q\frac{u\pm r\frac{a}{t}\pm r\frac{b}{t}\pm r\frac{c}{t}\ldots}{t}=q\frac{u\pm a\pm b\pm c\ldots\ldots}{t}\mp q\frac{a}{t}\mp q\frac{b}{t}\mp q\frac{c}{t}\ldots$$

$$(52)\qquad q\frac{u+r\frac{\pm a}{t}+r\frac{\pm b}{t}+r\frac{\pm c}{t}\ldots}{t}=q\frac{u\pm a\pm b\pm c\ldots\ldots}{t}-q\frac{\pm a}{t}-q\frac{\pm b}{t}-q\frac{\pm c}{t}\ldots$$

$$(53)\qquad q\frac{u+r\frac{a}{t}+r\frac{b}{t}+r\frac{c}{t}\ldots}{t}=q\frac{u+a+b+c\ldots\ldots}{t}-q\frac{a}{t}-q\frac{b}{t}-q\frac{c}{t}\ldots$$

$$(54)\qquad q\frac{u+r\frac{a}{t}\pm r\frac{b}{t}}{t}=q\frac{u+a\pm b}{t}-q\frac{a}{t}\mp q\frac{b}{t},$$

$$(55)\qquad q\frac{a\mp r\frac{b}{t}}{t}=q\frac{a\mp b}{t}\mp q\frac{b}{t}=\mp q\frac{b}{t}-q\frac{-a\pm b-1}{t}-1,$$

$$(56)\qquad q\frac{a\pm R\frac{b}{t}}{t}=q\frac{a\mp b}{t}\mp q\frac{b-1}{t}=\mp q\frac{b-1}{t}-q\frac{-a\pm b-1}{t}-1.$$

XV.

Addition und Subtraction der Quoti und Reste.

1. Für das Addiren und Abziehen der Quoti liefern die Gleichungen (43), (44) und (19) folgende Vorschriften:

(57) $\pm a \pm \mathfrak{q}\frac{b}{t} \pm \mathfrak{q}\frac{c}{t} \ldots = \mathfrak{q}\frac{u \pm at \pm b \pm c \ldots}{t} - \mathfrak{q}\frac{u \pm \mathfrak{r}\frac{b}{t} \pm \mathfrak{r}\frac{c}{t} \ldots}{t}$,

(58) $a + \mathfrak{q}\frac{b}{t} = \mathfrak{q}\frac{at+b}{t}$,

(59) $a - \mathfrak{q}\frac{b}{t} = a + \mathfrak{q}\frac{-b}{t} + 1 = \mathfrak{q}\frac{(a+1)t-b}{t} = \mathfrak{q}\frac{(a+1)t-(b+1)}{t}$.

Setzt man in den Gleichungen (48) und (55) $a \mp b$ für a, so übergehen sie in

$$(60) \qquad \mathfrak{q}\frac{a}{t} \pm \mathfrak{q}\frac{b}{t} = \mathfrak{q}\frac{a \pm b \mp \mathfrak{r}\frac{b}{t}}{t},$$

oder wenn man die Gleichung (10) beachtet, in

$$(61) \qquad \mathfrak{q}\frac{a}{t} \pm \mathfrak{q}\frac{b}{t} = \mathfrak{q}\frac{a \pm (b+1) \mp \mathfrak{R}\frac{b+1}{t}}{t}.$$

Eben so findet man, wenn man auf die Gleichung (19) Rücksicht nimmt,

$$\mathfrak{q}\frac{a}{t} - \mathfrak{q}\frac{b}{t} = \mathfrak{q}\frac{-b-1}{t} + 1 + \mathfrak{q}\frac{a}{t},$$

also nach der Gleichung (58)

$$= \mathfrak{q}\frac{t-b-1}{t} + \mathfrak{q}\frac{a}{t},$$

daher nach den Gleichungen (60) und (61)

$$(62) \qquad \mathfrak{q}\frac{a}{t} - \mathfrak{q}\frac{b}{t} = \mathfrak{q}\frac{a-b+t-1-\mathfrak{r}\frac{a}{t}}{t}$$

$$= \mathfrak{q}\frac{a-b+t-\mathfrak{R}\frac{a+1}{t}}{t} = \mathfrak{q}\frac{a-b+\mathfrak{r}\frac{-a-1}{t}}{t}.$$

Bei jedem solchen Unterschiede von Quotis kann man auch beide Dividende um ein beliebiges Vielfaches des gemeinsamen Theilers vermehren oder vermindern; denn es ist

$$\mathfrak{q}\frac{a}{t} - \mathfrak{q}\frac{b}{t} = \mathfrak{q}\frac{a}{t} \pm n - \left(\mathfrak{q}\frac{b}{t} \pm n\right) = \mathfrak{q}\frac{a \pm nt}{t} - \mathfrak{q}\frac{b \pm nt}{t}.$$

2. Sollten die Quoti *verschiedene Theiler* besitzen, so bringt man sie, nach (35) oder (37), wie Quotienten oder Brüche vorerst auf einerlei Theiler und hält sich dann an die eben ertheilten Vorschriften.

So ist z. B.

$$a - \mathfrak{q}\frac{b}{m} - \mathfrak{q}\frac{c}{p} = a - \mathfrak{q}\frac{bp}{mp} - \mathfrak{q}\frac{cm}{mp}; \text{ nach (59)}$$

$$= \mathfrak{q}\frac{(a+1)mp-(bp+1)}{mp} - \mathfrak{q}\frac{cm}{mp}; \text{ nach (60)}$$

$$= \mathfrak{q}\frac{mpa - pb - mc + mp - 1 + \mathfrak{r}\frac{mc}{mp}}{mp}; \text{ endlich nach (36)}$$

$$a - \mathfrak{q}\frac{b}{m} - \mathfrak{q}\frac{c}{p} = \mathfrak{q}\frac{mpa - pb - mc + mp - 1 + m\,\mathfrak{r}\frac{c}{p}}{mp}.$$

3. Sucht man die Summe oder den Unterschied der Reste $\not{r}\frac{a}{t}$ und $\not{r}\frac{b}{t}$, so findet man

$$\not{r}\frac{a}{t} \pm \not{r}\frac{b}{t} = a - t\,\not{q}\frac{a}{t} \pm b \mp t\,\not{q}\frac{b}{t}$$

$$= a \pm b - t\left(\not{q}\frac{a}{t} \pm \not{q}\frac{b}{t}\right),$$

folglich vermöge Gleichung (60)

$$(63) \qquad \not{r}\frac{a}{t} \pm \not{r}\frac{b}{t} = a \pm b - t\,\not{q}\frac{a \pm b \mp \not{r}\frac{b}{t}}{t}.$$

In gleicher Weise ergibt sich

$$(64) \qquad \not{R}\frac{a}{t} \pm \not{R}\frac{b}{t} = a \pm b - t\,\not{Q}\frac{a \pm b \mp \not{R}\frac{b}{t}}{t}.$$

XVI.

Differenzen der Functionen.

Jede allgemeine Zahl, welche in einerlei Untersuchung verschiedene besondere Zahlen vorzustellen vermag, wird veränderlich, und falls sie in einer Untersuchung stets dieselbe Zahl vorstellen sollte, beständig genannt

Sehr oft stehen allgemeine Zahlen mit einander in einem solchen Zusammenhange, daß, während einige völlig beliebige Werthe annehmen, die übrigen nur gewisse Werthe erhalten können; sie heißen dann gleichzeitig veränderliche, und insbesondere die ersteren frei, die letzteren abhängig veränderliche Zahlen, oder erstere die Grundveränderlichen und letztere ihre Functionen. So ist jeder allgemeine Rechnungsausdruck eine Function aller in ihm vorkommenden allgemeinen Zahlen.

Von den mancherlei Eigenschaften der Veränderlichen und ihrer Functionen interessiren am meisten die Differenzen (Unterschiede) oder Aenderungen derselben, nemlich die Unterschiede ihrer Werthe, wenn man eine, einige oder alle Veränderlichen um Gegebenes ändert, und von jedem solchen späteren Werthe den früheren oder ursprünglichen abzieht. Eine solche Differenz einer Veränderlichen oder Function heißt eine Zunahme oder ein Wachsthum (incrementum), wenn sie positiv, dagegen eine Abnahme (decrementum), wenn sie negativ ausfällt. Auch nennt man sie im algebraischen Sinne durchgehends eine Zunahme, wofern man negative Zunahmen für eigentliche Abnahmen ansieht.

Die Aenderung einer allgemeinen Zahl bezeichnet man, indem man ihrem Zeichen den Buchstaben Δ vorschreibt; z. B. durch Δx die Aenderung oder Differenz der Zahl x.

Aendert sich oder wächst demnach eine Zahl x um ihre Differenz Δx, so ist ihr nachfolgender oder späterer Werth $x + \Delta x$.

Aus den Lehren über die Aenderungen der veränderlichen Zahlen, Rechnungsausdrücke oder Functionen heben wir nur die folgenden heraus.

1. Bleiben sich zwei veränderliche Zahlen stets gleich, so sind auch ihre Aenderungen gleich.

Denn sind die veränderlichen Zahlen u und v, wie sie sich auch immer ändern mögen, stets gleich; so müssen sie auch noch einander gleich sein, wenn sie sich um Δu und Δv in die Werthe $u + \Delta u$ und $v + \Delta v$ abändern. Man hat demnach nicht nur $u = v$, sondern auch $u + \Delta u = v + \Delta v$, folglich auch $\Delta u = \Delta v$.

2. Bleiben zwei veränderliche Zahlen einander stets congruent nach einem Modul, so sind auch ihre Aenderungen nach diesem Modul congruent.

Denn sind die veränderlichen Zahlen u und v, wie sie sich auch ändern mögen, immer nach demselben Modul m congruent, so müssen sie auch noch, wenn sie sich um Δu und Δv in $u + \Delta u$ und $v + \Delta v$ verändern, congruent sein. Man hat demnach nicht nur $u \equiv v$, mod m, sondern auch
$u + \Delta u \equiv v + \Delta v$, mod m; daher auch noch $\Delta u \equiv \Delta v$, mod m.

3. Die Aenderung einer algebraischen Summe ist die algebraische Summe der Aenderungen ihrer einzelnen Summanden.

Seien nemlich u, v, w, ... theils positive, theils negative veränderliche Zahlen, und ihre algebraische Summe $u + v + w + \ldots.$ Wachsen jene um die, theils positiven, theils negativen Differenzen $\Delta u, \Delta v, \Delta w, \ldots$ zu den Werthen $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $w + \Delta w$, ... an; so übergeht jene Summe in $u + \Delta u + v + \Delta v + w + \Delta w + \ldots$; mithin beträgt die Aenderung dieser Summe

$$\begin{aligned}\Delta(u + v + w + \ldots) &= (u + \Delta u + v + \Delta v + w + \Delta w + \ldots) \\ &\quad - (u + v + w + \ldots) \\ &= \Delta u + \Delta v + \Delta w + \ldots\end{aligned}$$

4. Die Aenderung einer beständigen Zahl ist Null.

Denn ist a eine beständige, u eine veränderliche Zahl, die Summe beider $u + a$, und ändert sich u um Δu in $u + \Delta u$, also die Summe in $u + \Delta u + a$ ab; so ist die Aenderung derselben Summe
$\Delta\ (u + a) = u + \Delta u + a - (u + a) = \Delta u.$

Die nemliche Aenderung betrüge aber nach dem vorhergehenden Saze

$$\Delta\ (u + a) = \Delta u + \Delta a;$$

mithin muß man $\Delta a = 0$ erachten.

5. Die Aenderung des Productes einer beständigen Zahl in eine veränderliche ist das Product des beständigen Factors in die Aenderung des veränderlichen.

Denn unter den eben gemachten Voraussetzungen ändert sich das Product au in $a(u + \Delta u)$ ab, daher beträgt seine Aenderung

$$\Delta(au) = a(u + \Delta u) - au = a\Delta u.$$

6. Aendert sich in einem gewöhnlichen Quotus $q\frac{u}{m}$ blos der Dividend u in $u + \Delta u$, also der Quotus selbst in $q\frac{u+\Delta u}{m}$ ab, so beträgt die Aenderung des gewöhnlichen Quotus

$$\Delta q\frac{u}{m} = q\frac{u+\Delta u}{m} - q\frac{u}{m},$$

folglich nach Gleichung (48) oder (60)

$$(65) \qquad \Delta q\frac{u}{m} = q\frac{\Delta u + r\frac{u}{m}}{m}$$

oder vermöge Gleichung (43)

$$(66) \qquad \Delta q\frac{u}{m} = q\frac{\Delta u}{m} + q\frac{r\frac{u}{m} + r\frac{\Delta u}{m}}{m}.$$

Nun ist aber $r\frac{u}{m} + r\frac{\Delta u}{m} = (0, 1, \ldots m-1) + (0, 1, \ldots m-1)$

$$= 0, 1, \ldots 2m - 2,$$

folglich

$$q\frac{r\frac{u}{m} + r\frac{\Delta u}{m}}{m} = 0, 1;$$

daher

$$(67) \qquad \Delta q\frac{u}{m} = q\frac{\Delta u}{m} \text{ oder } = q\frac{\Delta u}{m} + 1.$$

Z. B. Es ist $q\frac{538}{4} = 134$, $r\frac{538}{4} = 2$; wächst nun $u = 538$ um $217 = \Delta u$, so wächst der Quotus um $\Delta q\frac{538}{4} = q\frac{217+2}{4} = q\frac{219}{4} = 54$. In der That ist $q\frac{538+217}{4} = q\frac{755}{4} = 188 = 134 + 54$.

Auf dieselbe Weise findet man die Aenderung des außerordentlichen Quotus

$$(68) \qquad \Delta Q\frac{u}{m} = Q\frac{\Delta u + R\frac{u}{m}}{m} = Q\frac{\Delta u}{m} + Q\frac{R\frac{u}{m} + R\frac{\Delta u}{m}}{m}$$

$$= Q\frac{\Delta u}{m} \text{ oder } Q\frac{\Delta u}{m} + 1.$$

7. Aendert sich in einem gewöhnlichen Divisionsreste $r\frac{u}{m}$ blos der Dividend u in $u + \Delta u$, also der Rest selbst in $r\frac{u+\Delta u}{m}$ ab; so ist die Aenderung des gewöhnlichen Restes

$$\Delta \mathfrak{r}\frac{u}{m} = \mathfrak{r}\frac{u+\Delta u}{m} - \mathfrak{r}\frac{u}{m},$$

daher eben so wie jeder der beiden Reste kleiner als der Theiler. Da nun nach dieser Gleichung, vermöge III, 1,

$$\Delta \mathfrak{r}\frac{u}{m} \equiv u + \Delta u - u \equiv \Delta u, \text{ mod } m,$$

so muß, vermöge Gleichung (32), $\Delta \mathfrak{r}\frac{u}{m}$ entweder der kleinste positive oder der kleinste negative Rest von Δu nach dem Theiler m, mithin

$$(69) \quad \Delta \mathfrak{r}\frac{u}{m} \equiv \Delta u, \text{ mod } m = \pm \mathfrak{r}\frac{\pm \Delta u}{m}, \text{ nemlich entweder } = \mathfrak{r}\frac{\Delta u}{m}$$

$$\text{oder} = -\mathfrak{r}\frac{-\Delta u}{m} = -\left(m - \mathfrak{R}\frac{\Delta u}{m}\right)$$

sein.

Noch deutlicher ersieht man dies daraus, daß in der allgemeinsten Form, vermöge Gleichung (3) und (65),

$$\Delta \mathfrak{r}\frac{u}{m} = \Delta u - m\,\mathfrak{q}\frac{\Delta u + \mathfrak{r}\frac{u}{m}}{m} = \Delta u \pm pm - m\,\mathfrak{q}\frac{\Delta u \pm pm + \mathfrak{r}\frac{u}{m}}{m}$$

$$= \pm \mathfrak{r}\frac{\pm \Delta u}{m} - m\,\mathfrak{q}\frac{\pm \mathfrak{r}\frac{\pm \Delta u}{m} + \mathfrak{r}\frac{u}{m}}{m}$$

sein muß; indem man Δu um ein beliebiges Vielfaches von dem Theiler m vermehren, oder Δu durch einen beliebigen seiner Reste nach demselben Theiler ersezen darf. (XI, 3 und XV, 1.).

Ist $\mathfrak{r}\frac{\Delta u}{m} = 0$, d. h. der Zuwachs Δu durch m theilbar, so ist auch $\mathfrak{r}\frac{-\Delta u}{m} = 0$, also ebenfalls $\Delta \mathfrak{r}\frac{u}{m} = 0$, übereinstimmend mit XI, 3.

Auf gleiche Weise findet man die Aenderung eines außerordentlichen Restes

$$(70) \quad \Delta \mathfrak{R}\frac{u}{m} \equiv \Delta u, \text{ mod } m = \pm \mathfrak{R}\frac{\pm \Delta u}{m}, \text{ nemlich entweder } = \mathfrak{R}\frac{\Delta u}{m}$$

$$\text{oder} = -\mathfrak{R}\frac{-\Delta u}{m} = -\left(m - \mathfrak{r}\frac{\Delta u}{m}\right), \text{ oder } \Delta \mathfrak{R}\frac{u}{m} = \Delta u - m\,\mathfrak{Q}\frac{\Delta u + \mathfrak{R}\frac{u}{m}}{m}.$$

Die Aenderungen der Reste richten sich demnach blos nach den Resten der Aenderungen der Dividende; weil man (vermöge XI, 3) Δu durch einen ihrer Reste ersezen kann. Läßt man also den Dividend u nach der natürlichen Reihe der Zahlen wachsen, so müssen seine Reste wenigstens nach je m Gliedern in der nemlichen Ordnung wiederkehren.

8. Erforscht man die gleichzeitigen Aenderungen des Quotus und Restes, wenn der Dividend u um Δu sich verändert; so hat man, wegen der Gleichung

$$u = m\,\not{q}\frac{u}{m} + \not{r}\frac{u}{m} = m\,\not{Q}\frac{u}{m} + \not{R}\frac{u}{m}$$

(nach dem 1. und 3. Saze) die Aenderung

$$\Delta u = m\,\Delta\not{q}\frac{u}{m} + \Delta\not{r}\frac{u}{m} = m\,\Delta\not{Q}\frac{u}{m} + \Delta\not{R}\frac{u}{m}.$$

Vermöge VI, Anmerkung 2 sind die gewöhnlichen und außerordentlichen Theilungsergebnisse, also auch ihre Aenderungen, gleich, wenn weder u noch Δu durch m theilbar sind, und die Aenderungen sind allein gleich, wenn Δu durch m theilbar ist. Nur wenn u theilbar und Δu untheilbar ist, hat man

$$\Delta\not{r}\frac{u}{m} = \not{r}\frac{u+\Delta u}{m} - \not{r}\frac{u}{m} = \not{r}\frac{\Delta u}{m}, \text{ dagegen}$$

$$\Delta\not{R}\frac{u}{m} = \not{R}\frac{u+\Delta u}{m} - \not{R}\frac{u}{m} = \not{R}\frac{\Delta u}{m} - m = -\not{r}\frac{-\Delta u}{m},$$

$$\text{also } \Delta\not{R}\frac{u}{m} = \Delta\not{r}\frac{u}{m} - m, \text{ und } \Delta\not{Q}\frac{u}{m} = \Delta\not{q}\frac{u}{m} + 1.$$

Somit genügt es, nur die Gleichung

$$\Delta u = m\,\Delta\not{q}\frac{u}{m} + \Delta\not{r}\frac{u}{m}$$

zu untersuchen.

Aus ihr findet man sogleich vermöge Gleichung (23)

$$(71)\qquad \Delta\not{q}\frac{u}{m} = \pm\not{q}\frac{\pm\Delta u}{m}, \qquad \Delta\not{r}\frac{u}{m} = \pm\not{r}\frac{\pm\Delta u}{m},$$

also, wenn der Rest wachsen soll,

$$(72)\qquad \Delta\not{q}\frac{u}{m} = \not{q}\frac{\Delta u}{m} = -\left(\not{Q}\frac{-\Delta u}{m} + 1\right), \qquad \Delta\not{r}\frac{u}{m} = \not{r}\frac{\Delta u}{m},$$

dagegen, wenn der Rest abnehmen soll,

$$(73)\qquad \Delta\not{q}\frac{u}{m} = -\not{q}\frac{-\Delta u}{m} = \not{Q}\frac{\Delta u}{m} + 1, \qquad \Delta\not{r}\frac{u}{m} = -\not{r}\frac{-\Delta u}{m}.$$

XVII.

Verschiedentliches Zählen der Glieder einer Reihe.

I. Fortlaufendes Zählen. Die Glieder einer Reihe zählt man gewöhnlich von einem gewissen, gewählten oder sonst wie festgesezten Gliede ausgehend, in einer bestimmten Richtung nach der natürlichen Reihe der Ordnungszahlen fortschreitend oder fortlaufend, indem man, wie sonst üblich, jenes Glied das erste, das folgende das zweite, und die weiteren der Ordnung nach das dritte, vierte, u. s. f. nennt. Die bei einer fortlaufenden Zählung auf ein Glied treffende Ordnungszahl pflegt man im gewöhnlichen Sprachgebrauche die Nummer oder Zahl, in der Combinationslehre den Stellenzeiger (index) des Gliedes zu nennen.

Man ist jedoch auch sehr oft veranlaßt, die vor jenem hervorgehobenen ersten Gliede befindlichen Glieder der Reihe nach entgegengesezter Richtung, also nicht mehr wie früher, fortschreitend, sondern rückschreitend zu zählen. Dann zählt man diese vorausgehenden Glieder gewöhnlich eben=

falls nach der natürlichen Reihe der Ordnungszahlen fortlaufend als das erste, zweite, dritte, vierte, u. s. f. vor jenem ausgezeichneten. Allein, wollte man hier die Stellenzeiger der vorausgehenden Glieder, wegen des Gegensazes der Richtung des Zählens, jenen ursprünglich angenommenen, positiven Stellenzeigern der nachfolgenden Glieder entgegensezen, folglich negativ in Rechnung bringen; so würden sämmtliche Stellenzeiger die Reihe

$$\ldots - 4, - 3, - 2, - 1;\ + 1, + 2, + 3, + 4, \ldots$$

bilden; in welcher jedoch bei den beiden benachbarten Gliedern -1 und $+1$, bei dem Uebergange vom Negativen zum Positiven, das sonst überall in der Reihe herrschende Gesez, »daß jedes folgende Glied aus dem vorhergehenden erhalten wird, indem man diesem $+1$ zugibt,» unterbrochen wird, und welchem Geseze gemäß zwischen jenen zwei Gliedern die Null fehlt.

2. Algebraisches Zählen. Demnach erheischt die Lehre von dem algebraischen Gegensaze der Größen, daß man bei dem vor- und rückschreitenden algebraischen Zählen der Glieder einer Reihe irgend ein Glied, als das Ausgangs- oder Anfangsglied, sowohl von den nachfolgenden, als von den vorausgehenden Gliedern unterscheide, und ihm die Nummer 0 beilege, — weßwegen man es auch das nullte nennen mag —; dann den ihm folgenden Gliedern der Ordnung nach die positiven Nummern 1, 2, 3, 4, ... den vor ihm hergehenden Gliedern dagegen die negativen Nummern $-1, -2, -3, -4, \ldots$ zuweise; so daß sämmtliche Nummern in der stetigen natürlichen Reihe der positiven und negativen Zahlen

$$\ldots - 4, - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

auf einander folgen.

Vergleicht man obiges gewöhnliche und dieses algebraische rückschreitende Zählen der Glieder vor dem hervorgehobenen ersten Gliede; so ersieht man, daß das 1ste, 2te, 3te, ... n^{te}, $n+1^{te}$, ... Glied vor jenem ausgezeichneten ersten Gliede,

das 0te, -1te, -2te, ... $-(n-1)^{te}$, $-n^{te}$, ... Glied

der Reihe ist; wornach man also hier immer um eins weniger als dort zählt.

Bei der algebraischen Zählung der Glieder einer Reihe gibt der Zahlwerth der Nummer jedes Gliedes zu erkennen, wie weit dieses Glied von dem Anfangsgliede (dem nullten) absteht; ihr Vorzeichen, + und —, aber, ob dasselbe dem Anfangsgliede nachfolgt oder vorgeht; mithin die algebraische Nummer selbst, das wie vielte jenes Glied nach oder vor dem Anfangsgliede in der Reihe ist.

Ueberhaupt, wenn man von dem Stellenzeiger n eines Gliedes A einer Reihe den Stellenzeiger p eines anderen Gliedes B abzieht; so gibt der Unterschied der Stellenzeiger $n - p$ den Abstand des ersteren Gliedes A hinter

dem lezteren B, oder er läßt erkennen, das wie vielte jenes Glied A hinter diesem B ist, nemlich wenn der Unterschied positiv ausfällt, daß jenes wirklich hinter, dagegen wenn er negativ ausfällt, daß es nicht hinter, sondern im Gegentheil vor dem anderen stehe. So ist z. B. das 60ste Glied einer Reihe nach dem 17ten das $60 - 17 = 43^{ste}$, und hinter dem -17ten das $60 - (-17) = 60 + 17 = 77^{ste}$; dagegen ist es hinter dem 80sten das $60 - 80 = -20^{ste}$, d. h. es ist das 20ste vor dem 80sten.

3. Vergleichung fortlaufender Zählweisen. Sehr oft zählt man die Glieder derselben Reihe zwar nach einerlei Richtung und algebraisch, aber von verschiedenen Anfangsgliedern ausgehend; so daß ein und dasselbe Glied A der Reihe nach der einen Zählung das n^{te} und nach der andern das ν^{te} wird. Soll nun ein anderes Glied B dieser Reihe nach der ersteren Art zu zählen das p^{te}, und nach der zweiten das π^{te} sein; so ist jenes Glied A hinter diesem B das $n - p^{te}$ vermöge der ersten, und

das $\nu - \pi^{te}$ vermöge der zweiten Zählweise;

folglich, da der Abstand derselben zwei Glieder bei jeglicher Zählung sich gleich bleibt,

$$(74) \qquad n - p = \nu - \pi,$$

oder, in wie fern die Nummern der ersten Zählung jenen der zweiten Zählung bei allen Gliedern der Reihe um gleich viel voreilen,

$$(75) \qquad n - \nu = p - \pi.$$

Diese einander gleichgeltenden Gleichungen bahnen den Uebergang von der einen Zählweise zur anderen, da nach ihnen

$$(76) \qquad n = \nu + p - \pi \quad \text{ist.}$$

XVIII.

Fortsezung.

4. Periodisches Zählen. Zuweilen zählt man die Glieder einer Reihe nicht in einem Zuge fort, sondern nachdem man von 1 bis zu einer gewissen Zahl t gezählt hat, wieder von vorn, folglich immer nur in solchen Absäzen von 1 bis t. In so fern man bei dieser Zählung die Glieder der Reihe in Abtheilungen, Gruppen oder Partien von gleich vielen, nemlich t, Gliedern absondert, nennt man eine solche Abtheilung eine Periode, und daher das Zählen selbst periodisch oder wiederkehrend. Dieses Zählen gebraucht man vorzüglich da, wo den gleichvielten Gliedern der Perioden gemeinschaftliche Eigenschaften zukommen, wie bei der Abtheilung der Ziffern einer Zahl in Classen, bei den periodischen Decimal- und Kettenbrüchen, bei den Quadranten in der Geometrie, bei den Stunden des Tages u. dergl.

5. **Vergleichung der wiederkehrenden und fortlaufenden Zählung.** Bei dem wiederkehrenden Zählen hat man demnach, zur Feststellung jedes Gliedes in der Reihe, nicht blos die Glieder in jeder einzelnen Periode, sondern auch diese Perioden selbst der Ordnung nach zu zählen, und daher bei der Angabe der Stelle eines Gliedes anzuführen, in der wie vielten Periode, und das wie vielte Glied in dieser — laufenden — Periode es sei. Ist es nun das p^{te} Glied in der π^{ten} Periode, so sind vor dieser Periode $\pi - 1$ andere Perioden, also weil jede Periode t Glieder enthält, $\pi - 1$ Mal $t = (\pi - 1)\,t$ Glieder; daher ist es in der Reihe selbst das

$$(77) \qquad n = (\pi - 1)\,t + p^{te} \text{ Glied.}$$

Aus dieser Gleichung findet man umgekehrt, weil p die Nummer eines Gliedes in einer Periode vorstellt, daher nie Null, sondern nur $1, 2, 3, \ldots t$ sein kann, durch die außerordentliche Theilung

$$(78) \qquad \pi - 1 = \mathfrak{Q}\frac{n}{t} = \mathfrak{q}\frac{n-1}{t}$$

$$(79) \qquad \pi = \mathfrak{Q}\frac{n}{t} + 1 = -\,\mathfrak{q}\frac{-n}{t}$$

$$(80) \qquad p = \mathfrak{R}\frac{n}{t};$$

nemlich, wenn man nicht fortlaufend, sondern nach $t$gliedrigen Perioden zählen will, so ist das n^{te} Glied der Reihe das $p = \mathfrak{R}\frac{n}{t}^{te}$ Glied hinter der $\pi - 1 = \mathfrak{Q}\frac{n}{t}^{ten}$ Periode oder in der $\pi = \mathfrak{Q}\frac{n}{t} + 1^{ten}$ Periode.

Sehr oft wird aber auch von den Gliedern einer Reihe nur angegeben, die wie vielten Glieder sie in derlei Perioden sind, ohne Rücksicht, in der wie vielten Periode sie stehen. Dann genügt zur Vergleichung der fortlaufenden Zählung mit der periodischen schon allein die Gleichung

$$(80) \qquad p = \mathfrak{R}\frac{n}{t}$$

oder die aus ihr, so wie auch aus der Gleichung (77) folgende Congruenz

$$(81) \qquad p \equiv n, \text{ mod } t,$$

der zu Folge das n^{te} Glied der Reihe mit dem p^{ten} Gliede einer der $t$gliedrigen Perioden übereinkommt.

Ist nun noch bekannt, daß bei derselben fortlaufenden Zählweise das N^{te} Glied der Reihe mit dem P^{ten} Gliede einer eben solchen $t$gliedrigen Periode zusammenfällt, so hat man auch

$$P \equiv N, \text{ mod } t,$$

daher, wenn man diese Congruenz von der vorhergehenden abzieht,

$$(82) \qquad p - P \equiv n - N, \text{ mod } t.$$

Von der Giltigkeit dieser Congruenz kann man sich auch durch folgende Betrachtung überzeugen. Treffen bei fortlaufender Zählung das n^{te} und N^{te}

Glied der Reihe auf das p^{te} und P^{te} Glied von tgliedrigen Perioden; so muß sowohl bei dem $n-p^{ten}$, als bei dem $N-P^{ten}$ Gliede der Reihe eine derartige Periode zu Ende laufen, folglich zwischen beiden Gliedern eine Anzahl voller tgliedrigen Perioden stehen. Der Abstand dieser zwei Glieder von einander, das ist der Unterschied ihrer Stellenzeiger $n-p$ und $N-P$, muß demnach ein Vielfaches von der Anzahl t der Glieder einer jeden Periode, daher nach der Erklärung der congruenten Zahlen in Art. II,

$$(83) \qquad N-P \equiv n-p, \text{ mod } t$$

sein, woraus man sogleich die vorhergehende Congruenz erhält.

Aus diesen beiden gleichgeltenden Congruenzen läßt sich leicht finden, das wie vielte (p^{te}) Glied in einer tgliedrigen Periode das n^{te} Glied der Reihe ist; wenn bekannt ist, daß das N^{te} Glied der Reihe mit dem P^{ten} einer solchen Periode zusammentrifft. Denn man erhält

$$(84) \qquad p \equiv P+n-N, \text{ mod } t,$$

folglich, weil p von 1 bis t reicht,

$$(85) \qquad p = \mathfrak{R}\frac{P+n-N}{t}.$$

Schließt sich mit dem N^{ten} Gliede der Reihe eine Periode, so ist $P=t$, daher

$$(86) \qquad p \equiv n-N, \text{ mod } t$$

$$(87) \qquad p = \mathfrak{R}\frac{n-N}{t}.$$

Dabei ist nicht einmal die Kenntniß der Nummern n und N der einzelnen Glieder der Reihe selbst erforderlich, da es schon hinreicht, nur ihren Abstand $n-N$ von einander zu kennen.

Hebt eine Periode mit dem ersten Gliede der Reihe an, so ist $P=N=1$, daher wie oben (80) $p = \mathfrak{R}\frac{n}{t}$.

XIX.

Auflösung von Congruenzen des ersten Grades.

Die Congruenzen des ersten Grades mit einer unbekannten Zahl sind in der allgemeinen Form

$$(88) \qquad kx \equiv a, \text{ mod } m$$

begriffen, wenn x die zu suchende Zahl vorstellt. Soll man diese unbekannte Zahl x bestimmen, und dadurch die Congruenz auflösen; so bemerke man, daß der Unterschied der zwei congruenten Zahlen kx und a ein Vielfaches, etwa das $y$fache, des Moduls, also

$$(89) \qquad kx+my=a$$

sein muß, wofern auch die Zahl y noch unbestimmt oder unbekannt ist. Diese unbestimmte Gleichung mit zwei Unbekannten x und y gibt auch noch die Congruenz

$$(90) \qquad my \equiv a, \text{ mod } k.$$

Wir werden daher beide Congruenzen (88) und (90) mit einem Male auflösen, sobald wir nur die Gleichung (89) auflösen.

Zu diesem Zwecke theilen wir diese Gleichung durch m und x, wodurch wir

$$\frac{kx+my}{mx} = \frac{k}{m} + \frac{y}{x} = \frac{a}{mx}$$

erhalten. Zugleich bemerken wir, erstens: »daß der Unterschied zweier nach einander folgenden Näherungsbrüche eines Kettenbruches gleich ist ± 1, getheilt durch das Product ihrer Nenner,« und zweitens: »daß die unbestimmte Gleichung des ersten Grades (89) nur dann in ganzen Zahlen auflösbar ist, wenn die Coefficienten, k und m, der Unbekannten, x und y, keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, durch den nicht auch das bekannte Glied a theilbar ist.« (III, 11.)

Sei nun der Bruch $\frac{k}{m}$ echt, also $k < m$, wohin wir es in der gegebenen Congruenz (88), vermöge XI, 3, immer leicht bringen können, wenn wir von dem Coefficienten der Unbekannten x den Modul m, so oft als es angeht, weg werfen; dieser Bruch $\frac{k}{m}$ habe, wenn er in einen Kettenbruch verwandelt wird, keinen dem Zähler k und Nenner m gemeinschaftlichen Theiler, der nicht auch dem bekannten Gliede a zukäme, ferner besitze er n Theilnenner vor dem letzten, also n Näherungswerthe, und sein n^{ter} Näherungswerth sei der Bruch $\frac{\varkappa}{\mu}$. Dann übersteigt der gegebene Bruch $\frac{k}{m}$ seinen letzten Näherungsbruch $\frac{\varkappa}{\mu}$ um den Unterschied

$$\frac{k}{m} - \frac{\varkappa}{\mu} = \frac{k\mu - m\varkappa}{m\mu} = \frac{(-1)^n}{m\mu},$$

welcher positiv oder negativ ausfällt, je nachdem n eine gerade oder ungerade Anzahl ist.

Theilen wir jetzt durch diese Gleichung die vorhergehende, so erhalten wir

$$\frac{kx+my}{k\mu - m\varkappa} = (-1)^n a,$$

daraus ferner $\quad k(x-(-1)^n\mu a) = m(-y-(-1)^n\varkappa a)$

und $\quad \frac{x-(-1)^n\mu a}{-y-(-1)^n\varkappa a} = \frac{m}{k}.$

Sollen aber diese zwei gewöhnlichen Brüche einander gleich sein, so müssen der Zähler und Nenner des einen Gleichvielfache vom Zähler und Nenner des anderen sein; also wenn z den willkürlichen Multiplicator vorstellt,

$$x-(-1)^n\mu a = mz$$
$$-y-(-1)^n\varkappa a = kz;$$

und sofort ergeben sich für die unbestimmte Gleichung (89) oder für die ihr gleichgeltenden Congruenzen (88) und (90) die Auflösungen

$$(91)\qquad x = (-1)^n\mu a + mz$$
$$y = (-1)^{n-1}\varkappa a - kz,$$

oder auch (92) $x \equiv (-1)^n \mu a$, mod m

$y \equiv (-1)^{n-1} \varkappa a$, mod k.

Nehmen wir an, daß in dem besonderen Falle, wo $a = 1$ ist, die Zahlen x und y in ξ und η übergehen, so daß wir eigentlich die Gleichung

(93) $k\xi + m\eta = 1$

oder die Congruenzen

(94) $k\xi \equiv 1$, mod m

$m\eta \equiv 1$, mod k

aufzulösen haben, so finden wir dafür die Auflösungen

(95) $\xi \equiv (-1)^n \mu$, mod m

$\eta \equiv (-1)^{n-1} \varkappa$, mod k.

Multipliciren wir diese mit a, so erhalten wir

$a\xi \equiv (-1)^n \mu a$, mod m

$a\eta \equiv (-1)^{n-1} \varkappa a$, mod k;

daher wegen der Congruenzen (92), vermöge III, 2, die Auflösungen

(96) $x \equiv a\xi$, mod m

$y \equiv a\eta$, mod k,

oder, zu Folge der Gleichungen (91),

(97) $x = a\xi + mz$

$y = a\eta - kz$,

indem man von den Gleichvielfachen der beiden Coefficienten der Unbekannten das eine addirt, das andere abzieht.

Soll demnach eine Congruenz von der Form

(88) $kx \equiv a$, mod m

aufgelöst werden, so wird man vorerst an die Stelle des Coefficienten der Unbekannten und anstatt des bekannten Gliedes einen Rest nach dem Modul, am besten den möglich kleinsten, setzen, und durch die etwa erforderliche Zeichenänderung den Coefficienten der Unbekannten wieder positiv herstellen. Ferner sieht man nach, ob der nunmehrige Coefficient und der Modul einen größten gemeinschaftlichen Theiler besitzen. Ist dies, und kommt dieser Theiler nicht auch noch dem bekannten Gliede zu, so ist die Congruenz unmöglich; kommt er aber auch diesem zu, so wird man alle drei bekannten Zahlen durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler dividiren. Man wird es demnach nur immer mit Congruenzen von der Form (88) zu thun haben, in denen der Coefficient k positiv, kleiner als der Modul und gegen diesen relativ prim ist. Dann wird man zuvörderst die einfachere Congruenz

(98) $k\xi \equiv 1$, mod m auflösen.

Zu diesem Zwecke theilt man m durch k auf dieselbe Weise, als wollte man den echten Bruch $\frac{k}{m}$ in einen Kettenbruch verwandeln, und sucht dessen lezten Näherungsbruch $\frac{x}{\mu}$. Man schreibt nemlich, indem man die gefundenen Quoti oder Theilnenner in umgekehrter Ordnung auffaßt, unter den lezten 1, unter den vorlezten ihn selbst. Aus diesen zwei Zahlen, und so auch aus jeden zwei vor einander hergehenden bereits berechneten, findet man die nächst voran zu stellende, indem man mit dem unmittelbar vorhergehenden Quotus die lezt angeschriebene (vorderste) Zahl multiplicirt und die vorlezt geschriebene hinzu addirt, bis auch der erste Quotus in Rechnung gebracht worden. Dann ist die lezte auf diese Weise berechnete Zahl der Nenner μ, die vorlezt berechnete der Zähler x des gesuchten lezten Näherungsbruches.*) Schreibt man nun unter die dem lezten Quotus untergesezte Zahl 1 das Zeichen +, von da vorwärts schreitend unter die Zahlen der zulezt berechneten Reihe abwechselnd die Zeichen — und +, so erhält man auch noch das angemessene Zeichen oder den Factor $(-1)^n$ für die vorderste Zahl μ, wodurch sie vollständig die geforderte Zahl

$$(99) \qquad \xi \equiv (-1)^n \mu, \text{ mod m} \quad \text{wird.}$$

Multiplicirt man endlich diese noch mit dem bekannten Gliede a, so erhält man die gewünschte Auflösung

$$(100) \qquad x \equiv a\xi, \text{ mod m}$$

oder

$$(101) \qquad x = a\xi + mz.$$

Da man gleichzeitig für den Zähler x das entgegengesezte Zeichen des Nenners μ oder den Factor $(-1)^{n-1}$ erhält, so löst man durch das beschriebene Verfahren eigentlich mit Einem Schlage beide Congruenzen (94) auf, indem man dafür die Auflösungen (95) erhält; und darnach ergeben sich für die allgemeineren Congruenzen (88) und (90) die Auflösungen (96) oder (97).

1. Beispiel. Seien die Congruenzen

$$19\xi \equiv 1, \text{ mod } 28$$

und

$$28\eta \equiv 1, \text{ mod } 19$$

aufzulösen. Hier ist

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & & 2 & & 9 & \\ 28 & : & 19 & : & 9 & : & 1 \\ & 3 & & 2 & & 1 & \\ & + & & - & & + & \\ & \xi & & \eta & & & \end{array}$$

nemlich

$$1.\ 2 + 1 = 3$$

daher

$$\xi \equiv 3, \text{ mod } 28$$

$$\eta \equiv -2, \text{ mod } 19.$$

*) Vergleiche Knar, Anfangsgründe der Arithmetik, §. 231; Vega, Vorles. über Mathematik, 6. Auflage, herausgegeben von Matzka, §. 108, I.

Daraus folgt für $19x \equiv a$, mod 28

und $28y \equiv a$, mod 19

$$x \equiv 3a, \text{ mod } 28 = 3a + 28z$$

$$y \equiv -2a, \text{ mod } 19 = -2a - 19z.$$

2. Beispiel. Ist die Congruenz

$$268\xi \equiv 1, \text{ mod } 601$$

aufzulösen, so hat man

	2		4		8		8			nemlich
601	:	268	:	65	:	8	:	1		4. $8+1 = 33$
	74		33		8		1			2. $33+8 = 74$
	—		+		—		+			

folglich $\xi = -74$.

XX.

Berechnung der Zahlen aus ihren Resten nach angegebenen Theilern.

Die Congruenzen des ersten Grades vermitteln die Lösung folgender wichtigen Aufgabe:

Man soll alle diejenigen Zahlen bestimmen, welche, durch gegebene Zahlen getheilt, gewisse angewiesene Reste lassen;

Oder: Aus den Resten einer Zahl nach angegebenen Theilern soll man ihren Rest nach dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Theiler bestimmen.

Hier muß sogleich vor Allem bemerkt werden, daß, falls nach mehreren Theilern derselbe Rest von einer Zahl bleiben sollte, eben dieser Rest auch, vermöge III, 14, nach dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Theiler entfallen muß; mithin alle jene Theiler sogleich durch ihr kleinstes gemeinschaftliche Vielfache zu ersetzen kommen. Suchen wir nun

1. eine Zahl x, welche durch eine Zahl M, oder durch mehrere andere, deren kleinstes gemeinschaftliche Vielfache M ist, (ohne Rest) theilbar ist, und durch eine zweite Zahl m, welche gegen die erstere M relativ prim ist, getheilt einen Rest r gibt.

Nach der ersten Bedingung muß $x \equiv 0$, mod M, also x irgend ein Vielfaches, etwa das $u$fache, von M, daher $x = Mu$, und nach der anderen $x \equiv r$, mod m sein. Beiden Bedingungen wird entsprochen, wenn $Mu \equiv r$, mod m ist.

Man wird daher, nach Art. XIX, die kleinste Zahl ξ suchen, für welche

(102) $\qquad M\xi \equiv 1$, mod m ist, und

$$u \equiv \xi r, \bmod m \quad \text{oder} \quad u = \xi r + mz$$

sezen, wo z ein willkürlicher Multiplicator ist. Dann hat man die geforderte Zahl x

$$(103) \qquad x = M\xi r + Mm.z$$

oder

$$(104) \qquad x \equiv M\xi r, \bmod Mm,$$

$$\equiv \not{r}\frac{M\xi r}{Mm} \equiv M\,\not{r}\frac{\xi r}{m}$$

und die kleinste positive solche Zahl

$$(105) \qquad x = \not{r}\frac{M\xi r}{Mm} = M\,\not{r}\frac{\xi r}{m}.$$

Z. B. Man bestimme jene Zahlen, die durch 3, 4, 5, 7, oder durch 15 und 28, oder durch 15. 28 = 420 = M theilbar sind, und durch 19 = m getheilt den Rest a = r geben.

Hiefür hat man $420\,\xi \equiv 1, \bmod 19$ oder $2\,\xi \equiv 1, \bmod 19$,

daher

$$\begin{array}{ccccc} & 9 & & 2 & \\ 19 & : & 2 & : & 1 \\ & 9 & & 1 & \\ & - & & + & \end{array}$$

und

$$\xi \equiv -9 \equiv 10, \bmod 19.$$

Daraus folgt demnach $x \equiv 420\,\not{r}\frac{-9a}{19} \equiv 420\,\not{r}\frac{10a}{19}, \bmod 7980.$

Insbesondere wird für

den Rest $a = 1, \quad 2, \quad 3, \ldots$

die Zahl $x \equiv 4200, \; 420, \; 4620, \ldots, \bmod 7980.$

Betrachten wir ferner

2. *den Fall, wo jene Zahlen x zu bestimmen sind, welche durch die Theiler oder Moduln m, m', m'', ..., deren jede zwei unter sich Primzahlen sind, getheilt, die Reste r, r', r'', ... lassen.*

Da läßt sich leicht erkennen, daß die geforderte Zahl x enthalten müsse: erstlich ein Glied, welches durch alle Theiler m, m', m'', ... folglich auch, weil sie paarweise relativ prim sind, d. h. weil keine zwei einen von 1 verschiedenen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, durch ihr Product $mm'm''\ldots = \mu$ theilbar ist, also durch μw ausgedrückt werden kann, wenn w einen willkürlichen Multiplicator vorstellt;

und dann noch so viele und solche Glieder u, u', u'', ..., als wie viel Theiler angegeben sind, und von denen jedes nur durch den gleichvielten Theiler getheilt, den diesem Theiler entsprechenden Rest der Zahl x gibt, durch alle übrigen Theiler aber, also auch durch ihr Product, untheilbar ist.

Man kann demnach sezen

$$(106) \qquad x = \mu w + u + u' + u'' + \ldots.$$

und die Producte der Theiler m, m′, m″, ..., wenn man einen nach dem andern ausläßt, am einfachsten durch die ganzzahligen Quotienten

$$\frac{\mu}{m},\ \frac{\mu}{m'},\ \frac{\mu}{m''},\ \ldots.$$

darstellen. Dann wird man die Glieder u, u′, u″, ... gemäß der über sie ausgesprochenen Bedingungen,

$$u \equiv 0,\ \text{mod}\ \frac{\mu}{m};\ u \equiv r,\ \text{mod}\ m$$

$$u' \equiv 0,\ \text{mod}\ \frac{\mu}{m'};\ u' \equiv r',\ \text{mod}\ m'$$

$$u'' \equiv 0,\ \text{mod}\ \frac{\mu}{m''};\ u'' \equiv r'',\ \text{mod}\ m''$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

bestimmen, indem man vorerst die kleinsten möglichen Zahlen ξ, ξ', ξ'', ... sucht, welche den Congruenzen

$$(107)\qquad \frac{\mu}{m}\,\xi \equiv 1,\ \text{mod}\ m$$

$$\frac{\mu}{m'}\,\xi' \equiv 1,\ \text{mod}\ m'$$

$$\frac{\mu}{m''}\,\xi'' \equiv 1,\ \text{mod}\ m''$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

genügen, und nachher diese Glieder u, u′, u″, ... selbst, als die kleinsten Zahlen, welche die Congruenzen

$$(108)\qquad u \equiv \frac{\mu}{m}\,\xi\, r,\ \text{mod}\ \mu \equiv \frac{\mu}{m} \mp \frac{\xi\, r}{m}$$

$$u' \equiv \frac{\mu}{m'}\,\xi'\, r',\ \text{mod}\ \mu \equiv \frac{\mu}{m'} \mp \frac{\xi'\, r'}{m'}$$

$$u'' \equiv \frac{\mu}{m''}\,\xi''\, r'',\ \text{mod}\ \mu \equiv \frac{\mu}{m''} \mp \frac{\xi''\, r''}{m''}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

befriedigen.

Sofort ist eine solche Zahl, wie man fordert,

$$(106)\qquad x = \mu w + u + u' + u'' + \ldots\quad \text{oder}$$

$$x \equiv u + u' + u'' + \ldots,\ \text{mod}\ \mu$$

$$\equiv \mp \frac{u + u' + u'' + \ldots}{\mu},\ \text{mod}\ \mu.$$

Beispiel. Man suche den allgemeinen Ausdruck der Zahlen, welche der Ordnung nach durch 28, 19, 15 getheilt, die Reste r, r′, r″ lassen.

Hier ist $m = 28$, $m' = 19$, $m'' = 15$

$$\mu = 28.\ 19.\ 15 = 7980,$$

$\frac{\mu}{m} = 19.\ 15 = 285,\quad \frac{\mu}{m'} = 15.\ 28 = 420,\quad \frac{\mu}{m''} = 28.\ 19 = 532.$

daher

$$
\begin{array}{ll|l}
1 \equiv 285\,\xi, & \text{mod } 28 \equiv 5\,\xi & \xi \equiv -11 \\
1 \equiv 420\,\xi', & \text{mod } 19 \equiv 2\,\xi' & \xi' \equiv -\ 9 \\
1 \equiv 532\,\xi'', & \text{mod } 15 \equiv 7\,\xi'' & \xi'' \equiv -\ 2
\end{array}
$$

und (109) $x \equiv 285\ \mathfrak{r}\frac{-11r}{28} + 420\ \mathfrak{r}\frac{-9r'}{19} + 532\ \mathfrak{r}\frac{-2r''}{15}$, mod 7980

oder $x \equiv -(3135\,r + 3780\,r' + 1064\,r'')$

$\equiv 4845\,r + 4200\,r' + 6916\,r''$, mod 7980.

Insbesondere erhält man für die Reste

$r = 10,\ r' = 2,\ r'' = 4$

die Zahl $x \equiv 285\,.\,\mathfrak{r}\frac{-110}{28} + 420\ \mathfrak{r}\frac{-18}{19} + 532\ \mathfrak{r}\frac{-8}{15}$, mod 7980

$\equiv 285\,.\,2 + 420\,.\,1 + 532\,.\,7$

$\equiv 570 + 420 + 3724$, oder

(110) $x \equiv 4714$, mod 7980.

Höchst beachtenswerth ist der **besondere Fall**, wo nur nach zwei Theilern m und m', welche Primzahlen unter sich sind, die Reste r und r' angegeben werden. Da ist $\mu = mm'$, $\frac{\mu}{m} = m'$, $\frac{\mu}{m'} = m$; daher hat man die beiden Congruenzen

(111) $m'\xi \equiv 1$, mod m

$m\xi' \equiv 1$, mod m'

aufzulösen, wobei man das im Art. XIX. (98) bis (101) erörterte Verfahren in Anwendung bringt. Dann findet man

$$u \equiv m'\xi r,\ \text{mod } mm' \equiv m'\ \mathfrak{r}\frac{\xi r}{m}$$

$$u' \equiv m\xi' r',\ \text{mod } mm' \equiv m\ \mathfrak{r}\frac{\xi' r'}{m'},$$

und sofort die verlangte Zahl

(112) $x \equiv m'\xi r + m\xi' r'$, mod mm'

$\equiv m'\mathfrak{r}\frac{\xi r}{m} + m\ \mathfrak{r}\frac{\xi' r'}{m'}$, mod mm'.

Z. B. Der allgemeine Ausdruck der Zahlen, welche durch 28 und 19 getheilt, die Reste r und r' geben, ist aufzustellen. Hier ist m = 28, m' = 19, mm' = 532.

Sucht man nun ξ und ξ' aus $19\,\xi \equiv 1$, mod 28

und $28\,\xi' \equiv 1$, mod 19, so erhält man,

nach XIX. Beisp. 1, $\xi \equiv 3$, $\xi' \equiv -2$, daher wird der geforderte Ausdruck

(113) $x \equiv 19\ \mathfrak{r}\frac{3r}{28} + 28\ \mathfrak{r}\frac{-2r'}{19} \equiv 57r - 56r'$, mod 532.

Mittels dieses einfachen Verfahrens kann man die Zahlen, welche die nach mehreren Theilern angegebenen Reste lassen, bestimmen, oder aus den Resten einer Zahl nach mehreren Theilern ihren Rest nach dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Theiler suchen; indem man zuerst zwei Theiler in Rechnung bringt, dann ihr Product und einen dritten Theiler, hierauf wieder das Product dieser und einen vierten Theiler, u. s. f., bis alle Theiler der Rechnung beigezogen worden sind. Dieser Vorgang ist hauptsächlich dazumal vortheilhaft, wenn die Reste und Theiler in besonderen Zahlen angewiesen werden. Hiebei kürzt man die Rechnung zuweilen namhaft ab, wenn man die Theiler vom größten bis zum kleinsten abwärts vornimmt.

Der allgemeinste Fall endlich ist der, wo manche Theiler oder Moduln gemeinschaftliche Theiler besitzen. Er läßt sich durch folgende Betrachtung auf den vorhergehenden Fall zurückführen.

Nach Art. III, 13 und XI, 4 geben zwei congruente Zahlen auch nach jedem Factor des Moduls gleiche Reste. Ist demnach der Rest der zu suchenden Zahl für einen zusammengesetzten Theiler angegeben, so kann man ihren Rest für einen Factor des Theilers bestimmen, indem man von jenem Reste den kleinsten positiven oder negativen Rest nach diesem Factor nimmt. Zerfällt man nun je den Modul, welcher mit einem anderen einen Theiler gemeinschaftlich hat, in lauter paarweise relativ prime Factoren, (am einfachsten in Potenzen von durchgängig verschiedenen Primzahlen, indem man ihn in lauter einfache oder Primfactoren zerlegt und die gleichen Factoren in eine Potenz zusammenfaßt), und bestimmt man die nach den einzelnen Factoren entfallenden Reste der zu suchenden Zahl: so können, vermöge des zweiten Falles, jene Factoren die gegebenen Moduln und diese Reste die gegebenen Reste ersetzen.

Werden demnach auf die nemliche Weise alle zusammengesetzten Moduln behandelt, welche mit anderen irgend welche Theiler gemeinschaftlich besitzen; und ergeben sich für jeden gemeinschaftlichen Theiler einerlei Reste — was jederzeit eintreten muß, wofern die Aufgabe nicht widersinnig sein soll —; so kann man jene Moduln durch solche ersetzen, welche durchgängig paarweise Primzahlen unter sich sind. Am zweckmäßigsten vollbringt man dieses Geschäft, wenn man vorerst jeden Modul, der ein Theiler eines größeren ist, weg läßt; von den zurückbleibenden jeden, der mit einem oder einigen der übrigen einen Theiler gemein hat, als ein Product von Potenzen lauter verschiedener Primzahlen darstellt; dann aus allen solchen Moduln jede in ihnen als Factor vorfindige Primzahl, in ihrer höchsten Potenz, als Stellvertreter dieser Moduln heraushebt, und dazu die entsprechenden Reste der zu suchenden Zahl bestimmt; endlich noch die übrigen Moduln, welche mit keinem anderen einen Theiler

gemeinschaftlich besizen, sammt den angehörigen Resten hinzunimmt. Zu diesen neuen Reihen der Moduln und Reste sucht man sofort, nach der im zweiten Falle ertheilten Anleitung, die geforderte Zahl.

Beispiel. Sucht man eine Zahl, welche

durch 4, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18 getheilt,

die Reste 1, 5, 5, 2, 3, 8, 4, 5, 3, 13, 11 gibt;

so kann man sogleich die Theiler 4, 6, 8, 9 weg lassen, weil sie in den größeren 8, 18, 16, 18 genau enthalten sind, und ihre Reste aus den Resten der lezteren richtig folgen. Von den übrigen werden 10, 14, 15, 16, 18 in Primfactoren aufgelöst und geben $10 = 2.5$, $14 = 2.7$, $15 = 3.5$, $16 = 2^4$, $18 = 2.3^2$;

daher werden sie durch $2^4 = 16$, $3^2 = 9$, 5, 7 ersezt,

und dazu gehören die Reste 13, 2, 3, 5. Die Moduln 11 und 13 endlich werden, als Primzahlen, daher auch als relativ prim gegen jeden anderen, ganz unverändert beibehalten.

Somit stellt sich die Aufgabe gegenwärtig so, als hätte man blos eine Zahl zu suchen, welche

zu den Theilern 5, 7, 9, 11, 13, 16

die Reste 3, 5, 2, 8, 4, 13 liefert;

wobei demnach der zweite Fall eintritt. Zur leichteren Lösung dieser Aufgabe wird man die möglich

kleinsten Reste −2, −2, 2, −3, 4, −3 einführen:

weil man so, nach III, 14, die Theiler 5 und 7 durch ihr Product 35, dann 11 und 16 durch 176 ersezen kann. Man hat demnach zu

den Theilern 176, 35, 13, 9

die Reste −3, −2, 4, 2.

Bezeichnet man nunmehr die zu suchende Zahl mit x, so muß sein

$$x \equiv -3, \bmod 176 \equiv -2, \bmod 35 \equiv 4, \bmod 13 \equiv 2, \bmod 9.$$

Daraus folgt $x = 173 + 176u$,

sonach

$173 + 176u \equiv -2, \bmod 35$	$u \equiv 0, \bmod 35$	$u = 35.\ 13.\ 9\ w$
$\equiv 4, \bmod 13$	$\equiv 0, \bmod 13$	
$\equiv 2, \bmod 9$	$\equiv 0, \bmod 9$	

und daher $x = 173 + 720720\, w \equiv 173, \bmod 720720.$

Alle geforderten Zahlen bilden demnach eine arithmetische Progression, deren kleinstes positives Glied 173, und Unterschied 720720 ist.

XXI.

Untersuchung der Quoti und Reste linearer Functionen oder arithmetischer Progressionen.

1. Höchst wichtig sind die Quoti und Reste solcher veränderlichen Rechnungsausdrücke oder Functionen y von einer Veränderlichen x und vom ersten Grade, welche in der allgemeinen Form

$$(114) \qquad y = \eta x + \vartheta$$

begriffen sind und gewöhnlich lineare Functionen genannt werden. Theilt man diese Function durch die, so wie η und ϑ, beständige oder von x unabhängige, Zahl μ; so soll ihr, gleichfalls nach x veränderlicher, gewöhnlicher Quotus und Rest mit u und v bezeichnet, folglich

$$(115) \qquad u = q\frac{y}{\mu} = q\frac{\eta x + \vartheta}{\mu}$$

$$(116) \qquad v = r\frac{y}{\mu} = r\frac{\eta x + \vartheta}{\mu}$$

gesezt werden.

In Absicht auf die arithmetische Bedeutung der linearen Function (114) bemerken wir Folgendes. Läßt man die veränderliche Zahl x allmälig in sämmtliche algebraische Anzahlen, nach ihrer natürlichen Folge

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots,$$

übergehen; so bilden die nach und nach hervortretenden Werthe ihrer Function y

$$\ldots, -3\eta + \vartheta, -2\eta + \vartheta, -\eta + \vartheta, \vartheta, \eta + \vartheta, 2\eta + \vartheta, 3\eta + \vartheta, \ldots$$

diejenige arithmetische Progression, deren Gliedern bei fortlaufender algebraischer Zählung die entsprechenden Werthe von x als Stellenzeiger zugehören, so daß ihr nulltes oder Anfangsglied ϑ und der beständige Unterschied η, ihr allgemeines Glied also die Function $y = \eta x + \vartheta$ ist. Demnach müssen die entfallenden Werthe des Quotus u und des Restes v ebenfalls Reihen bilden, deren Glieder auch gewonnen werden, wenn man jene der arithmetischen Progression durch den angenommenen Theiler μ dividirt.

2. Eröffnen wir nun unsere Untersuchungen mit der Betrachtung des Restes (116); so überzeugen wir uns leicht von der Giltigkeit folgenden Satzes:

Wenn τ den größten gemeinschaftlichen Theiler von η und μ vorstellt, so fallen für jede zwei Werthe der Veränderlichen x, welche um $\begin{matrix}\text{ein}\\\text{kein}\end{matrix}$ Vielfaches von $\mu:\tau$, also insbesondere $\begin{matrix}\text{selbst um}\\\text{um weniger als}\end{matrix}$ $\mu:\tau$, von einander sich unterscheiden, die Reste v $\begin{matrix}\text{gleich}\\\text{ungleich}\end{matrix}$ aus.

Denn läßt man x um Δx sich ändern, so ist die Aenderung des Dividendes y, vermöge XVI, 3, 4, 5,

$$(117) \qquad \Delta y = \eta \Delta x$$

daher die Aenderung des Restes v, vermöge (69),

$$(118) \qquad \Delta v \equiv \Delta y \equiv \eta \Delta x, \text{ mod } \mu.$$

Soll nun der Rest v für x und $x + \Delta x$ derselbe werden, folglich seine Differenz Δv keine oder 0 sein; so muß $\eta \Delta x \equiv 0$, mod μ, daher entweder $\eta \equiv 0$, mod μ d. h. η durch μ theilbar, oder wenn τ den größten gemeinschaftlichen Theiler von η und μ bezeichnet, vermöge III, 12, auch $(\mu : \tau)\ \Delta x \equiv 0$, mod $(\eta : \tau)$ sein. Da nun $\eta : \tau$ und $\mu : \tau$ Primzahlen unter sich sind, so hat man, vermöge III, 10, auch $\Delta x \equiv 0$, mod $(\mu : \tau)$; das heißt, der Unterschied Δx muß ein Vielfaches von $\mu : \tau$ sein.

Wäre demnach der Coefficient η ein Vielfaches des Theilers μ, so würde $\Delta v \equiv 0$, mod μ und $v = \mathfrak{r}\frac{\vartheta}{\mu}$ sein; nemlich alle Reste v wären gleich, und böten folglich nichts Bemerkenswerthes zu weiterer Forschung dar. Findet dies jedoch nicht Statt, so können nur solche Reste gleich ausfallen, bei denen der Unterschied Δx der sie bestimmenden Werthe ein Vielfaches von $\mu : \tau$, also wenigstens so groß als $\mu : \tau$, niemals aber kleiner als $\mu : \tau$ oder untheilbar dadurch ist. Sind die Zahlen η und μ Primzahlen unter sich, folglich $\tau = 1$, so werden die Reste nur dann gleich, wenn die Werthe der Veränderlichen um ein Vielfaches von μ sich unterscheiden.

Die Reste v der arithmetischen Progression wiederholen sich demnach periodisch nach je $\mu : \tau$ Gliedern, oder lassen sich auf $\mu : \tau$ Weisen in Perioden von je $\mu : \tau$ unter sich verschiedenen Gliedern abtheilen, deren gleichvielte Glieder gleich sind. Je τ solcher Perioden bilden wieder größere Perioden von je μ Resten. Ist insbesondere η durch μ theilbar, also $\tau = \mu$, so wird $\mu : \tau = 1$, also jeder Rest dem anderen gleich. Sind aber η und μ Primzahlen unter sich, ist also $\tau = 1$, so wird $\mu : \tau = \mu$; folglich wiederkehren die Reste erst nach je μ Gliedern.

8. Wenn die Werthe der Veränderlichen x um Δx sich unterscheiden, weichen nach dem obigen Ausdrucke und vermöge (69) die Reste v um

$$(119) \qquad \Delta v = \pm\, \mathfrak{r}\frac{\pm \eta \Delta x}{\mu} = \pm\, \tau\, \mathfrak{r}\frac{\pm (\eta : \tau) \Delta x}{\mu : \tau}$$

von einander ab. Läßt man insbesondere die Veränderliche x natürlich, d. i. stetig um $1 = \Delta x$, aufsteigen, so wird der Rest v um $\Delta v = \pm\, \mathfrak{r}\frac{\pm \eta}{\mu} = \pm\, \tau\, \mathfrak{r}\frac{\pm (\eta : \tau)}{\mu : \tau}$ sich verändern, nemlich entweder um $\mathfrak{r}\frac{\eta}{\mu} = \tau\, \mathfrak{r}\frac{\eta : \tau}{\mu : \tau}$ wachsen, oder um $\mathfrak{r}\frac{-\eta}{\mu} = \tau\, \mathfrak{r}\frac{-\eta : \tau}{\mu : \tau}$ ab-

nehmen. Zu Folge dieses Sazes kann man die Reihe der Reste v leicht fortsezen, indem man entweder zu jedem schon berechneten Reste $\not{r}\frac{\eta}{\mu} = \tau\, \not{r}\frac{\eta:\tau}{\mu:\tau}$ addirt, und davon, so oft es angeht, μ weg wirft, oder wenn man von jedem schon gefundenen, und falls er zu klein wäre, um μ vergrößerten Reste $\not{r}\frac{-\eta}{\mu} = \tau\, \not{r}\frac{-\eta:\tau}{\mu:\tau}$ abzieht; noch leichter, wenn man entweder da $\not{r}\frac{\eta}{\mu}$ addirt, wo man zur Summe nicht mehr als $\mu - 1$ erhält, oder da wo es angeht, $\not{r}\frac{-\eta}{\mu}$ abzieht.

Z. B. Der Rest $v = \not{r}\frac{7x-6}{19}$, für welchen $\eta = 7$, $\vartheta = -6$, $\mu = 19$ ist, wächst entweder um 7 oder nimmt um $\not{r}\frac{-7}{19} = 12$ ab, und bietet sonach folgende Werthe dar. mod. = 19

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$v =$	13	1	8	15	3	10	17	5	12	0	7	14	2	9	16	4	11	18	6	13.

4. Umgekehrt lassen sich aus den Resten v diejenigen Zahlen oder Stellenzeiger x bestimmen, welche sie hervorbringen. Denn aus der Gleichung (116) findet man

$$\eta x + \vartheta \equiv v, \text{ mod } \mu$$

folglich

$$\eta x \equiv v - \vartheta, \text{ mod } \mu.$$

Haben η und μ zum größten gemeinschaftlichen Theiler τ, so muß ηx, daher, vermöge III, 11, auch $v - \vartheta$ durch τ theilbar oder $v \equiv \vartheta$, mod τ sein. Mithin erhält man, nach III, 12,

$$(120) \qquad (\eta:\tau)\, x \equiv \frac{v-\vartheta}{\tau}, \text{ mod } (\mu:\tau) \text{ oder}$$

$$\equiv -\not{q}\frac{\vartheta}{\tau} + \frac{v - \not{r}\frac{\vartheta}{\tau}}{\tau}, \text{ mod } (\mu:\tau).$$

Sucht man demnach, weil $\eta:\tau$ und $\mu:\tau$ Primzahlen unter sich sind, nach Art. XIX. die möglich kleinste Zahl χ, für welche

$$(121) \qquad (\eta:\tau)\chi \equiv 1, \text{ mod } (\mu:\tau)$$

ist, so erhält man die geforderten Zahlen

$$(122) \qquad x \equiv \chi\frac{v-\vartheta}{\tau} \equiv -\chi\, \not{q}\frac{\vartheta}{\tau} + \chi\frac{v - \not{r}\frac{\vartheta}{\tau}}{\tau}, \text{ mod } (\mu:\tau)$$

von denen man gewöhnlich blos die $\mu:\tau$ kleinsten positiven, entweder von 0 bis $(\mu:\tau) - 1$ oder von 1 bis $\mu:\tau$ nimmt.

Eben so findet man von der Congruenz (120) die Aenderung

$$(\eta:\tau)\, \Delta x \equiv \frac{\Delta v}{\tau}, \text{ mod } (\mu:\tau)$$

sogleich (123) $\Delta x \equiv \chi \frac{\Delta v}{\tau}$, mod $(\mu : \tau)$

$$= \pm \not{r}\frac{\pm\chi(\Delta v : \tau)}{\mu : \tau}.$$

Steigen demnach die Reste v in der natürlichen Folge um $\tau = \Delta v$, so ändern sich die Stellenzeiger x um $\Delta x = \pm \not{r}\frac{\pm \chi}{\mu : \tau}$; nemlich sie wachsen entweder um $\not{r}\frac{\chi}{\mu : \tau}$, oder sie nehmen um $\not{r}\frac{-\chi}{\mu : \tau}$ ab.

Z. B. Kehrt man die Aufgabe im vorigen Beispiele um, so findet man, wegen $\eta = 7$, $\vartheta = -6$, $\mu = 19$, $\tau = 1$, aus der Congruenz $7\chi \equiv 1$, mod 19 die Zahl $\chi = -8$, daher $x \equiv -8v - 48$, mod $19 \equiv -8v + 9$; $\Delta x \equiv 11$ oder -8.

Im Zusammenhange erhält man also, wenn man die Zahlen x entweder um 8 abnehmen oder um 11 wachsen läßt, zu den Resten v die Zahlen x wie folgt: mod. = 19

v =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x ≡	9	1	12	4	15	7	18	10	2	13	5	16	8	19	11	3	14	6	17.

5. Betrachten wir nunmehr den Quotus u, so finden wir, wenn die Veränderliche x um Δx sich ändert, die entsprechende Aenderung des Quotus u, vermöge (66)

$$\Delta u = \Delta \not{q}\frac{y}{\mu} = \not{q}\frac{\Delta y}{\mu} + \not{q}\frac{\not{r}\frac{\Delta y}{\mu} + \not{r}\frac{y}{\mu}}{\mu}.$$

oder, wegen $\Delta y = \eta \Delta x$ und $\not{r}\frac{y}{\mu} = v$,

$$(124) \qquad \Delta u = \not{q}\frac{\eta \Delta x}{\mu} + \not{q}\frac{\not{r}\frac{\eta \Delta x}{\mu} + v}{\mu}$$

oder endlich, wenn wir abkürzend

$$(125) \qquad \not{q}\frac{\not{r}\frac{\eta \Delta x}{\mu} + v}{\mu} = w \quad \text{setzen,}$$

$$(126) \qquad \Delta u = \not{q}\frac{\eta \Delta x}{\mu} + w.$$

Bezeichnet wieder τ den größten gemeinschaftlichen Theiler von η und μ, so ist, vermöge XII, (35),

$$\not{q}\frac{\eta \Delta x}{\mu} = \not{q}\frac{(\eta : \tau)\Delta x}{\mu : \tau}.$$

So oft demnach Δx ein Vielfaches von $\mu : \tau$ ist, wird

$$\not{q}\frac{\eta \Delta x}{\mu} = (\eta : \tau)\frac{\Delta x}{\mu : \tau},$$

zugleich aber auch $w = \text{ꝗ}\frac{v}{\mu} = 0$, weil $v < \mu$; daher ist

$$(127) \qquad \Delta u = (\eta : \tau)\frac{\Delta x}{\mu : \tau} \qquad \text{oder} \quad \frac{\Delta u}{\eta : \tau} = \frac{\Delta x}{\mu : \tau}.$$

Aendert sich demnach die Veränderliche x um ein Vielfaches von $\mu : \tau$; so ändert sich der Quotus u um das Ebensovielfache von $\eta : \tau$. Wäre η ein Vielfaches von μ, also $\tau = \mu$, so würde $\Delta u = (\eta : \mu)\, \Delta x$, daher änderte sich der Quotus u um das Ebensovielfache von Δx. In diesem Falle überginge dieser Quotus selbst in $u = (\eta : \mu)\, x + \text{ꝗ}\frac{\vartheta}{\mu}$, also in eine lineäre Function von x. Sind η und μ Primzahlen unter sich, so ist $\tau = 1$. Um ein Wievielfaches von μ sich demnach die Veränderliche x ändert, um das Ebensovielfache von η ändert sich der Quotus u.

Die der arithmetischen Progression der Dividende $y = \eta\, x + \vartheta$ zugehörige Reihe der Quoti $u = \text{ꝗ}\frac{y}{\mu}$ ändert sich daher nach je $\mu : \tau$ Gliedern um $\eta : \tau$. Sondert man demnach diese Quoti in Perioden von je $\mu : \tau$ Gliedern ab, so geht jede spätere Periode aus der nächst früheren hervor, wenn man zu allen ihren Gliedern $\eta : \tau$ addirt. Ist insbesondere der Coefficient η ein Vielfaches des Theilers μ, so bilden die Quoti eine arithmetische Progression, deren nulltes Glied $\text{ꝗ}\frac{\vartheta}{\mu}$ und Unterschied $\eta : \mu$ ist. Sind η und μ Primzahlen unter sich, so ändern sich die Quoti erst nach je μ Gliedern um η.

Daraus erhellet, daß es schon genüge, die Aenderung des Quotus u nur in dem Bereiche einer Periode von $\mu : \tau$ Gliedern oder bei $\mu : \tau$ nach einander folgenden Quotis zu erforschen, folglich $\Delta x < \mu : \tau$ anzunehmen.

Die Reste $\text{ꞧ}\frac{\eta \Delta x}{\mu}$ und v sind einzeln $< \mu$, also zusammen $< 2\mu$; daher ist, nach Gleichung (125), der Quotus w nur entweder 0 oder 1, folglich vermöge Gleichung (126) die Aenderung des Quotus u

$$(128) \qquad \Delta u = \text{ꝗ}\frac{\eta \Delta x}{\mu} \quad \text{oder} = \text{ꝗ}\frac{\eta \Delta x}{\mu} + 1 = -\text{ꝗ}\frac{-\eta \Delta x}{\mu}.$$

Steigt die Veränderliche x nach der natürlichen Reihe der Zahlen, also stetig um $1 = \Delta x$, so beträgt die Aenderung des Quotus

$$(129) \qquad \Delta u = \text{ꝗ}\frac{\eta}{\mu} \quad \text{oder} = \text{ꝗ}\frac{\eta}{\mu} + 1 = -\text{ꝗ}\frac{-\eta}{\mu}.$$

Ist überdies noch insbesondere η positiv und $< \mu$, so ist $\Delta u = 0$ oder 1; der Quotus u bleibt also entweder derselbe oder nimmt um 1 zu.

6. Besonders wichtig ist es, die **Bedingungen** kennen zu lernen, **unter denen der Quotus w bald 0, bald 1 wird.**

Damit überhaupt die Gleichung (125) bestehe, also $\mathrm{F}\frac{\eta\Delta x}{\mu} + v$ durch μ getheilt den Quotus w gebe, muß

$$\mu w \leqq \mathrm{F}\frac{\eta\Delta x}{\mu} + v < \mu(w+1)$$

also $$\mu w - \mathrm{F}\frac{\eta\Delta x}{\mu} \leqq v < \mu(w+1) - \mathrm{F}\frac{\eta\Delta x}{\mu}$$

sein. Hiemit bringen wir noch in Verbindung, daß der Annahme in (116) zu Folge auch stets

$$0 \leqq v < \mu$$

bleiben muß.

Somit kann der Quotus $w = \mathrm{q}\frac{\mathrm{F}\frac{\eta\Delta x}{\mu} + v}{\mu}$ nur dann 0 sein, wenn

$$(130)\qquad 0 \leqq v < \mu - \mathrm{F}\frac{\eta\Delta x}{\mu} = \mathrm{R}\frac{-\eta\Delta x}{\mu}$$

daher $$(131)\qquad v = \mathrm{F}\frac{\eta x + \vartheta}{\mu} < \mu - \mathrm{F}\frac{\eta\Delta x}{\mu}$$
$$< \mathrm{R}\frac{-\eta\Delta x}{\mu}$$

ist; oder, wofern man die in (130) verglichenen Zahlen von μ abzieht, wenn

$$\mu \geqq \mu - v > \mathrm{F}\frac{\eta\Delta x}{\mu}$$

also $$(132)\qquad \mu - v = \mu - \mathrm{F}\frac{\eta x + \vartheta}{\mu} = \mathrm{R}\frac{-(\eta x + \vartheta)}{\mu} > \mathrm{F}\frac{\eta\Delta x}{\mu}$$ ist.

Die Anzahl n der Werthe von x, bei denen dieses, in einer $(\mu:\tau)$ gliedrigen Periode, für eine gegebene Aenderung Δx eintritt, bestimmt sich demnach daraus, daß einerseits, nach Nr. 4, $v \equiv \vartheta$, mod τ, andererseits, vermöge (131), $v < \mathrm{R}\frac{-\eta\Delta x}{\mu}$ sein muß; daher ist

$$(n-1)\tau + \mathrm{F}\frac{\vartheta}{\tau} < \mathrm{R}\frac{-\eta\Delta x}{\mu}$$
$$n\tau < \tau\,\mathrm{R}\frac{-(\eta:\tau)\Delta x}{\mu:\tau} + \tau - \mathrm{F}\frac{\vartheta}{\tau}$$

also $$(133)\qquad n = \mathrm{R}\frac{-(\eta:\tau)\Delta x}{\mu:\tau}.$$

Ueberdies findet man diese Werthe von x selbst, mittels Nr. 4, wenn man

$$v \equiv \vartheta, \text{ mod } \tau \text{ aber } v < \mathrm{R}\frac{-\eta\Delta x}{\mu},$$

mithin $$v = \mathrm{F}\frac{\vartheta}{\tau} + \tau z$$

und darin $$z = 0, 1, 2, \ldots\, n-1$$ setzt.

Man erhält auf diese Weise

$$(134)\qquad x \equiv \chi\left(-\not\mathfrak{q}\frac{\vartheta}{\tau} + z\right),\ \text{mod}\ (\mu:\tau)$$

so wie aus (121)

$$(135)\quad (\eta:\tau)x \equiv -\not\mathfrak{q}\frac{\vartheta}{\tau} + z,\ \text{mod}\ (\mu:\tau).$$

Dagegen kann der Quotus $w = \not\mathfrak{q}\dfrac{\not\mathfrak{r}\frac{\eta\Delta x}{\mu} + v}{\mu}$ nur dann 1 werden,

wenn $$(136)\qquad \mu - \not\mathfrak{r}\frac{\eta\Delta x}{\mu} = \not\mathfrak{R}\frac{-\eta\Delta x}{\mu} \leqq v < \mu$$

daher $$(137)\qquad v = \not\mathfrak{r}\frac{\eta x + \vartheta}{\mu} \geqq \not\mathfrak{R}\frac{-\eta\Delta x}{\mu}$$

ist; oder, wofern man die in (136) verglichenen Zahlen zu μ ergänzt, wenn

$$\not\mathfrak{r}\frac{\eta\Delta x}{\mu} \geqq \mu - v > 0$$

also $$(138)\quad \mu - v = \mu - \not\mathfrak{r}\frac{\eta x + \vartheta}{\mu} = \not\mathfrak{R}\frac{-(\eta x + \vartheta)}{\mu} \leqq \not\mathfrak{r}\frac{\eta\Delta x}{\mu}\ \text{ist.}$$

Die Anzahl n der Werthe von x, bei denen dieses, in einer $(\mu:\tau)$ gliedrigen Periode, für eine gegebene Aenderung Δx eintritt, bestimmt sich demnach daraus, daß einerseits, vermöge (138), $\mu - v \leqq \not\mathfrak{r}\frac{\eta\Delta x}{\mu}$, andererseits, nach Nr. 4, $v \equiv \vartheta$, mod τ also $\mu - v \equiv \not\mathfrak{R}\frac{-\vartheta}{\tau}$, mod τ sein muß; daher ist

$$(n-1)\tau + \not\mathfrak{R}\frac{-\vartheta}{\tau} \leqq \not\mathfrak{r}\frac{\eta\Delta x}{\mu}$$

$$n\tau \leqq \tau\ \not\mathfrak{r}\frac{(\eta:\tau)\Delta x}{\mu:\tau} + \tau - \not\mathfrak{R}\frac{-\vartheta}{\tau}$$

also $$(139)\qquad n = \not\mathfrak{r}\frac{(\eta:\tau)\Delta x}{\mu:\tau}.$$

Ueberdies findet man diese Werthe von x selbst, nach Nr. 4, wenn man

$$v \equiv \vartheta,\ \text{mod}\ \tau\ \text{und}\ v \geqq \not\mathfrak{R}\frac{-\eta\Delta x}{\mu}\cdot$$

oder $$\mu - v \equiv \not\mathfrak{R}\frac{-\vartheta}{\tau},\ \text{mod}\ \tau\ \text{aber} \leqq \not\mathfrak{r}\frac{\eta\Delta x}{\mu},$$

mithin $$\mu - v = \not\mathfrak{R}\frac{-\vartheta}{\tau} + \tau z = \tau(z+1) - \not\mathfrak{r}\frac{\vartheta}{\tau}$$

und darin $$z = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n-1$$

setzt. Man findet auf diesem Wege

$$(140)\qquad x \equiv -\chi\left(\not\mathfrak{q}\frac{\vartheta}{\tau} + z + 1\right),\ \text{mod}\ (\mu:\tau),$$

so wie aus (121)

$$(141)\quad (\eta:\tau)\,x \equiv -\not\mathfrak{q}\frac{\vartheta}{\tau} - (z+1),\ \text{mod}\ (\mu:\tau).$$

Wächst die Veränderliche x nach der natürlichen Folge der Zahlen, also stetig um $1 = \Delta x$, so ist $w = 0$, so oft $v = \mathfrak{r}\frac{\eta x + \vartheta}{\mu} < \mathfrak{R}\frac{-\eta}{\mu}$, oder $< \mu - \mathfrak{r}\frac{\eta}{\mu}$; dagegen $w = 1$, wenn $v = \mathfrak{r}\frac{\eta x + \vartheta}{\mu} \overline{\overline{>}} \mathfrak{R}\frac{-\eta}{\mu}$ oder $\overline{\overline{>}} \mu - \mathfrak{r}\frac{\eta}{\mu}$.

7. Endlich findet man noch die gleichzeitigen Aenderungen des Quotus u und Restes v nach Art. XVI, 8 und XXI, 1, 2.

$$\Delta u = \Delta \mathfrak{q}\frac{y}{\mu} = \pm\,\mathfrak{q}\frac{\pm\Delta y}{\mu} = \pm\,\mathfrak{q}\frac{\pm\eta\,\Delta x}{\mu} = \pm\,\mathfrak{q}\frac{\pm(\eta:\tau)\,\Delta x}{\mu:\tau} \tag{142}$$

$$\Delta v = \Delta \mathfrak{r}\frac{y}{\mu} = \pm\,\mathfrak{r}\frac{\pm\Delta y}{\mu} = \pm\,\mathfrak{r}\frac{\pm\eta\,\Delta x}{\mu} = \pm\tau\,\mathfrak{r}\frac{\pm(\eta:\tau)\,\Delta x}{\mu:\tau}$$

So oft demnach der Rest v um $\mathfrak{r}\frac{\eta\Delta x}{\mu} = \tau\,\mathfrak{r}\frac{(\eta:\tau)\Delta x}{\mu:\tau}$ wächst, muß der Quotus u um $\mathfrak{q}\frac{\eta\Delta x}{\mu} = \mathfrak{q}\frac{(\eta:\tau)\Delta x}{\mu:\tau}$, je nachdem dieser Werth positiv oder negativ ausfällt, wachsen oder abnehmen;

so oft dagegen der Rest v um $\mathfrak{r}\frac{-\eta\Delta x}{\mu} = \tau\,\mathfrak{r}\frac{(-\eta:\tau)\Delta x}{\mu:\tau}$ abnimmt, muß der Quotus u um $-\mathfrak{q}\frac{-\eta\Delta x}{\mu} = -\mathfrak{q}\frac{(-\eta:\tau)\Delta x}{\mu:\tau}$, je nachdem dieser Werth positiv oder negativ ausfällt, wachsen oder abnehmen.

Beispiel. 1. Wählt man die lineäre Function $y = 45x - 25$ und theilt sie durch 19, so hat man $\eta = 45$, $\vartheta = -25$, $\mu = 19$, $\tau = 1$, $\mathfrak{r}\frac{\eta}{\mu} = 7$, $-\mathfrak{r}\frac{-\eta}{\mu} = -12$, $\chi = -8$, $\mathfrak{q}\frac{\eta}{\mu} = 2$, $-\mathfrak{q}\frac{-\eta}{\mu} = 3$, $\mathfrak{R}\frac{-\eta}{\mu} = 12$; daher findet man folgende zusammen gehörige Werthe von x, y, u, Δu, v, Δv:

x =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y =	−25	20	65	110	155	200	245	290	335	380	425	470	515	560	605	650	695	740	785	830
u =	−2	1	3	5	8	10	12	15	17	20	22	24	27	29	31	34	36	38	41	43
Δu =	3	2	2	3	2	2	3	2	3	2	2	3	2	2	3	2	2	3	2	
v =	13	1	8	15	3	10	17	5	12	0	7	14	2	9	16	4	11	18	6	13
Δv =	−12	7	7	−12	7	7	−12	7	−12	7	7	−12	7	7	−12	7	7	−12	7	

Die Anzahl der Reste $v < \mathfrak{R}\frac{-\eta}{\mu} = 12$ ist $= \mathfrak{R}\frac{-45}{19} = 12$, und die Anzahl der Reste $v \overline{\overline{>}} \mathfrak{R}\frac{-\eta}{\mu} = 12$ ist $= \mathfrak{r}\frac{45}{19} = 7$.

Beispiel. 2. Theilt man die Function $y = 72x + 67$ durch 28, so ist $\eta = 72$, $\vartheta = 67$, $\mu = 28$, $\tau = 4$, $\mathfrak{r}\frac{\eta}{\mu} = 16$, $-\mathfrak{r}\frac{-\eta}{\mu} = -12$, $\mathfrak{R}\frac{-\eta}{\mu} = 12$, $\chi = 2$, $\mathfrak{q}\frac{\eta}{\mu} = 2$, $-\mathfrak{q}\frac{-\eta}{\mu} = 3$; daher ergeben sich folgende zusammen gehörige Werthe von x, y, u, Δu, v, Δv:

$x=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$y=$	67	139	211	283	355	427	499	571	643	715	787	859	931	1003
$u=$	2	4	7	10	12	15	17	20	22	25	28	30	33	35
$\Delta u=$	2	3	3	2	3	2	3	2	3	3	2	3	2	
$v=$	11	27	15	3	19	7	23	11	27	15	3	19	7	23
$\Delta v=$	16	−12	−12	16	−12	16	−12	16	−12	−12	16	−12	16	

Die Anzahl der Reste $v < \mathfrak{R}\frac{-\eta}{\mu} = 12$ oder der Stellen, wo der Quotus w Null wird, ist $= \mathfrak{R}\frac{-18}{7} = 3$, namentlich ist $z = 0, 1, 2$, daher $v = 3 + 4z = 3, 7, 11$ und $x \equiv 2z + 3, \bmod 7 \equiv 3, 5, 0$; dagegen die Anzahl der Reste $v \overline{\overline{>}} \mathfrak{R}\frac{-\eta}{\mu} = 12$ ist $= \mathfrak{R}\frac{18}{7} = 4$, namentlich ist $z = 0, 1, 2, 3$, daher $\mu - v = 4z + 1 = 1, 5, 9, 13$, also $v = 27, 23, 19, 15$, und $x \equiv -2z + 1, \bmod 7 \equiv 1, 6, 4, 2$.

XXII.

Aufstellung einiger Functionen einer Veränderlichen aus vorgezeichneten Eigenschaften.

Gestützt auf die Ergebnisse der so eben durchgeführten Untersuchung der Quoti und Reste linearer Functionen einer Veränderlichen durch einen beständigen Theiler, sind wir nunmehr im Stande, einige Functionen — für unseren Bedarf eigentlich blos Quoti — dergestalt zu bestimmen, daß sie gewissen vorgeschriebenen Bedingungen genügen.

1. Zuweilen verlangt man eine Function dermaßen aufzustellen, daß, während die Veränderliche von 0 oder 1 an bis zu einer gewissen Zahl g aufsteigt, die Function stets 0 bleibt, dagegen für die höheren Werthe der Veränderlichen bis zum Werthe h durchgängig 1 wird;

Oder: Man fordert eine Reihe, deren Glieder vom 0ten oder 1sten bis zum g^{ten} Null, von da aber bis zum h^{ten} 1 sind.

Eine solche Function kann, vermöge XXI, 5, ein Quotus einer linearen Function $y = \eta x + \vartheta$, also

$$(115) \qquad u = \mathfrak{q}\frac{\eta x + \vartheta}{\mu}$$

sein, in welchem die Constanten η, ϑ, μ den ausgesprochenen Bedingungen gemäß zu bestimmen sind.

Soll nun erstlich schon für $x = 0$, auch $u = 0$ sein, so hat man $\mathfrak{q}\frac{\vartheta}{\mu} = 0$, also $0 \overline{\overline{<}} \vartheta < \mu$. Sollte aber erst von $x = 1$ an $u = 0$ werden, so ist $\mathfrak{q}\frac{\eta + \vartheta}{\mu} = 0$, also $0 \overline{\overline{<}} \vartheta + \eta < \mu$.

Damit nun, so lange $x \overline{\gtrless} g$ ist, stets $u = 0$ bleibe, dagegen, sobald $x = g + 1$ wird, sogleich $u = 1$ ausfalle, muß

$$0 \overline{\gtrless} \eta + \vartheta < 2\eta + \vartheta < 3\eta + \vartheta < \ldots\ldots < g\eta + \vartheta < \mu \overline{\gtrless} (g+1)\eta + \vartheta$$

sein. Daraus folgt sogleich $\eta > 0$, nemlich der Coefficient η muß positiv angenommen werden; und man kann setzen

$$(143) \qquad \mu = g\eta + \vartheta + \varphi,$$

wofern $\quad (144) \qquad \varphi = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ \eta$ gedacht wird.

Soll aber endlich selbst für $x = h > g$ der Quotus u noch immer 1 bleiben, also noch nicht 2 erreichen, so muß

$$h\eta + \vartheta < 2\mu$$

sein. Ersetzt man in dieser Vergleichung μ durch obigen Ausdruck, so erhält man

$$\vartheta > (h - 2g)\,\eta - 2\varphi.$$

Man kann demnach, indem man $\omega \overline{\gtrless} 1$ voraussetzt,

$$(145) \qquad \vartheta = (h - 2g)\,\eta - 2\varphi + \omega = h\eta + \omega - 2\,(g\eta + \varphi)$$

daher nach der Gleichung (143)

$$(146) \qquad \mu = (h - g)\,\eta - \varphi + \omega = h\eta + \omega - (g\eta + \varphi)$$

annehmen.

Am einfachsten ist es, für φ und ω Vielfache von η zu wählen, oder, weil dann der Factor η aus dem Dividend und Theiler weg fällt, blos $\eta = 1$ zu setzen. Dann muß auch $\varphi = 1$ sein, und man erhält

$$(147) \qquad u = \text{ꝗ}\frac{x+\vartheta}{\mu}$$

$$(148) \qquad \vartheta = h - 2g - 2 + \omega$$

$$\mu = h - g - 1 + \omega.$$

Z. B. Man soll die Function u so bestimmen, daß sie von $x = 0$ bis $x = 5$ Null bleibe, dagegen von da an bis $x = 13$ stets 1 werde.

Hier ist $g = 5$, $h = 13$, $h - g = 8$, $h - 2g = 3$.

Wählt man nun $\eta = 1$, d. i. so klein als möglich, so ist $\vartheta = 1 + \omega$ und $\mu = 7 + \omega$, daher $u = \text{ꝗ}\frac{x+1+\omega}{7+\omega}$. Nimmt man $\omega = 1$, auch so klein als möglich, so ist möglichst einfach $u = \text{ꝗ}\frac{x+2}{8}$.

Setzt man dagegen $\eta = 3$, so wird $\vartheta = 9 - 2\varphi + \omega$, $\mu = 24 - \varphi + \omega$; daher, für $\varphi = 2$ und $\omega = 1$, $\vartheta = 6$, $\mu = 23$ und $u = \text{ꝗ}\frac{3(x+2)}{23}$.

Ist h nicht festgesetzt, darf aber die Veränderliche x einen gewissen unter $2(g + 1)$ liegenden Werth nicht übersteigen, so mag man

$$h = 2(g + 1) - 1 = 2g + 1$$

sezen; dann ergibt sich für $\eta = 1$, $\vartheta = \omega - 1$, $\mu = g + \omega$, und

$$(149) \qquad u = q\frac{x+\omega-1}{g+\omega} = q\frac{x+\vartheta}{g+1+\vartheta}$$

worin $\omega \geqq 1$ oder $\vartheta \geqq 0$ gedacht wird.

2. Man kann die Forderung dahin abändern, daß die zu bestimmende Function bei dem Werthe g der Veränderlichen bereits auf 1 sich erhebe, daher nur bis zum nächst vorhergehenden Werthe $g - 1$ Null bleibe.

Dann heißt $g - 1$ das, was früher g genannt wurde, folglich hat man in den Gleichungen (145), (146), (148) und (149) nur g in $g - 1$ zu verwandeln. Dadurch erhält man

$$(150) \qquad \begin{aligned} \vartheta &= (h - 2g + 2)\eta - 2\varphi + \omega \\ \mu &= (h - g + 1)\eta - \varphi + \omega \end{aligned}$$

und für $\eta = 1$, $\varphi = 1$

$$(151) \qquad \begin{aligned} \vartheta &= h - 2g + \omega \\ \mu &= h - g + \omega. \end{aligned}$$

Kann die Veränderliche x einen gewissen größten unter $2g$ liegenden Werth nicht übersteigen, so mag man

$$(152) \qquad h = 2g - 1$$

sezen, dann wird $\vartheta = \omega - 1$, $\mu = g + \omega - 1$ und

$$(153) \qquad u = q\frac{x+\omega-1}{g+\omega-1} = q\frac{x+\vartheta}{g+\vartheta},$$

wofern man $\omega \geqq 1$ oder $\vartheta \geqq 0$ annimmt. Am einfachsten nimmt man $\vartheta = 0$,

daher $$(154) \qquad u = q\frac{x}{g}.$$

3. Sehr oft werden in den folgenden Untersuchungen Reihen nöthig werden, in denen das erste Glied 0 ist, deren spätere Glieder nur allmälig, nemlich an gewissen periodisch vertheilten Stellen, um 1 steigen, daher jede folgende Periode die nächst vorhergehende durchgängig um die Anzahl der in jeder Periode bestehenden Steigungen übertrifft, und deren allgemeines Glied sonach die Anzahl aller solchen ausnahmsweisen Steigungen angibt und daher die eigens aufzustellende Function des Stellenzeigers ist. Dabei muß zugleich die Aenderung dieser Function, bei dem natürlichen Steigen der Veränderlichen, als eine andere Function sich ergeben, die blos für gewisse Ausnahmswerthe der Veränderlichen gleich 1 wird, sonst immer 0 bleibt; und eigentlich das allgemeine Glied der Reihe der Unterschiede der vorigen Reihe ist, oder den Betrag der an jeder Stelle Statt findenden Steigung angibt.

Blicken wir zurück auf die Ergebnisse unserer Untersuchungen in **XXI**, 5, so überzeugen wir uns leicht, daß das allgemeine Glied der aufzustellenden Reihe oder die zu bestimmende nach dem Stellenzeiger x veränderliche Function u ein Quotus einer linearen Function von der Gestalt

$$(115) \qquad u = \mathfrak{q}\frac{\eta x + \vartheta}{\mu}$$

sein müsse, deren Constanten η, ϑ, μ den vorgezeichneten Bedingungen gemäß zu bestimmen sind.

Soll nach je ϖ Gliedern der Reihe die Folge der Steigungen regelmäßig wiederkehren und zwischen η und μ der größte gemeinschaftliche Theiler τ bestehen, so muß, vermöge **XXI**, 2, für den zu suchenden Theiler μ

$$(155) \qquad \mu:\tau = \varpi, \text{ also } \mu = \varpi\tau$$

sein. Sollen ferner bei je ϖ nach einander folgenden Gliedern der Reihe ε Steigungen oder Ausnahmen, mithin $\varpi - \varepsilon$ mal das Gleichbleiben oder die Regel eintreten, so muß, weil hier immer $\Delta x = 1$ vorausgesezt wird, vermöge (133) und (139)

$$\varpi - \varepsilon = \mathfrak{R}\frac{-(\eta:\tau)}{\mu:\tau} = \varpi - \mathfrak{r}\frac{\eta:\tau}{\varpi}, \qquad \varepsilon = \mathfrak{r}\frac{\eta:\tau}{\mu:\tau} = \mathfrak{r}\frac{\eta:\tau}{\varpi}$$

also $(156) \qquad \eta:\tau \equiv \varepsilon, \bmod \varpi, \quad \eta:\tau = \varepsilon + \varpi z, \quad \eta = \varepsilon\tau + \mu z$

sein. Die Werthe des Quotus u sollen ferner der Reihe nach (d. i. für $\Delta x = 1$) nur um 0 oder 1 steigen, also soll vermöge **XXI**, 5, ihre Aenderung $\Delta u = \mathfrak{q}\frac{\eta}{\mu} + w = 0$ oder 1 werden; daher muß $\mathfrak{q}\frac{\eta}{\mu} = 0$ und vermöge (125)

$$(157) \qquad \Delta u = w = \mathfrak{q}\frac{\eta + v}{\mu} = 0, 1$$

sein, wenn, wie in **XXI**, der Rest

$$(116) \qquad \mathfrak{r}\frac{\eta x + \vartheta}{\mu} = v \text{ angedeutet wird.}$$

Weil nun nach den gestellten Bedingungen immer $\varepsilon < \varpi$, also $\varepsilon\tau < \varpi\tau = \mu$ sein muß, so ist $z = \mathfrak{q}\frac{\eta}{\mu}$ daher $z = 0$ und der zu suchende Coefficient

$$(158) \qquad \eta = \varepsilon\tau < \mu.$$

Zugleich sind $\varepsilon = \eta:\tau$ und $\varpi = \mu:\tau$ Primzahlen unter sich, weil τ den größten gemeinschaftlichen Theiler von η und μ vorstellt.

K e n n z e i c h e n, d a ß d e r Q u o t u s u, von einer Stelle x zur nächst höheren x + 1, s i c h g l e i c h b l e i b e, sind demnach, vermöge **XXI**, 6, entweder, daß die Aenderung desselben

$$(159) \qquad \Delta u = w = \mathfrak{q}\frac{\eta + v}{\mu} = \mathfrak{q}\frac{\eta + \mathfrak{r}\frac{\eta x + \vartheta}{\mu}}{\mu} = 0,$$

oder daß der Rest

(160) $$v = \mathfrak{r}\frac{\eta x + \vartheta}{\mu} < \mu - \mathfrak{r}\frac{\eta}{\mu} \text{ oder } < \mathfrak{R}\frac{-\eta}{\mu}$$

oder daß der Rest

(161) $$\mu - v = \mathfrak{R}\frac{-(\eta x + \vartheta)}{\mu} > \mathfrak{r}\frac{\eta}{\mu}$$

sei; oder daß, wenn man den bald häufig vorkommenden Quotus $\mathfrak{q}\frac{\vartheta}{\varepsilon}$ der Kürze halber durch δ bezeichnet, die Congruenz

(162) $$\varepsilon x + \delta \equiv z, \text{ mod } \varpi$$

Statt finde und darin

(163) $$z = 0, 1, 2, \ldots\ldots \varpi - \varepsilon - 1$$

sei, oder daß, wofern χ aus

(164) $$\varepsilon\chi \equiv 1, \text{ mod } \varpi$$

bestimmt wird, nemlich das χfache von ε, durch ϖ getheilt, 1 zum Reste gibt, die Congruenz

(165) $$x \equiv \chi(-\delta + z), \text{ mod } \varpi$$ bestehe.

Kennzeichen dagegen, daß der Quotus u, von einer Stelle x zur anderen $x + 1$, um 1 wachse, sind vermöge XXI, 6, entweder, daß die Aenderung desselben

(166) $$\Delta u = w = \mathfrak{q}\frac{\eta + v}{\mu} = \mathfrak{q}\frac{\eta + \mathfrak{r}\frac{\eta x + \vartheta}{\mu}}{\mu} = 1,$$

oder daß der Rest

(167) $$v = \mathfrak{r}\frac{\eta x + \vartheta}{\mu} \geqq \mu - \mathfrak{r}\frac{\eta}{\mu} \text{ oder } \geqq \mathfrak{R}\frac{-\eta}{\mu}$$

oder daß der Rest

(168) $$\mu - v = \mathfrak{R}\frac{-(\eta x + \vartheta)}{\mu} \leqq \mathfrak{r}\frac{\eta}{\mu}$$

sei; oder daß die Congruenz

(169) $$\varepsilon x + \delta \equiv -(z + 1), \text{ mod } \varpi$$

Statt finde und darin

(170) $$z = 0, 1, 2, \ldots\ldots \varepsilon - 1$$

sei, oder daß, wofern χ aus

(164) $$\varepsilon\chi \equiv 1, \text{ mod } \varpi$$

bestimmt wird, die Congruenz

(171) $$x \equiv -\chi(\delta + z + 1), \text{ mod } \varpi$$ bestehe.

Seien nun in jeder ϖstelligen Periode die ausgezeichneten Stellenzeiger, oder die kleinsten positiven Reste jener Stellenzeiger oder derjenigen Ausnahmswerthe der Veränderlichen x nach dem Theiler oder Modul ϖ, bei denen der Quotus u um 1 wächst, gegeben. Man bezeichne sie mit dem gemeinschaftlichen

Zeichen ξ, denjenigen Stellenzeiger, welcher der in (169) vorkommenden durchlaufenden Zahl z entspricht, mit ξ_z, und so wie sie den in (170) angeführten Werthen dieser Zahl entsprechen, mit

$$(172) \qquad \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{\varepsilon-1}.$$

Sezt man demnach in der Congruenz (169), welche die Steigungen der Quoti charakterisirt, für z nach und nach ihre zulässigen Werthe aus (170), so gewinnt man folgende, die Bestimmung des Quotus $q\frac{\vartheta}{\tau} = \delta$ vermittelnden, Congruenzen

$$(173) \qquad \begin{aligned} \delta + \varepsilon\xi_0 &\equiv -1, \text{ mod } \varpi \\ \delta + \varepsilon\xi_1 &\equiv -2 \\ \delta + \varepsilon\xi_2 &\equiv -3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta + \varepsilon\xi_{\varepsilon-1} &\equiv -\varepsilon. \end{aligned}$$

In diesen Congruenzen sind aber die Stellenzeiger $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{\varepsilon-1}$ keineswegs einzeln, sondern blos die ihnen insgesammt zukommenden Werthe bekannt; und es läßt sich also von ihnen lediglich nur ihre Summe, oder die Summe gleich hoher Potenzen derselben, oder ihr Product angeben. Um daher die Constante δ zu bestimmen, wird man am einfachsten diese ε Congruenzen addiren, dabei bemerken, daß bekanntlich die Summe

$$(174) \qquad 1 + 2 + 3 + \ldots + \varepsilon = \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{2}$$

ist; und endlich wird man die Summe der ausgezeichneten Stellenzeiger ξ mittels des üblichen Summenzeichens Σ, nemlich

$$(175) \qquad \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 \ldots + \xi_{\varepsilon-1} = \Sigma\xi$$

andeuten. Auf diesem Wege findet man

$$(176) \qquad \varepsilon\delta + \varepsilon\Sigma\xi \equiv -\frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{2} \text{ mod } \varpi.$$

Sei nun erstlich ε ungerad, also $\varepsilon + 1$ gerad, so darf man, vermöge III, 10, die beiden congruenten Zahlen durch ihren gemeinschaftlichen Theiler ε, der gegen den Modul ϖ relativ prim ist, theilen, und erhält

$$(177) \qquad \delta \equiv -\frac{\varepsilon+1}{2} - \Sigma\xi, \text{ mod } \varpi.$$

Ist aber zweitens ε gerad, so wird man χ aus

$$(164) \qquad \varepsilon\chi \equiv 1, \text{ mod } \varpi$$

bestimmen, und damit die Congruenz (176) multipliciren, wornach man

$$(178) \qquad \delta \equiv -\frac{\varepsilon}{2}(\chi+1) - \Sigma\xi, \text{ mod } \varpi \text{ findet.}$$

Ueber die Einschränkungen der Werthe von δ beachte man jedoch Folgendes: Sollen die Steigungen der Quoti vom nullten Quotus, oder von $x = 0$, an gezählt werden, soll also $u = \not{q}\frac{\vartheta}{\tau} = 0$ sein; so muß $0 \leqq \vartheta < \mu$,

daher $\quad 0 \leqq \tau \not{q}\frac{\vartheta}{\tau} + \not{r}\frac{\vartheta}{\tau} < \varpi\tau$ oder $- \not{r}\frac{\vartheta}{\tau} \leqq \tau\delta < (\varpi - 1)\tau + \tau - \not{r}\frac{\vartheta}{\tau}$

also $\qquad$ (179) $\qquad -1 < \delta \leqq \varpi - 1, \ \delta = 0, 1, 2, \ldots \varpi - 1$

angenommen werden. Sind aber die Steigungen der Quoti vom ersten Quotus, oder von $x = 1$, an zu zählen, so daß $\not{q}\frac{\eta + \vartheta}{\mu} = 0$ ausfällt, so muß

$$0 \leqq \eta + \vartheta < \mu \quad \text{oder} \quad 0 \leqq \tau(\delta + \varepsilon) + \not{r}\frac{\vartheta}{\tau} < \varpi\tau, \text{ also}$$

$$(180) \qquad -1 < \delta + \varepsilon \leqq \varpi - 1, \qquad \delta + \varepsilon = 0, 1, 2, \ldots \varpi - 1$$

$$\delta = -\varepsilon, -\varepsilon + 1, \ldots\ldots 0, 1, \ldots\ldots \varpi - \varepsilon - 1 \text{ sein.}$$

Allein auf obige Weise wird der Werth von δ nicht aus den einzelnen ausgezeichneten Stellenzeigern (172), sondern blos aus ihrer Summe (175) bestimmt; er ist folglich auch nur wahrscheinlich richtig, und daher noch weiter zu prüfen. Zu diesem Zwecke kann man die Congruenzen (173) zu gleich hohen Potenzen erheben und addiren. Wählt man, als die möglich niedrigste, die zweite Potenz, sezt man dabei nebst (175) auch noch die leicht zu bestimmende Summe

$$(181) \qquad \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_{\varepsilon-1}^2 = \Sigma(\xi^2)$$

und bemerkt man, daß nebst der Summe (174) auch die folgende

$$(182) \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \varepsilon^2 = \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(2\varepsilon+1)}{1.\ 2.\ 3}$$

gibt; so findet man

$$(183) \qquad \varepsilon\delta^2 + 2\varepsilon\Sigma\xi.\ \delta + \varepsilon^2\Sigma(\xi^2) \equiv \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)(2\varepsilon+1)}{1.\ 2.\ 3}, \text{ mod } \varpi.$$

Der oben gewonnene Werth von δ kann demnach geprüft werden, indem man ihn in diese neue Congruenz sezt und zusieht, ob er auch sie befriedige.

Ein anderer Weg zu gleichem Ziele öffnet sich, wenn man aus den Congruenzen (173) die Glieder $-\varepsilon\xi_0, -\varepsilon\xi_1, \ldots\ldots -\varepsilon\xi_{\varepsilon-1}$ ausdrückt und sie mit einander multiplicirt. Hier findet man die Congruenz

$$(184) \ (\delta+1)(\delta+2)(\delta+3)\ldots\ldots(\delta+\varepsilon) \equiv (-\varepsilon)^{\varepsilon}\xi_0\,\xi_1\,\xi_2\ldots\xi_{\varepsilon-1}, \text{ mod } \varpi,$$

in welcher das Product der ausgezeichneten Stellenzeiger leicht bekannt wird, und welche der gefundene Werth von δ ebenfalls befriedigen muß, wenn er der wahre sein soll.

Da ferner die Congruenzen (176), (183), (184) nur die eine Unbekannte δ enthalten, so müssen, wenn man diese aus ihnen eliminirt, die daraus entspringenden Congruenzen, weil sie diese Unbekannte nicht mehr enthalten,

die Bedingungen der gleichzeitigen Zulässigkeit der Rechnungsangaben (der Concordanz der Daten) oder der Möglichkeit der Aufgabe aussprechen. Am einfachsten ergibt sich eine solche Bedingungs-Congruenz, wenn man die Congruenz (176) zur zweiten Potenz erhebt, und von der mit ε multiplicirten Congruenz (183) abzieht, nemlich

$$(185) \qquad \varepsilon^2 \left[\varepsilon \Sigma(\xi^2) - (\Sigma\xi)^2\right] \equiv \frac{\varepsilon^2(\varepsilon+1)(\varepsilon-1)}{2.\,2.\,3}, \text{ mod } \varpi.$$

Diese wird man demnach als vorläufiges Prüfungsmittel der Möglichkeit der gestellten Aufgabe verwenden; und erst, wenn sie zutrifft, wird man an die Bestimmung der Constanten δ gehen. Die einzig und völlig überzeugende Prüfung des mit Hilfe einer der Congruenzen (177) und (178) bestimmten Werthes von δ besteht jedoch darin, daß man ihn in die Congruenz (171) einführt, und nachher für x allmälig ihre Werthe aus (170) sezt, um zu erforschen, ob die für x sich ergebenden Werthe wirklich sämmtliche angewiesenen Ausnahmswerthe $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_{\varepsilon-1}$ sind.

Hat man auf diesen Wegen den Werth von $\delta = \mathfrak{q}\frac{\vartheta}{\tau}$ bestimmt und erprobt, so findet man, indem man den größten gemeinschaftlichen Theiler τ der Zahlen η und μ, so wie auch den Rest $\mathfrak{r}\frac{\vartheta}{\tau}$, nach Gefallen annimmt, die eigentlich zu bestimmende Constante ϑ aus

$$(186) \qquad \vartheta = \tau\delta + \mathfrak{r}\frac{\vartheta}{\tau}.$$

Da man nunmehr nach den Gleichungen (155), (158), (186) die Constanten μ, η, ϑ bestimmt hat; so gibt der Quotus (115) an, wie viele Steigungen oder Ausnahmen von dem nullten oder ersten Quotus an bis zu ihm dem x^{ten} Statt haben; seine Ergänzung zu x, vermöge (59)

$$(187) \qquad x - u = \mathfrak{q}\frac{(\mu-\eta)\,x + \mu - \vartheta - 1}{\mu},$$

an wie vielen Stellen der Quotus u in demselben Intervalle sich gleich verbleibt; die Vergleichungen des Restes (116), welche in (160), (161), (167), (168) aufgestellt wurden, ob an einer gewissen Stelle x eine Steigung eintrete oder nicht; die Congruenzen (165), (171), an welchen Stellen x der Quotus sich gleich bleibt oder um 1 sich erhebt; endlich der allgemeine Ausdruck (159), (166), der Aenderungen oder der Unterschiede der Quoti, wie viel die Steigung des Quotus überhaupt an jeder Stelle beträgt, folglich eine Function, die nur für gewisse Ausnahmswerthe (172) der Veränderlichen $= 1$, sonst immer $= 0$ ist.

Weil der Rest $\mathfrak{r}\frac{\vartheta}{\tau}$ beliebig gewählt werden darf, so ist es offenbar zur Vereinfachung der Rechnungsausdrücke am zuträglichsten, ihn gleich Null, also

ϑ durch τ theilbar oder $\vartheta = \tau\delta$ anzunehmen. Dann aber fällt der den Constanten μ, η, ϑ gemeinschaftliche Theiler τ, vermöge (35) aus dem Dividend und Theiler des Quotus u und seiner Aenderung Δu heraus; und es ist daher für diesen Quotus, den man doch eigentlich verlangte, da sein Rest v nur als sein unzertrennlicher Begleiter mit betrachtet werden mußte, dasselbe, als hätte man $\tau = 1$ gesezt, oder μ und η als Primzahlen unter sich angesehen, folglich geradehin

$$(188) \qquad \mu = \varpi,\ \eta = \varepsilon,\ \vartheta = \delta \quad \text{genommen.}$$

In dieser vereinfachten Darstellung verwandeln sich die Gleichungen (115), (187), (116), (157) in folgende

$$(189) \qquad u = \mathfrak{q}\frac{\varepsilon x + \delta}{\varpi}$$

$$(190) \qquad x - u = \mathfrak{q}\frac{(\varpi - \varepsilon)x + \varpi - \delta - 1}{\varpi}$$

$$(191) \qquad v = \mathfrak{r}\frac{\varepsilon x + \delta}{\varpi}$$

$$(192) \qquad \varpi - v = \mathfrak{R}\frac{-(\varepsilon x + \delta)}{\varpi}$$

$$(193) \qquad \Delta u = w = \mathfrak{q}\frac{\varepsilon + \mathfrak{r}\frac{\varepsilon x + \delta}{\varpi}}{\varpi} = \mathfrak{q}\frac{\varepsilon(x+1)+\delta}{\varpi} - \mathfrak{q}\frac{\varepsilon x + \delta}{\varpi},$$

die Bedingungen (160) und (161) für das Gleichbleiben der Quoti in

$$(194) \qquad \mathfrak{r}\frac{\varepsilon x + \delta}{\varpi} < \varpi - \mathfrak{r}\frac{\varepsilon}{\varpi} = \mathfrak{R}\frac{-\varepsilon}{\varpi}$$

$$(195) \qquad \varpi - v = \mathfrak{R}\frac{-(\varepsilon x + \delta)}{\varpi} > \mathfrak{r}\frac{\varepsilon}{\varpi},$$

und die Bedingungen (167), (168) für das Steigen der Quoti in

$$(196) \qquad \mathfrak{r}\frac{\varepsilon x + \delta}{\varpi} \geqq \varpi - \mathfrak{r}\frac{\varepsilon}{\varpi} = \mathfrak{R}\frac{-\varepsilon}{\varpi}$$

$$(197) \qquad \varpi - v = \mathfrak{R}\frac{-(\varepsilon x + \delta)}{\varpi} \leqq \mathfrak{r}\frac{\varepsilon}{\varpi}.$$

Noch mag bemerkt werden, daß für $\Delta x = 1$ und $\eta < \mu$ die Aenderung $\Delta u = w$ nach (149) oder (153) auch ganz allgemein durch

$$(198) \qquad \Delta u = \mathfrak{q}\frac{\eta + \psi + v}{\mu + \psi},\ \psi \geqq 0,\ \psi = 0, 1, 2, \ldots.$$

dargestellt werde, oder auch durch

$$(199) \qquad \Delta u = \mathfrak{q}\frac{\eta - \psi + v}{\mu - \psi},\ 0 \leqq \psi \leqq \mu - \eta,\ \psi = 0, 1, \ldots \mu - \eta$$

weil für $v = \mu - 1$, $\eta - \psi + \mu - 1 \leqq 2(\mu - \psi) - 1$ bleiben muß. Denn sobald $\eta + v < \mu$, ist auch $\eta + v \pm \psi < \mu \pm \psi$, und ist $\eta + v \geqq \mu$, so ist auch $\eta + v \pm \psi \geqq \mu \pm \psi$. Man hat also nur darauf zu sehen, daß

weil $\eta + \nu < 2\mu$ bleiben soll, auch $\eta + \nu \pm \phi < 2(\mu \pm \phi)$ sei, was bei dem oberen Zeichen immer eintrifft.

4. Der wichtigste und zugleich einfachste Fall ist der, wo unter je ϖ Stellen nur an einer einzigen eine Steigung des Quotus oder unter je ϖ nach einander folgenden Werthen der Veränderlichen x blos ein Ausnahmswerth $\equiv \xi$, mod ϖ vorkommt, folglich $\varepsilon = 1$ ist. Da ist $\Sigma\xi = \xi$, $\Sigma(\xi^2) = \xi^2$, also die Congruenz (185) identisch. Ferner findet man vermöge (177)

(200) $\delta \equiv -(\xi+1)$, mod ϖ,

folglich, die Perioden mögen bei dem nullten oder ersten Gliede, bei $x \equiv 0$ oder $x \equiv 1$, mod ϖ, anheben,

(201) $\delta = \varpi - \xi - 1$.

Zur Prüfung dieses Ausdruckes hat man vermöge (164) die Hilfszahl $\chi = 1$, also nach (171) $x \equiv -1(-1 - \xi + 0 + 1) \equiv \xi$, mod ϖ; daher der Ausdruck richtig.

Dann ist die Anzahl der Ausnahmsfälle, von $x = 0$ oder 1 bis $x = x$, oder die Menge der Steigungen der Quoti vom nullten oder ersten bis zum x^{ten}

(202) $u = \mathfrak{q}\dfrac{x+\varpi-\xi-1}{\varpi} = \mathfrak{q}\dfrac{x+\varpi-(\xi+1)}{\varpi}$,

die Anzahl der Gleichbleibungen der Quoti

(203) $x - u = \mathfrak{q}\dfrac{(\varpi-1)x+\xi}{\varpi}$,

die Bedingung einer Steigung oder Ausnahme

(204) $v = \mathfrak{r}\dfrac{x-\xi-1}{\varpi} = \varpi - 1$, oder $x \equiv \xi$, mod ϖ

und der Betrag der Steigung an einer angewiesenen Stelle x

(205) $\Delta u = \mathfrak{q}\dfrac{x+\varpi-\xi}{\varpi} - \mathfrak{q}\dfrac{x+\varpi-\xi-1}{\varpi} = \mathfrak{q}\dfrac{1+\mathfrak{r}\dfrac{x-\xi-1}{\varpi}}{\varpi} = \mathfrak{q}\dfrac{\mathfrak{R}\dfrac{x-\xi}{\varpi}}{\varpi}$

Anwendungen in §§. 24. 52.

Chronologie.

Erste Abtheilung.

Allgemeine Chronologie.

Chronologie.

1.

Gegenstand und Eintheilung der Chronologie.

Die Zeit ist die Vorstellung des Nacheinanderſein's der Dinge. Dieſe Vorſtellung bildet ſich im Geiſte des Menſchen durch allmälige Auffaſſung von vielerlei Reihen nach einander wahrgenommener Erſcheinungen. Die Anreihung oder das Nacheinander der Dinge in der Zeit heißt ihre Zeitfolge.

Die allgemeine Zeit iſt unendlich und ſtetig, d. h. nirgends natürlich begrenzt, aber überall willkürlich begrenzbar.

Eine begrenzte Zeit heißt ein Zeitraum, Zeitabſchnitt, Zwiſchenzeit (Zeit-Intervall), oft auch nur ſchlechthin eine Zeit; jede der beiden Grenzen desſelben ein Zeitpunkt, Zeitaugenblick, Moment; und zwar die in der Zeitfolge dem Geiſte zuerſt ſich darbietende oder frühere Grenze der Anfang, die andere, ſpätere, das Ende des Zeitraums.

Sehr angemeſſen und natürlich läßt ſich die Zeit mit einer unendlichen Linie, am einfachſten mit einer geraden, vergleichen; daher die analogen Benennungen.

Jede Zeit läßt ſich wieder aus anderen Zeiten beſtehend denken; ſomit beſizt die Zeit Größe, und begrenzte Zeiten ſind Größen. Die Größe eines Zeitraumes wird ſeine Dauer oder Länge genannt.

Jener Zweig der beſonderen Größenlehre, welcher die Größe der Zeit erforſcht, heißt Chronologie oder Zeitkunde.

Nach der Art der Begrenzung der zu betrachtenden Zeiträume kann man die Chronologie in aſtronomiſche (mathematiſche) und techniſche unterſcheiden; jene unterſucht die von Erſcheinungen an den Weltkörpern (am Himmel) begrenzten Zeiträume, dieſe diejenigen Zeitabſchnitte, welche die Menſchen, für den Bedarf ihres Verkehrs im Zuſammenleben, durch Fixirung willkürlicher Merkmale in der gleichförmig fort fließenden Zeit, ſich bilden.

In Abſicht auf die Abhandlung ihres Gegenſtandes dagegen läßt ſich die Chronologie in die allgemeine und beſondere, generelle und ſpecielle unterſcheiden; indem man in jener die Größe der Zeiträume überhaupt, hier aber die Größe der von den verſchiedenen Völkern benüzten Zeiträume behandelt.

In gegenwärtiger Darſtellung der Chronologie, welche ſich's hauptſächlich zur Aufgabe macht, die Verwendung der höheren Arithmetik in der Chronologie zu zeigen, ſcheint die leztere Eintheilung den Vorzug zu verdienen.

Erste Abtheilung.

Allgemeine Chronologie.

2.

Zeitmessung und Zeitmaße.

Das Erforschen der Verhältnisse gleichartiger Größen zu einer bestimmten Größe dieser Art überhaupt, heißt das Messen dieser Größen durch diese eine bestimmte, welche man die Meßeinheit oder das Maß nennt. Das Messen der Zeiträume oder der Zeitgrößen wird die Zeitmessung, oder in so fern dabei die Zeitgrößen auf Zahlen zurückgeführt, durch Zahlen (ihre Zahlwerthe) dargestellt werden, Zeitrechnung genannt; und die dabei verwendete Einheit die Zeiteinheit oder das Zeitmaß.

Jedes Zeitmaß muß, gleich jedem anderen Maße, von bestimmter unwandelbarer Größe und hinreichend bekannt sein. Dazu eignen sich theils natürliche, durch wiederkehrende Erscheinungen am Himmel begrenzte Zeiträume; theils künstliche, an den durch Kunst hervorgebrachten Bewegungen unterscheidbare, Zeitabschnitte.

Von den natürlichen Zeiträumen ist allein die Zeit des scheinbaren Umlaufs der Fixsterne, oder eigentlich die Zeit eines Umschwungs der Erde, Sterntag genannt, von stets gleicher Dauer, jedoch nur ein astronomisches, d. h. lediglich für den Astronomen brauchbares, Zeitmaß. Als bürgerliche, d. i. im bürgerlichen Leben verwendbare, Zeitmaße lassen sich blos die scheinbaren Umlaufzeiten der Sonne und des Mondes, welche Tag, Monat und Jahr genannt werden, obschon ihre Dauer einigermaßen schwankt, verwenden; weil diese Gestirne auf das Werden und Sein der belebten Welt so mächtig einwirken.

Künstliche Zeiträume, vorzüglich zur Messung von Theilen des Tages geeignet, sind die Stunden, Minuten, Secunden und Terzen, welche wir in der Zeit durch Vorrichtungen oder Werkzeuge willkürlich ausscheiden, die eine gleichförmige, meistens schwingende oder umdrehende, Bewegung unterhalten, wie Pendel und die mannigfaltigen Uhren, als Wasser- und Sanduhren, Sonnenuhren, Räderuhren, u. m. dgl.

8.
Der Tag.

Der Zeitraum, welcher sich dem Menschen am auffallendsten zu einem Zeitmaße anbietet, ist die Dauer eines scheinbaren Umlaufes der Sonne um die Erde, eigentlich die Zeit von einer bestimmten Stellung des, mit der Erde um die Achse derselben sich drehenden, Horizonts und Meridians gegen die fest stehende Sonne bis zur nächsten parallelen oder eben solchen Stellung. Er wird gewöhnlich Tag, bestimmter jedoch bürgerlicher oder Sonnentag genannt, und durch den Auf- und Untergang der Sonne in zwei Theile von sehr veränderlicher Dauer abgetheilt; von denen derjenige, während dessen die Sonne über dem Horizonte sich befindet, gleichfalls Tag, bezeichnender aber natürlicher Tag, der andere Nacht genannt wird.

Die Zeiten der abwechselnden Durchgänge des Horizonts und Meridians durch die Sonne heißen Morgen, Mittag, Abend und Mitternacht, zusammen die vier Tagszeiten, und dienen im bürgerlichen Leben zu einer sehr üblichen ungefähren Abtheilung des Tages.

Ursprünglich theilte man sowohl den natürlichen Tag, als auch die Nacht, troz ihrer wandelbaren Länge, in 12 gleiche Stunden; später wurde es allgemeine Sitte, den ganzen bürgerlichen Tag in 24 gleiche Stunden zu theilen, welche entweder, wie jezt gewöhnlich, in zwei Absäzen bis auf 12, oder von den Astronomen, Italiänern und Juden ununterbrochen bis 24 gezählt werden. Die Stunde pflegt man in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden, die Secunde aber entweder zehntheilig, oder noch ferner nach einem älteren Gebrauche in 60 Terzen zu 60 Quarten u. s. f. zu theilen.

Den Anfang des Tages verlegt man auf eine der vier Tagszeiten. Mit dem Morgen oder Sonnenaufgang den Tag anzufangen, wie die Babylonier thaten, ist jezt ganz ungebräuchlich. Abends oder bei Sonnenuntergang fangen ihn, wie ehedem die Griechen und die semitischen Völker, gegenwärtig noch die Italiäner, Juden und Mohammedaner an. Beide Tagesanfänge sind von dem Uebelstande begleitet, daß die übrigen Tageszeiten nicht immer auf einerlei Tagesstunden treffen. Ganz unbrauchbar im bürgerlichen Leben, und darum auch nie von einem Volke versucht, ist der Anfang des Tages mit dem Mittage, der oberen Culmination der Sonne; weil dadurch der eigentliche oder natürliche Tag, während dessen die Menschen am thätigsten im gegenseitigen Verkehre stehen, zur höchsten Unbequemlichkeit in der Zählung der Tage in zwei bürgerliche Tage vertheilt würde. Blos die Mehrzahl der Astronomen fängt ihn noch damit an, weil die obere Culmination der Sonne sich bequem und genau beobachten läßt; doch war dieser Grund nie von besonderer, und ist jezt, wo man scharfe Zeitbestimmungen meistens durch Fixstern-Beobachtungen

ausführt, von gar keiner Erheblichkeit. Somit bleibt als einziger zweckmäßiger, und deswegen auch gegenwärtig bei allen gebildeten Völkern üblicher Tagesanfang die Mitternacht oder die untere Culmination der Sonne, die Mitte der Ruhezeit der bürgerlichen Geschäfte.

4.

Der synodische Mondmonat.

Das nächst größere natürliche Zeitmaß, welches die Menschen frühzeitig benützten, ist die Zeit von einem Neumond oder Neulicht des Mondes, (von den Griechen νουμηνία genannt) dem Erscheinen der Mondsichel am Abendhimmel, bis zum anderen, der synodische Mondmonat. Seine Dauer ist im Durchschnitte nur wenig größer als 29½ Tag; weswegen man in der bürgerlichen Zeitrechnung, wo blos volle Tage gerechnet werden können, zwei oder ein Paar nach einander folgende Mondmonate gewöhnlich zu 59 Tagen, den einen voll zu 30, den anderen hohl zu 29 Tagen zählt, und zuweilen einen hohlen 29tägigen Mondmonat zu einem vollen 30tägigen ergänzt.

Gegenwärtig begrenzen die Astronomen den synodischen Mondmonat schärfer durch zwei unmittelbar nach einander folgende Conjunctionen des Mondes mit der Sonne, worunter man die Zeitpunkte der Gleichheit der geocentrischen Längen dieser Gestirne versteht. Eine solche Conjunction auch Neumond zu nennen, was häufig geschieht, soll hier vermieden werden.

5.

Die Woche.

Der Mondmonat zerfällt durch die vier Hauptlichtgestalten (Phasen) des Mondes — Neumond, erstes Viertel, Vollmond, letztes Viertel — in vier Zeitabschnitte im Mittel von 7⅜ Tagen.

Darum benützt man im bürgerlichen Verkehre, seit uralten Zeiten, einen siebentägigen Zeitraum, unter der Benennung Woche, zur Abzählung mäßig großer Anzahlen von Tagen; wobei man die Wochentage theils wie gewöhnlich zählt, theils mit besonderen Namen belegt.

6.

Das Jahr.

Die Menschen wurden sehr früh veranlaßt, auf den Wechsel und die Wiederkehr derselben allgemeinen Witterungsverhältnisse aufzumerken, nach denen sie die Zustände der Pflanzen- und Thierwelt, und damit auch ihre eigenen Verrichtungen, besonders die auf Verschaffung der Nahrung zielenden, allmälig sich ändern und erneuern sahen. Der Zeitraum, während dessen die allgemeinen Verhältnisse der Witterung wiederkehren, Jahr genannt, wurde von ihnen bald als ein zur Messung langer Zeitstrecken geeignetes Maß erkannt.

In den gemäßigten Himmelsstrichen unterschied man darin noch hauptsächlich die Zeitabschnitte der beiden Extreme von Wärme, der Hize und Kälte, nebst den zwei dazwischen fallenden Uebergangszeiten mit gemäßigter Wärme, die vier Jahrszeiten, die wir Sommer, Herbst, Winter und Frühling nennen. Die Ausmittlung der Dauer des Jahres in Tagen und Theilen des Tages ward jedoch nur sehr allmälig zu Stande gebracht.

7.
Das Mondjahr.

Anfangs genügte die Wahrnehmung, daß das Jahr ungefähr 12, oder 6 Paar, synodische Mondmonate halte, und so bildete sich das Mondjahr von 354 Tagen.

8.
Das Sonnenjahr.

Als jedoch später der geregelte Betrieb des Ackerbaues, der Jagd und Fischerei eine genauere Kenntniß der Zeit der Erneuerung der Witterungsverhältnisse forderte, und man merkte, daß dieselben hauptsächlich durch die Dauer der Anwesenheit und den täglichen höchsten Stand der Sonne über dem Horizonte bedingt werde; betrachtete man eifrig diejenigen Fixsterne, zwischen denen die Sonne nach und nach erscheint, von welchen jene, denen sie sich nähert, am Abendhimmel bald hinter der Sonne untergehen, diejenigen dagegen, von denen sie sich entfernt, am Morgenhimmel kurz vor ihr aufgehen; und so überzeugte man sich, daß das Jahr die Zeit sei, in welcher die stets wechselnden scheinbaren Stellungen der Sonne gegen die Fixsterne sich wiederholen, oder die Sonne am Fixsternhimmel von Westen nach Osten in einem Kreise herum zu laufen scheint. Dies gab das Sonnenjahr, welches man Anfangs 365 Tage lang, und später noch um etwa einen Vierteltag länger fand. Endlich lehrten schärfere astronomische Beobachtungen, daß das Jahr, welches die Wiederkehr der Längen der natürlichen Sonnentage und der allgemeinen Witterungsverhältnisse bedingt, die Zeit ist, in der die Sonne zu dem Punkte ihrer scheinbaren Bahn zurückkehrt, von dem sie ausging, z. B. zu einem der Wendepunkte — τροπαι — eigentlich die Zeit, in welcher die Erde bei ihrer Bewegung um die Sonne dieselbe heliocentrische Länge wieder erreicht; wodurch man es als das tropische Sonnenjahr anerkannte. Zugleich führte man anstatt der physischen Jahrszeiten, die keiner allgemeinen Bestimmung fähig sind, astronomische ein, deren Eintritte die vier Jahrpunkte, und der Reihe nach Frühlingsnachtgleiche, Sommer-Sonnenwende, Herbstnachtgleiche und Winter-Sonnenwende heißen, und die abwechselnden Durchgänge des Erdäquators und des Colurs der Solstitien — der durch die Erdachse auf der

Ebene der Erdbahn senkrechten Ebene — durch den Mittelpunkt der Sonne sind; indem namentlich die Durchgänge des Aequators die beiden Tag- und Nachtgleichen (Aequinoctien), die Durchgänge des Colurs aber die beiden Sonnenstillstände (Solstitien) oder Sonnenwenden bewirken.

Das Sonnenjahr läßt man wohl gewöhnlich in der Nähe eines Jahrpunktes, aber auch sonst noch mit höchst verschiedenen Zeitpunkten anfangen.

9.

Der Sonnenmonat.

Die Gewohnheit, das Jahr aus 12 Mondmonaten bestehend anzunehmen, mag vielleicht die nächste Ursache gewesen sein, daß man auch das Sonnenjahr in 12 Sonnenmonate abtheilt; welche demnach in der bürgerlichen Zeitrechnung entweder theils 30, theils 31 Tage erhalten, oder ganz gleich lang zu 30 Tagen gemacht, und die noch übrigen Tage als Ergänzungstage angehängt werden.

Die Monate, aus denen die Jahre bestehen, pflegt man fast immer mit besonderen Namen zu belegen, selten zu zählen. Die Tage der Monate dagegen werden, wenigstens jezt überall, vom ersten bis zum lezten gezählt; sonst kommt aber auch theils die Benennung aller Monatstage, theils die Benennung einzelner und damit verbundene Zählung der dazwischen fallenden vor.

10.

Der Sterntag.

Die bisher aufgeführten Zeitmaße leiden an dem gemeinschaftlichen Fehler, daß ihre Dauer, wenn gleich zwischen nicht sehr weiten Grenzen schwankt; weswegen sie zwar zu dem im bürgerlichen Verkehre vorkommenden, keine volle Genauigkeit fordernden Zeitrechnungen, keineswegs aber zu scharfen astronomischen Zeitbestimmungen geeignet sind. Darum ist es sehr erwünscht, an der mit dem Namen Sterntag belegten Zeit der Umdrehung der Erde um ihre Achse, oder der Zeit von einer Culmination eines Fixsterns zur nächsten, ein Zeitmaß von stets gleich bleibender Dauer zu besizen, um damit die Längen der veränderlichen Zeitmaße sowohl einzeln, als im Mittel bestimmen, und mit Hilfe der Rechnung zu völlig genauen Zeitmessungen verwenden zu können.

Man theilt den Sterntag, eben so wie den Sonnentag, in 24 Stunden zu 60 Minuten von je 60 Secunden, und läßt ihn mit der oberen Culmination des Frühlingspunktes anfangen. Dazu benüzt man eigens eingerichtete Pendeluhren, welche Sternuhren heißen und die jedesmalige Sternzeit zeigen.

11.

Mittlerer Sonnentag.

Obschon die Sonnentage von verschiedener Dauer sind, so läßt sich doch ihr arithmetisches Mittel denken, indem man einen durch zwei sehr weit von einander entfernte Culminationen der Sonne begrenzten Zeitraum in so viele gleiche Zeiträume, als dazwischen Sonnentage verflossen sind, abgetheilt sich vorstellt; wornach jeder dieser gleichen Zeiträume jenes Mittel der Sonnentage ist und ein **mittlerer Sonnentag**, daher ein eigentlicher zur Unterscheidung ein **wahrer Sonnentag** genannt wird. Dieser mittlere Tag wird eben so wie der wahre eingetheilt. In Sternzeit wird man seine Dauer ausgedrückt erhalten, sobald man den von den beiden Culminationen der Sonne begrenzten Zeitraum in Sternzeit bekannt hat; oder auch aus der in Sternzeit bekannten Länge des tropischen Sonnnenjahrs auf folgende Weise.

Man denke sich die Ebene des Mittelpunktes der fest stehenden Sonne und der Umdrehungsachse der die Sonne umkreisenden Erde, die so genannte **Declinations- oder Stundenebene** der Sonne; und stelle sich vor, ein angewiesener oberer Meridian gehe durch die Sonne, oder die Sonne culminire in ihm. Beide Ebenen fallen demnach in diesem Augenblicke in eine zusammen, welche als ihre gemeinschaftliche ursprüngliche Lage in Gedanken fixirt sein soll. Es sei ferner die jährliche Präcession der Nachtgleichen im Aequator $= p$ Grad, so durchläuft die Stundenebene der Sonne von ihrer ursprüngliche Lage aus, während eines tropischen Umlaufs der Erde, bis sie wieder dieselbe heliocentrische Länge erreicht, z. B. zu der ihr um p Grad entgegen kommenden Frühlings-Nachtgleichenlinie zurückkehrt, $360 - p$ Grad; daher, wenn das tropische Jahr λ Sterntage währt, ist die mittlere Bewegung c der Stundenebene in einem Sterntage $c = (360 - p) : \lambda$ Grad. — Wenn nun die Erde auf ihrer Bahn von einer Culmination der Sonne an, wo Meridian und Stundenebene zusammenfallen, einen Umschwung um ihre Achse vollendet hat, also ein Sterntag beendigt ist; so hat der Meridian sich einmal ganz umgekehrt, ist nemlich zu der bei der Culmination inne gehabten Lage parallel geworden, und hat sonach 360 Grad durchstreift; die Stundenebene dagegen nur c Grad. Allein der Meridian hat die Stundenebene noch nicht erreicht, sondern er wird erst dann in sie fallen, wenn die Stundenebene die in einem mittleren Sonnentage zu durchlegenden C Grad, folglich er selbst, über die 360 Grade, noch einen gleichen Winkel von C Graden, also im ganzen mittleren Sonnentage $360 + C$ Grad durchstreift haben wird. Wegen der Gleichförmigkeit der Bewegungen beider Ebenen sind nun die zurückgelegten Wege der einen jenen der anderen und auch den darauf verwendeten Zeiten proportional, nemlich

mittlerer Sonnentag : Sterntag $= \frac{C}{c} = \frac{360+C}{360}$, also $= \frac{360}{360-c}$,

$$= 1 : 1 - \frac{c}{360} = \lambda : \lambda - \frac{\lambda c}{360} \text{ oder}$$

$$= \lambda : \lambda - 1 + \frac{p}{360}.$$

Vernachlässigt man die etwa 50 Sec. betragende jährliche Präcession p, so ist

mittl. Sonnentag : Sterntag $= \lambda : \lambda - 1$,

folglich

trop. Jahr $= \lambda$ Sterntage $= \lambda - 1$ mittl. Sonnentage,

d. h. das tropische Jahr hält (höchst nahe) um einen Sterntag mehr als mittlere Sonnentage.

Nimmt man nun mit Lalande das tropische Jahr = 366 T. 5 St. 48′ 48″ Sternzeit, also $\lambda = 366\frac{109}{450}$, so findet man

mittl. Sonnentag : Sterntag = 329618 : 328718 = 1·002738 : 1
= 1 : 0·997269

also ist mittlerer Sonnentag = 24 St. 3′ 56·″5 Sternzeit

und Sterntag = 23 St. 56′ 4·″1 des mittl. Tages.

Die mittlere tägliche Bewegung c der Stundenebene der Sonne, daher auch die Dauer des mittleren Sonnentags ist übrigens, wie Theorie und Beobachtung begründen, von unveränderlicher Dauer.

12.

Wahre und mittlere Sonnenzeit.

Ist eine Uhr so eingerichtet, daß sie zur Mitternacht, d. i. bei dem Durchgange des unteren Meridians durch die Sonne, jedes Mal 0 oder 24, und zu Mittag 12 Uhr zeigt, zugleich von einer Mitternacht zur nächsten gleichförmig geht; so gibt sie die *wahre Sonnenzeit* an. Solche Uhren sind, wenigstens bei Sonnenschein, die Sonnenuhren; mechanische Uhren von gleichförmigem Gange würden entweder öfteres Richtigstellen oder eine besonders künstliche Einrichtung forderu, daher läßt man sie nicht nach wahrer Zeit gehen.

Eine Uhr dagegen, welche gleichförmig gehend während eines Sterntags 23 Stunden 56′ 4·″1 zählt, dabei in den beiden Nachtgleichen genau wahre Sonnenzeit angibt, zeigt die *mittlere Sonnenzeit* oder *bürgerliche Zeit*. Solche Uhren sind alle unsere gut geregelten mechanischen Uhren; und diese mittlere Zeit ist immer gemeint, wenn keine weitere Unterscheidung beigesezt wird. Der jedesmalige Unterschied der wahren und mittleren Zeit heißt die *Zeitgleichung*.

Zur Versinnlichung kann man sich mit den Astronomen eine so genannte *mittlere Sonne*, nemlich einen Punkt einbilden, welcher sich in einer auf der Erdachse senkrechten und mit ihr nur parallel zu sich selbst fortrücken-

den, aber nicht mit der Erde sich umdrehenden Ebene, in beliebiger Entfernung von der Achse, in einer Kreislinie gleichförmig so bewegt, daß seine gerade Aufsteigung (Rectascension) stets der mittleren geocentrischen Länge der Sonne gleicht. Geht der obere Meridian eines Ortes der Erde durch diesen Punkt, so sagt man, die mittlere Sonne culminire, oder es sei mittlerer Mittag. Diese Tage sind durchaus von gleicher Dauer, und eine gleichförmig gehende Uhr, welche in jedem mittleren Mittage 12 zeigt, geht nach mittlerer Zeit.

13.

Mittlerer synodischer Monat, mittleres Mondjahr und mittleres tropisches Jahr.

Die Dauer der synodischen Umläufe des Mondes ist so sehr verschieden, daß die längste und kürzeste um 13 Stunden und darüber von einander abstehen. Den mittleren synodischen Mondmonat bestimmte Hipparch, 100 Jahre vor Chr., zu 29 T. 12 St. 44′ 3.″5, Tobias Mayer*) berechnete für das Jahr 300 vor Chr. 3.″4015 und für das Jahr 1700 nach Chr. 2.″8283, welches die gewöhnliche Annahme in der Zeitkunde ist. Burckhardt's Mondtafeln, die neuesten und bewährtesten, geben ihn für das Ende des 17 + i ten Jahrhunderts durch den Ausdruck

29 T. 12 St. 44′ 2.″854788 — i. 0.″028434 — i^2.0.″0000885.

Nach Tobias Mayer's Bestimmung ist demnach das mittlere Mondjahr zu 12 synodischen Monaten = 354 T. 8 St. 48′ 33.″9396.

Das tropische Jahr ist, wegen der Mannigfaltigkeit der Stellungen der Planeten gegen die Erde, wodurch ihre gegenseitige Anziehung und darnach ihr Umlauf um die Sonne abgeändert wird, von einer, jedoch nur wenig, schwankenden Dauer. Die Astronomie lehrt,**) daß das tropische Jahr gegen das Jahr 3040 vor Chr. seine größte Länge, 365 T. 5 St. 49 M. 24.″83 hatte, daß es seit jener Zeit bis auf die unsere abgenommen hat, im J. 2360 nach Chr. seine mittlere Länge 365 T. 5 St. 48′ 46.″83 und im J. 7600 nach Chr. seine kürzeste von 365 T. 5 St. 48′ 8.″83 haben und von da allmälig wieder wachsen wird; wornach also seine mittlere Dauer von der längsten und kürzesten um 38″ sich unterscheidet.

Hipparch (140 vor Chr.) erachtete das tropische Jahr um $1/300$ Tag = 4′ 48″ kürzer als 365¼ Tag, wie man es vor und zu seiner Zeit annahm, also zu 365 T. 5 St. 55′ 12″, fast um 6′ zu lang. Die Alphonsinischen Tafeln (um 1250 nach Chr.) nahmen es im Mittel zu 365 T. 5 St. 49′ 16″, Copernicus (1543 nach Chr.) noch um 23½‴ länger an. Lalande berechnete

*) Lalande Astronomie t. 2. p. 157.

**) Littrow Wunder des Himmels. Stuttgart 1836. Bd. 3. S. 138.

in seinem **Mémoire sur la durée de l'année solaire** (**Mémoires de l'Acad. de Paris, 1782**) die mittlere Dauer des tropischen Jahres zu 365 T. 5 St. 48′ 48″, eine gegenwärtig fast allgemein angenommene Bestimmung. Bessel gibt *) für das Jahr 1800 + t, wofern t $\lessgtr$ 100 ist, die Dauer des tropischen Jahres durch den Ausdruck an

365 T. 5 St. 48′ 47.″8091 — t. 0.″00595.

14.

Bezeichnung und Zählung der Jahre.

Anfangs genügte es den Bedürfnissen der Völker, in ihren Privat- und öffentlichen Geschäften, nur die Jahre nach alljährlich wechselnden Obrigkeiten oder Priestern zu benennen oder zu bezeichnen, wie bei den Römern nach den Consuln, bei den Athenern nach den Archonten, bei den Spartanern nach den Ephoren; oder die Jahre der Herrschaft ihrer jedesmaligen Regenten, der Amtsverwaltung ihrer weltlichen oder geistlichen Vorstände u. dgl. zu zählen, wie bei den Aegyptern, Babyloniern u. m. a. die Jahre der Regierung ihrer Könige, zu Argos die Jahre der Amtsverwaltung der Priesterin der Juno u. m. a.

I. Fortlaufende Jahrzählung. Als aber Geschichtschreiber es unternahmen, die Schicksale und Thaten der Völker und ihrer Großen nach ihrer Zeitfolge geordnet zusammen zu stellen, reichten sie mit solchen kurzen Zeitabrissen nicht aus, sondern sahen sich genöthigt, aus der Vergangenheit oder Gegenwart einen, durch eine denkwürdige Begebenheit, ausgezeichneten Zeitpunkt hervor zu heben, und von ihm an die Jahre zu zählen. Ein solcher geschichtlich merkwürdiger Zeitpunkt oder Zeiteinschnitt pflegt überhaupt eine Epoche, und eine Reihe von einer Epoche fortlaufend gezählter Jahre eine Aere (**aera**), Jahrreihe oder Jahrrechnung, so wie die auf ein Jahr treffende Nummer die Jahrzahl desselben genannt zu werden. Zu einer solchen Epoche, an die man den Anfang einer Jahrrechnung knüpfte, wählte man bald die Gründung oder Zerstörung einer bedeutenden Stadt, bald die Stiftung neuer Reiche durch neue Herrscher, oder ausgeführte Colonieen, bald die Veränderung einer Regierungsform oder Gesezgebung u. m. dgl. So zählten die Römer ihre Jahre von der Gründung der Stadt Rom, die älteren Griechen von der Zerstörung Troja's, die Syrer von der Gründung des Reichs der Seleukiden, die späteren Aegypter von dem Regierungsantritte des römischen Kaisers Diocletian. Gegenwärtig ist die wichtigste Jahrrechnung die bei den christlichen Völkern gebräuchliche, welche die Jahre von der Geburt Christi zählt, und die christliche, gemeine oder europäische Aere genannt wird, und nach der wir jezt die Jahrzahl 1844 schreiben. Dabei

*) Vergl. Schuhmacher Astronomische Nachrichten. Nr. 133.

begreift man unter den Jahren einer Aere gewöhnlich nur diejenigen, welche ihrer Epoche nachfolgen; doch zählt man auch unterweilen die Jahre von dieser Epoche, als einem fixen Zeitpunkte, in die Vergangenheit zurück, nach der von Eins an fortlaufenden natürlichen Zahlenreihe, und nennt sie, zur Unterscheidung, Jahre vor der Epoche, die ersteren daher Jahre nach der Epoche. Dann folgen das erste Jahr vor und das erste Jahr nach der Epoche unmittelbar nach einander; mithin muß man (vermöge XVII, 1 der Vorbegriffe) in den algebraischen Rechnungen der Zeitkunde, wenn man die Jahre nach der Epoche für positiv ansieht, das Jahr a vor der Epoche als das Jahr $-(a-1)=-a+1$ in Rechnung nehmen, und umgekehrt das aus einer Rechnung sich ergebende Jahr $-a$ als das Jahr $a+1$ vor dieser Epoche erklären.

II. Wiederkehrende Zählung der Jahre. Man zählt jedoch auch sehr oft von bedeutsamen Ereignissen die Jahre nicht ununterbrochen weiter, sondern von Eins an nur bis zu einer gewissen höchsten Zahl, und dann vom Neuen wiederholt auf gleiche Weise; besonders dann, wenn nach einer solchen Reihe von Jahren gewisse Zeitverhältnisse oder Erscheinungen immer wiederkehren. Eine derartige Partie einer Jahrreihe nennt man einen Kyklus, Cirkel, Zeitkreis, und mehrere Zeitkreise zusammen eine Periode, obschon dies Wort auch mit den ersteren gleichbedeutend gebraucht wird. So zählten die Griechen von der alle 4 Jahre wiederkehrenden Feier ihrer olympischen und nemeischen Spiele nach vierjährigen Kykeln, Olympiaden und Nemeaden genannt; ein solcher Zeitkreis war der von Meton entdeckte neunzehnjährige Mondkyklus, und die aus vier solchen Kyklen bestehende sechsundsiebzigjährige Mondperiode des Kallippus, nach denen die Neumonde in dieselben Stellungen im tropischen Jahre oder gegen die vier Jahrpunkte zurückkehren, der fünfzehnjährige Indictionskreis unter den späteren römischen Kaisern, nach welchem die Grundsteuer-Bemessung erneuert und berichtiget wurde u. m. a. Selbst bei der fortlaufenden Zählung der Jahre kann man als natürlich sich darbietende chronologische Perioden die Zehner, Hunderte, Tausende und Zehntausende von Jahren unter den Namen Jahrzehent, Jahrhundert, Jahrtausend und Myriade ausscheiden. Hieher lassen sich sogar auch die Zeitkreise rechnen, welche man aus wiederkehrend gezählten Tagen zusammenstellt, wie unsere siebentägige Woche und die bald zehntägige bald neuntägige Dekade der Griechen.

15.

Continuirliches Zeitmessen. Kalender. Datirung.

Nach den bisher beschriebenen Zeitmaßen werden nun, mittelst der Zeitmeßwerkzeuge, in die stetig fort strömende Zeit Einschnitte gemacht, die aus-

geschnittenen Maße gezählt, und in größere Maße vereint. So zählen uns die Uhren die Secunden in Minuten, oder wenigstens die Minuten in Stunden, und diese wieder in Tage zusammen, zuweilen auch noch die Tage in Wochen oder Monate. Gewöhnlich aber benüzt man zur Zählung der Tage in Wochen und Monate, und der Monate in Jahre, so wie zum Zählen der Jahre den Kalender, dem Wesentlichen nach ein Verzeichniß aller einzelnen in Wochen und Monaten nach einander gereihten Tage eines oder mehrerer Jahre, an denen gewöhnlich noch die wichtigsten Erscheinungen am Himmel, die politischen, ländlichen und religiösen Feste, denkwürdige geschichtliche Erinnerungen, und mancherlei auf das bürgerliche Leben beziehliche Notizen angesezt werden.

Soll nun die Zeit irgend einer Begebenheit angesagt werden, so geschieht dies nach dem Grade der möglichen oder beabsichtigten Genauigkeit sehr verschieden. Bei oberflächlichen Zeitangaben der Geschichte genügt oft schon das Jahrhundert oder Jahrzehent einer Aere. In der allgemeinen Weltgeschichte pflegt man bei den meisten Begebenheiten nur das Jahr, in den Specialgeschichten noch den Monat anzuführen. Für völlig bestimmt erachtet man in der Geschichte und im bürgerlichen Verkehre die Zeitangabe eines Factums, wenn sie die Zeltrechnung, die Aere, das Jahr, den Monat und Tag nennt. Diese Zusammenstellung pflegt man das Datum des Factums zu nennen; und so zu datiren ist gegenwärtig fast allgemein üblich. Zu einer Mehrbestimmung, wie sie vorzüglich im Mittelalter bei Ausstellung von Urkunden im Gebrauche stand, führt man zuweilen noch bei dem Jahre und Tage mancherlei ihnen zukommende chronologische Merkmale an, z. B. man nennt den Wochentag, auf den dieser Tag trifft; ein Fest, welches an ihm begangen zu werden pflegt; seinen Abstand von einem solchen Feste; dem Jahre sezt man bei, das wie vielte es seit einem denkwürdigen Ereignisse oder in einer anderen Jahrreihe ist, zu welchem Zwecke man ehedem z. B. die unten zu erklärenden Sonnencirkel, goldenen Zahlen und Indictionen u. m. a. anführte; oder man datirt nach mehr als Einer Zeitrechnung. — Ist die Zeit des Factums an dem betreffenden Tage selbst genauer anzugeben, so nennt man noch Tageszeit und Stunde; bei astronomischen und physikalischen Beobachtungen sogar nach Maßgabe der gewünschten Bestimmtheit, Minuten, Secunden und Theile der Secunden.

16.

Ausgleichung der bürgerlichen Zeitrechnung mit der mittleren astronomischen.

Das tropische Jahr, der synodische Monat und das astronomische Mondjahr sind, in ihrer mittleren Dauer, durch den mittleren Sonnentag unmeßbar; und doch erheischt die bürgerliche Zeitrechnung, daß man dieselbe nur

nach vollen mittleren Tagen zähle, und daß sonach die an ihre Stelle tretenden bürgerlichen oder Kalender-Jahre und Monate nahe genug mit den mittleren und wirklichen astronomischen anfangen, daß z. B. ein gewisser Jahrpunkt immer auf den ersten Tag des bürgerlichen Jahres, oder eine bezeichnete Mondphase (gewöhnlich der Neumond) auf den ersten Tag des bürgerlichen Monats treffe; hauptsächlich damit religiöse und ländliche Feste zu bestimmten Jahrszeiten oder Lichtgestalten des Mondes gefeiert werden können, damit in jedem Monat wenigstens im Allgemeinen gewisse Witterungsverhältnisse und Stände der Vegetation eintreffen, und die darnach sich richtenden Geschäfte, als Feldarbeiten, Reisen u. dgl., schon nach dem Namen der Monate unternommen werden können, ohne erst den Himmel befragen zu müssen, in welche Jahrszeit sie jezt fallen, und damit aus den Zeitangaben längst geschehener Facta die Jahrszeit wenigstens ungefähr erkannt werde, und nicht etwa z. B. ein Sommerfeldzug in die dermaligen Wintermonate treffe.

Die Abweichung der bürgerlichen Zeitrechnung von der astronomischen ist demnach unvermeidlich, doch soll sie immer so klein als möglich gehalten, daher zeitweise eine Ausgleichung oder Berichtigung der bürgerlichen Zeitrechnung vorgenommen werden. Zu diesem Zwecke pflegt man im Allgemeinen die nächst zustimmende (nächst kleinere oder nächst größere) Anzahl voller Tage der mittleren Dauer des betreffenden astronomischen Zeitmaßes dem gleichnamigen bürgerlichen beizulegen, und nachdem man dies mehrere Male wiederholt hat, und der mitgeführte Fehler bereits zu vollen Tagen oder Monaten angewachsen ist, die zu viel gezählten Tage oder Monate wieder auszumerzen, oder die zu wenig gezählten nachträglich einzurechnen, einzuschalten. Da das Leztere am häufigsten vorkommt, so nennt man gewöhnlich das ganze Ausgleichen das Einschalten ('εμβαλλειν, intercalare), den eingeschalteten Tag oder Monat den Schalttag oder Schaltmonat (dies v. mensis intercalaris, 'εμβολιμαιος), ein Jahr, in welchem eingeschaltet wird, ein Schaltjahr, und im Gegensaze jedes andere ein Gemeinjahr; endlich wenn das Einschalten in geregelten Zwischenräumen wiederholt wird, jedes solche Intervall einen Schaltkreis oder eine Schaltperiode, und den Inbegriff der Geseze, nach denen eingeschaltet wird, die Schaltweise oder Schaltrechnung.

Bei dem bürgerlichen Jahre begründet sofort die Regelung seiner Dauer nach dem Laufe der Sonne oder des Mondes, die Bemessung der Länge seiner Monate und die Stellung des Schalttages oder Schaltmonates die Form oder Anordnung des Jahres, die Jahrform. Dieser gemäß unterscheidet man die bürgerlichen Jahre, rücksichtlich des Gestirns, nach dessen Bewegung sie sich richten, in Sonnen- oder Mondjahre; je nachdem sie zeitweis berich-

tiget werden oder nicht, in feste oder bewegliche; und die festen, je nachdem sie nur nach einem oder beiden Gestirnen gerichtet werden, in freie oder gebundene. Vornehmlich werden in der Zeitkunde betrachtet: 1. das bewegliche Sonnenjahr, 2. das freie, vom Mondlaufe unabhängige Sonnenjahr, 3. das freie, vom Sonnenlaufe unabhängige Mondjahr, und 4. das gebundene, nach dem Sonnenlaufe geregelte Mondjahr.

Den alten Anordnern der bürgerlichen Zeitrechnungen mußte die Feststellung der Geseze der periodischen Berichtigung derselben, bei ihrer beschränkten Rechenkunst und der mangelhaften Kenntniß der mittleren Dauer der astronomischen Zeitmaße, eine weit schwierigere Aufgabe als uns gegenwärtig sein. Zur Würdigung ihrer Leistungen sollen hier die allgemeinen Grundsäze der mathematischen Ausgleichung der bürgerlichen Zeitrechnung mit der astronomischen erörtert werden. Sie zerfällt 1. in die Ermittelung der angemessensten Perioden der Ausgleichung, und 2. in die möglichst genaue Vertheilung der kleineren und größeren bürgerlichen Zeitmaße in jeder Periode.

17.

I. Bestimmung der Perioden zur Ausgleichung der bürgerlichen Zeitrechnung.

Sei λ die mittlere Länge eines astronomischen Zeitmaßes, l und L die Länge des kürzeren und längeren gleichnamigen ganztägigen bürgerlichen Zeitmaßes, welche als eine untere und obere Grenze der mittleren Dauer λ angewendet werden sollen, indem man voraussezt, daß $l < \lambda < L$ sei. In jeder Periode von P' solchen astronomischen Zeitmaßen mögen m' kürzere und M' längere bürgerliche vorkommen; so muß zuvörderst sein

$$m' + M' = P'.$$

Die Dauer der kürzeren Zeitmaße beträgt $m'l$, jene der längeren $M'L$ und die der ganzen Periode $P'\lambda$. Bei vollkommener Ausgleichung muß die leztere genau den beiden ersteren zusammen genommen gleich sein, folglich hat man

$$m'l + M'L = P'\lambda.$$

Aus diesen Gleichungen findet man

$$(1) \qquad \frac{m'}{L-\lambda} = \frac{M'}{\lambda - l} = \frac{P'}{L-l}.$$

Drückt man demnach die Verhältnisse der drei Unterschiede

$$L-\lambda,\ \lambda-l,\ L-l$$

in ganzen Zahlen aus, so geben diese die gesuchten Zahlen

$$m',\ M',\ P'.$$

Weil jedoch diese Verhältnißzahlen fast immer zu groß ausfallen, so muß

man mittels der zusammenhängenden Brüche (Kettenbrüche) kleinere Näherungswerthe für selbe bestimmen. Seien diese beziehlich

$$m, M, P$$

und (indem man den Buchstaben δ als ein anderes Differenz- oder Variationszeichen verwendet) δP der Ueberschuß der Dauer der astronomischen Periode über die der bürgerlichen,*) so ist zwar gleichfalls

$$m + M = P,$$

aber

$$ml + ML = P\lambda - \delta P$$

und daher der Fehler der gewählten Periode

$$(2) \quad \delta P = P\lambda - (ml + ML) = m(\lambda - l) - M(L - \lambda)$$
$$= P(\lambda - l) - M(L - l) = m(L - l) - P(L - \lambda).$$

Ferner ist die mittlere Länge des bürgerlichen Zeitmaßes in einer solchen Periode

$$(3) \quad \lambda - \Delta\lambda = \frac{ml + ML}{P} = \lambda - \frac{\delta P}{P} = l + \frac{M}{R}(L - l) = L - \frac{m}{P}(L - l)$$

folglich ihre Abweichung von der Dauer des mittleren astronomischen Zeitmaßes

$$(4) \quad \Delta\lambda = \frac{\delta P}{P}.$$

18.

II. Vertheilung der kürzeren und längeren bürgerlichen Zeitmaße in den Ausgleichungs-Perioden.

Bei dieser kann man entweder bedingen, daß jedes bürgerliche Zeitmaß nur so wenig als möglich, mithin um weniger als der Unterschied $L - l$ der beiden anzuwendenden bürgerlichen Zeitmaße L und l, vor dem mittleren astronomischen, also dieses noch sicher in ihm beginne; oder (was zweckmäßiger sein dürfte, damit die Anfänge der wirklichen astronomischen Zeitmaße nicht in drei, sondern nur in zwei bürgerlichen schwanken mögen), daß der Anfang jedes bürgerlichen Zeitmaßes so nahe als möglich an, vor oder nach, den Anfang des mittleren astronomischen falle, folglich ihm höchstens um den halben genannten Unterschied, $\frac{1}{2}(L - l)$, vorgehe oder nachfolge.

Man hat demnach überhaupt unter jede, nach der natürlichen Zahlenfolge aufsteigende, Anzahl (P) von bürgerlichen Zeitmaßen so viel (m) kürzere (l) und so viel (M) längere (L) zu vertheilen, daß die, im §. 17 allgemein ausgedrückte, Abweichung (δP) der Anfänge der bürgerlichen Zeitmaße von jenen der astronomischen die vorgesteckte Grenze nicht übersteige. Wie dies allgemein durchzuführen sei, und daß man auf diesem Wege selbst die angemessensten Ausgleichungs-Perioden zu entdecken vermöge, wird sich leichter, als

*) Eigentlich ist $\delta P = \Delta(P\lambda)$ oder, weil P unveränderlich vorausgesezt wird, $\delta P = P\Delta\lambda$.

hier geschehen könnte, aus den sogleich folgenden Ausgleichungsweisen entnehmen lassen. Ist der Unterschied $L - l = 1$, wie meistens, so ist es am natürlichsten (und lag auch den Alten höchst nahe, obschon nur die Araber davon Gebrauch gemacht zu haben scheinen), die mittlere Dauer (λ) des astronomischen Zeitmaßes wiederholt zu sich selbst zu addiren, die Dauer der aus diesen (P) Zeitmaßen zusammengestellten Zeiträume in ganzen Einheiten zu bestimmen, im ersten Falle mit bloser Weglassung der Brüche, im anderen aber, indem man nur diejenigen Brüche weg läßt, welche kleiner oder höchstens so groß als $\frac{1}{2}$ sind, die größeren aber für 1 annimmt; sofort jede solche ganztägige Dauerzeit von der nächst längeren abzuziehen, um an den Unterschieden die nach einander folgenden bürgerlichen Zeitmaße, so wie sie der gestellten Forderung entsprechen, zu finden. Daß man hier auch nur den in der Länge des Zeitmaßes vorkommenden echten Bruch wiederholt zu sich zu addiren brauche, kann sich jeder leicht selbst sagen.

19.

Ausgleichung des bürgerlichen Sonnenjahres mit dem mittleren tropischen.

I. Bestimmung der zweckmäßigen Schaltperioden für freie Sonnenjahre. Regelt man die Zeitrechnung nach dem mittleren tropischen Sonnenjahre, dessen Dauer λ nur wenig kürzer als $365\frac{1}{4}$ Tag ist; so ist es am angemessensten, mehrentheils Gemeinjahre von $365 = l$ Tagen und von Zeit zu Zeit ein Schaltjahr von $366 = l + 1 = L$ Tagen zu nehmen. Man wird demnach, vermöge §. 17, unter je P Jahren M Schaltjahre sein lassen, indem man nach Möglichkeit genähert

$$\frac{M}{P} = \lambda - 365$$

und dabei P möglichst klein wählt. Dann ist die Dauer jedes Pjährigen Schaltkyklus zu kurz um

$$\delta P = P(\lambda - 365) - M \text{ Tage},$$

die Länge des mittleren bürgerlichen Jahres

$$\lambda - \Delta\lambda = 365 + \frac{M}{P},$$

daher zu kurz um $\Delta\lambda = \delta P : P = \lambda - 365 - \frac{M}{P}$; und dieser Fehler erreicht die Größe von einem vollen Tage nach $1 : \Delta\lambda = P : \delta P$ Jahren.

Es kommt demnach hier ganz auf die anzunehmende mittlere Länge λ des tropischen Jahres an. (§. 13.)

a) Nimmt man nun nach den Alphonsinischen Tafeln und nach Copernicus $\lambda = 365$ T. 5 St. 49′ 16″ $= 365\frac{5239}{21600}$ Tage; $= 365{\cdot}242546$ T.; so hat man, nach der Lehre von den Kettenbrüchen,

$$\begin{array}{l} \quad\;\; 4 \quad\;\; 8 \quad\;\; 7 \quad 2 \quad 2 \quad 17 \\ 21600 : 5239 : 644 : 87 : 35 : 17 : 1, \text{ also} \end{array}$$

$$\frac{M}{P} = \frac{1}{4},\quad \frac{8}{33},\quad \frac{57}{235},\quad \frac{122}{503}, \text{ u. s. f.}$$

b) Nach Lalande ist $\lambda = 365$ T. 5 St. 48′ 48″ $= 365\frac{109}{450}$ T. $= 365{\cdot}242222$ T.; daher findet man

$$\begin{array}{l} \quad\; 4 \quad\;\; 7 \quad\; 1 \quad\; 3 \quad 1 \quad 2 \\ 450 : 109 : 14 : 11 : 3 : 2 : 1, \text{ folglich} \end{array}$$

$$\frac{M}{P} = \frac{1}{4},\ \frac{7}{29},\ \frac{8}{33},\ \frac{31}{128},\ \frac{39}{161},\ \frac{109}{450}.$$

c) Nach Littrow ist $\lambda = 365$ T. 5 St. 48′ 46.″83 $= 365\frac{2092683}{8640000}$ T. $= 365.242209$ T.; daraus erhält man

$$\begin{array}{l} \qquad\quad 4 \qquad\qquad 7 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 3 \qquad\quad 2 \\ 8640000 : 2092683 : 269268 : 207807 : 61461 : 23424 \end{array}$$

$$\frac{8370732}{269268} \quad \frac{1884876}{207807}$$

$$\frac{M}{P} = \frac{1}{4},\quad \frac{7}{29},\quad \frac{8}{33},\quad \frac{31}{128},\quad \frac{70}{289}.$$

Von diesen Näherungsbrüchen heben wir zunächst den kleinsten, $\frac{1}{4}$, und den aus ihn ableitbaren Zwischen- oder eingeschalteten Bruch*), $\frac{1}{5}$ hervor. Sie geben also an, daß man in der Regel nach 4 Jahren, zuweilen aber auch nach 5 Jahren, einen Tag einzuschalten habe. Im ersteren Falle ist das Jahr im Mittel $= 365\frac{1}{4}$ Tage, also nach der Lalande'schen Bestimmung zu lang um $\frac{7}{900}$ Tag, welcher Fehler schon nach $\frac{900}{7} = 128$ Jahren einen Tag beträgt.

Unter den nächst folgenden Näherungsbrüchen ist $\frac{8}{33}$ ausgezeichnet; er läßt erkennen, daß man während 33 Jahren 7 Mal nach 4, und 1 Mal nach 5 Jahren einzuschalten habe. Da ist das Jahr im Durchschnitt $= 365$ T. 5 St. 49′ 5″.5 $= 365{\cdot}242424$ Tage, also gegen die Lalande'sche Bestimmung nur noch zu lang um 17″.5 $= 0.000202$ T., welches erst in 4950 Jahren einen Tag beträgt.

Schon diese kurze Periode gibt eine sehr große Genauigkeit; eine für unsere, noch nicht vollkommene, Kenntniß der mittleren Dauer des tropischen Sonnenjahres gänzlich ausreichende Schärfe bietet jedoch der nächst spätere Näherungsbruch $\frac{31}{128}$, nach welchem man während 128 Jahren 4 Mal nach 5

*) Diese gewinnt man nemlich, wenn man Zähler und Nenner eines Näherungsbruches zum Zähler und Nenner des nächst vorhergehenden wiederholt, jedoch nicht so oft addirt, als wie groß der nächst folgende Theilnenner ist. Z. B. aus $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{4}$ erhält man $\frac{0+1}{1+4} = \frac{1}{5}$, $\frac{1+1}{5+4} = \frac{2}{9}$, $\frac{2+1}{9+4} = \frac{3}{13}$ u. s. f. Vergl. Vega Vorles. 1. Bd., verbessert von Matzka, 1837, S. 133; Salomon und Beskiba, Lehrbücher der Arithmetik. Wien.

und 27 Mal nach 4 Jahren einschalten soll. Dann wird das Jahr im Durchschnitt 365 T. 5 St. 48′ 45″ = 365·242187 T., daher nach der Lalande'schen Bestimmung blos um 3″ = 0·000035 T. zu kurz, welches erst nach 28800 Jahren einen Tag ausmacht, und nach Littrow's Angabe gar nur um 1″.83 = 0.000021 T. zu kurz, was erst nach 47200 Jahren einen Tag beträgt.

20.

Fortsezung.

II. Vertheilung der Schaltjahre in den Schaltkreisen.

Sollen die Schaltjahre dergestalt vertheilt werden, daß der Anfang jedes bürgerlichen Jahres von jenem des mittleren um höchstens einen halben Tag abstehe, so kann man zur Auffindung der Schaltjahre einen der folgenden zwei Wege einschlagen.

I. Erstes Verfahren. Rechnet man nach Lalande die mittlere Dauer des tropischen Jahres $\lambda = 365\frac{109}{450}$ Tage, und nimmt man $\frac{1}{450}$ Tag zur Zeiteinheit, so sind P bürgerliche Jahre, worunter M Schaltjahre vorkommen, vermöge §. 17, Gl. (2), wo jezt $L - l = 450$ und $\lambda - l = 109$ ist, zu kurz um

$$\delta P = 109\,P - 450\,M,$$

folglich, da $\delta P \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}$ Tag oder $\overline{\overline{<}} \frac{450}{2}$, nemlich $\delta P \overline{\overline{<}} 225$ sein muß, ist die Abweichung

$$\delta P = \pm\, r\frac{\pm 109\,P}{450} \equiv 109\,P,\ \text{mod}\ 450,$$

nemlich der kleinste Rest von 109 P durch 450.

Nun soll für das erste Schaltjahr $\delta P > 225$ ausfallen, daher muß $109\,P > 225$ und P der obere Quotient von 225 getheilt durch 109, nemlich $P = -\,q\frac{-225}{109} = 3$ sein. Das 3te Jahr ist also das erste Schaltjahr, mithin ist auch in jedem 4- oder 5jährigen Schaltkreise das 3te Jahr das Schaltjahr, nnd sein Fehler $\delta 3 \equiv 3.109 \equiv 327$, daher $= -123$.

Der Fehler jedes 4jährigen Schaltkreises ist $\delta 4 \equiv 4.109 \equiv 436$, also $= -14$. Nimmt man daher vom 3ten Jahre an jedes 4te zum Schaltjahr, so ist am Schlusse des Jahres $3 + 4n$ der Fehler $\delta(3 + 4n) = \delta 3 + n\delta 4 = -(123 + 14n)$. Soll er noch möglichst klein bleiben, so muß $123 + 14n < 225$, also $n < \frac{102}{14}$, und für das späteste Schaltjahr $n = q\frac{102}{14} = 7$ sein. Man kann demnach höchstens $n = 7$ Mal jedes 4te Jahr, nemlich die 7 Jahre 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31 zu Schaltjahren machen. Dann ist für $n = 7$ der Fehler des lezten $\delta 31 = -(123 + 98) = -221$.

Damit nun das mte Jahr nach 31 das nächstfolgende Schaltjahr sei, muß $\delta(31 + m) = \delta 31 + \delta m = -221 + 109m > 225$, also $m > \frac{446}{109}$.

und die kleinste Zahl $m = 5$ sein, d. h. man muß jezt einmal nach 5 Jahren, folglich im Jahre 36 einschalten; was auch aus dem Früheren (§. 19) hätte erschlossen werden können. Der Fehler von 5 Jahren ist aber $\delta 5 \equiv 5.109 \equiv 545$, also $= 95$, daher im 36sten Jahre $\delta 36 = -221 + 95 = -126$.

Nimmt man von da an n vierjährige Schaltkreise, so ist für das lezte Schaltjahr $\delta(36 + 4n) = \delta 36 + n\delta 4 = -(126 + 14n)$. Da noch immer $126 + 14n < 225$, also $n < \frac{99}{14}$ und dabei doch möglichst groß ausfallen soll, muß $n = q\frac{99}{14} = 7$ sein. Man erhält demnach die weiteren 7 Schaltjahre 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, und den Fehler des lezten $\delta 64 = -(126 + 7.14) = -224$.

Nun ist wieder einmal nach 5 Jahren, d. i. im $64 + 5 = 69$. Jahre einzuschalten, wonach der Fehler $\delta 69 = \delta 64 + \delta 5 = -224 + 95 = -129$ wird.

Auf gleiche Weise findet man $\delta(69 + 4n) = -(129 + 14n)$, also $129 + 14n < 225$, und sofort $n = q\frac{96}{14} = 6$. Man hat demnach nur 6 Mal nach je 4 Jahren, nemlich in den 6 Jahren 73, 77, 81, 85, 89, 93 einzuschalten; und dann wird der Fehler des lezten $\delta 93 = -(129 + 84) = -213$.

Wird neuerdings einmal im 5. Jahre, d. i. im Jahre 98 eingeschaltet, so ist darnach der Fehler $\delta 98 = \delta 93 + \delta 5 = -213 + 95 = -118$.

Weiter findet man $\delta(98 + 4n) = -(118 + 14n)$, daher $118 + 14n < 225$, und $n = q\frac{107}{14} = 7$; mithin die 7 Schaltjahre 102, 106, 110, 114, 118, 122, 126, als die lezten in der 128jährigen Schaltperiode.

II. Zweites Verfahren. Soll das Jahr a zum Schaltjahr gemacht werden, so muß, wenn man die Fehler stets positiv darstellt, sein Fehler

$$\delta a = r\frac{109\,a}{450} > 225, \text{ also} = 225 + \varphi, \text{ dabei } \varphi = 1, 2, \ldots 224,$$

und der Fehler des vorhergehenden Jahres

$$\delta(a-1) = r\frac{109(a-1)}{450} \leqq 225, \text{ also} = 225 - \omega, \text{ dabei } \omega = 0, 1, \ldots 225,$$

sein. Daraus folgt nun

$$109\,(a-1) \equiv 225 - \omega, \text{ mod } 450$$
$$109\,a \equiv 225 + \varphi$$

und wenn man abzieht $\varphi + \omega = 109$,

weil diese Summe < 450 sein muß. Von diesen Zahlen ω und φ muß demnach $\omega = 0, 1, \ldots 108$ und $\varphi = 109, 108, \ldots 1$ sein. Dieselben Congruenzen geben

$$109a \equiv 116 - \omega \equiv 225 + \varphi, \text{ mod } 450.$$

Löst man daher vorerst die Congruenz $109\,x \equiv 1$, mod 450 auf, so findet man, wie früher in §. 19, b)

die Quoti $\quad 4 \quad 7 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 2$

daher die Zahlen $\quad 161 \quad 39 \quad 5 \quad 4 \quad 1 \quad 1$, und $x = -161$.

$\quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad +$

Die Auflösung der gegebenen Congruenz ist demnach

$$a \equiv 161\omega - 224 \equiv 225 - 161\varphi, \text{ mod } 450.$$

Würde man hierin für ω oder φ ihre 109 Werthe sezen, so erhielte man alle 109 Schaltjahre der völlig genauen 450jährigen Periode; folglich auch die 31 der 128jährigen Periode. Um aber alle zu hohen sogleich in der Rechnung auszuscheiden, kann man folgenden Weg einschlagen.

Nimmt man von der lezten Congruenz und von der Gleichung $\varphi + \omega = 109$ die Differenzen, so findet man

$$\Delta a \equiv 161\,\Delta\omega \equiv -161\,\Delta\varphi, \text{ mod } 450; \qquad \Delta\omega = -\Delta\varphi.$$

Weil a nicht größer als 128, mithin $a < 129$ sein soll, so muß $\Delta a < 128$ sein. Damit aber $a < 129$ ausfalle, muß

$$161\omega - 224 < 129, \qquad 129 > 225 - 161\varphi$$

also $\quad \omega < \frac{353}{161} \quad$ und $\quad \varphi > \frac{96}{161}$,

dabei aber auch ω möglichst groß und φ möglichst klein,

daher $\omega = E\frac{353}{161} = 2$ und $\varphi = -E\frac{-96}{161} = 1$ sein. Dafür erhält man

$a = 98 \qquad$ und $a = 64$.

Sollen ferner die kleinsten Zahlen $\Delta\omega$ gesucht werden, bei welchen einerseits $161\Delta\omega < 450$ und andererseits $161\Delta\omega > 450$ ausfällt, so hat man dort $\Delta\omega < \frac{450}{161}$, und da $\Delta\omega > \frac{450}{161}$; also dort $\Delta\omega = E\frac{450}{161} = 2$, und da $\Delta\omega = E\frac{450}{161} + 1 = 3$. Dazu findet sich $\Delta a = -128$ und $\Delta a = 33$; wovon jedoch der erstere Werth zu groß ist. Aus beiden findet man jedoch für $\Delta\omega = 2 + 3 = 5$, sogleich $\Delta a = -128 + 33 = -91$; was brauchbar ist.

Oder, soll $\Delta a \equiv 161\Delta\omega$, mod 450, so klein als möglich ausfallen, muß $161\Delta\omega - 450x$ nahe $= 0$, also $\frac{\Delta\omega}{x}$ nahe $= \frac{450}{161}$ sein. Schickt man sich aber an, die Näherungswerthe von $\frac{450}{161}$ zu nehmen, so findet man

$$\begin{array}{c} 2 \quad 1 \quad 3 \\ 450 : 161 : 128 : 33 \end{array}$$

$\Delta\omega = \quad 2, \quad 3, \quad (5), \quad (8), \quad 11, \ldots,$ daher

$\Delta a = -128, \quad 33, \quad -95, \quad -62, \quad -29, \ldots$

Somit gehören als anwendbare Werthe zusammen

$\Delta\omega = 3$ mit $\Delta a = 33$, und $\Delta\omega = 5$ mit $\Delta a = -95$;

daher auch noch $\Delta\varphi = 3$ mit $\Delta a = -33$, und $\Delta\varphi = 5$ mit $\Delta a = 95$.

Aus diesen Anfangsgliedern und Unterschieden lassen sich nunmehr, indem man ω und φ nicht über die größere Hälfte von 109, d. i. über 55, sich erheben läßt, folgende Reihen zusammen stellen:

$\omega =$ 2, 7, 10, 13, 16, 21, 24, 27, 30, 35, 38, 41, 44, 49, 52, 55.
$a =$ 98, 3, 36, 69, 102, 7, 40, 73, 106, 11, 44, 77, 110, 15, 48, 81.
$\varphi =$ 1, 4, 9, 12, 15, 18, 23, 26, 29, 32, 37, 40, 43, 46, 51, 54.
$a =$ 64, 31, 126, 93, 60, 27, 122, 89, 56, 23, 118, 85, 52, 19, 114, 81.

Man findet demnach auf beiden Wegen folgende 31 Schaltjahre in der 128 jährigen Schaltperiode:

im ersten 33jähr. Schaltkreise die 8 Jahre 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31,
» zweiten 33 » » » 8 » 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64,
» dritten 29 » » » 7 » 69, 73, 77, 81, 85, 89, 93,
» vierten 33 » » » 8 » 98, 102, 106, 110, 114, 118, 122, 126,

und darin unter Einem die Vertheilung der 8 Schaltjahre im 33jährigen Schaltkreise.

21.

Ausgleichung des bürgerlichen Mondmonates mit dem mittleren synodischen.

I. Bestimmung der zweckmäßigen Ausgleichungs-Perioden. Verlangt man, daß die Anfänge der Mondmonate immer nahe auf eine bestimmte Lichtgestalt des Mondes treffen; so nimmt man, weil nach der Tob. Mayer'schen Berechnung (§. 13) die mittlere Dauer des synodischen Mondmonates $\lambda = 29$ T. 12 St. 44′ 2″.8283 $= 29\frac{458{\cdot}428283}{864}$ T. $= \left(30 - \frac{406{\cdot}571717}{864}\right)$ T. $= 29{\cdot}530588290$ T. ist, etwas mehr volle Monate zu $30 = \mathbf{L}$ Tagen als hohle zu $29 = \mathbf{l}$ Tagen; nemlich unter je $\mathbf{P}$ Monate $\mathbf{m}$ hohle. Man wählt daher möglichst genähert

$$\frac{m}{P} = \lambda - 30 = \frac{406{\cdot}571717}{864},$$

und dabei $\mathbf{P}$ so klein als thunlich.

Zur Ermittelung dieser Näherungswerthe nach der Lehre von den Kettenbrüchen dient folgende Rechnung:

			m:P
864000000	405571717	2	1: 2
811143434	369995962	7	7:15
52856566	35575755	1	8:17
35575755	34561622	2	23:49
17280811	1014133	17	399:850
1014133	81100		
7139481	203133	25	
7098931	202750		
40550			

Der in den kleinsten Zahlen ausgedrückte Näherungsbruch $\frac{1}{2}$ und der einschaltbare $\frac{1}{3}$ lassen erkennen, daß man in der Regel jeden zweiten, und nur manchmal den dritten Monat hohl zu machen habe. Aus den zwei folgenden Näherungsbrüchen $\frac{7}{15}$ und $\frac{8}{17}$ erkennt man, daß man gewöhnlich unter je 17 Monaten 8, und zuweilen unter 15 Monaten 7 hohl sein lassen könne. Nimmt man diese Vertheilung nach einander vor, so entspricht man der Forderung des aus diesen beiden ableitbaren Zwischenbruches $\frac{15}{32}$. Ein bereits sehr genauer Näherungswerth ist der nächst spätere $\frac{23}{49}$, nach welchem 2 achtmonatliche Perioden mit einer siebenmonatlichen zu vereinen kommen; er gibt den mittleren bürgerlichen Mondmonat zu $(30 - \frac{23}{49})$ T. $= 29\frac{26}{49}$ T. $=$ 29·5306122 T. $=$ 29 T. 12 St. 44′ 4″.898, also nur um 2″.070 $=$ 0·0000239 T. zu lang, was erst in 41740 Mondmonaten einen Tag ausmacht. — Für völlig genau kann man den noch angegebenen Näherungsbruch $\frac{399}{850}$ ansehen; nach ihm ist der mittlere bürgerliche Mondmonat $= (30 - \frac{399}{850})$ T. $= 29\frac{451}{850}$ T. $=$ 29·530588235 T. $=$ 29 T. 12 St. 44′ 2″.8235, daher dem mittleren synodischen ganz gleich zu achten.

II. **Vertheilung der hohlen Monate.** Hier ist es besonders wünschenswerth, die hohlen Monate so zu vertheilen, daß die Anfänge der bürgerlichen Monate so wenig als möglich, folglich höchstens um einen halben Tag, von den Anfängen der mittleren synodischen Mondmonate abweichen. Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir die eben gefundene, hinreichend genaue Dauer des mittleren synodischen Monates $\lambda = 29\frac{451}{850}$ Tag, und den 850sten Theil des Tages zur Zeiteinheit an. Dann sind P bürgerliche Mondmonate, worunter m hohle vorkommen, vermöge §. 17, Gl. (2), wo jezt $L - l = 850$, $\lambda - l = 451$ und $L - \lambda = 399$ ist, zu kurz um

$$\delta P = 850m - 399P;$$

folglich, da $\delta P \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}$ Tag oder $\overline{\overline{<}}$ 425 sein muß, ist die Abweichung

$$\delta P = \pm r\frac{\mp 399P}{850} \equiv -399P, \text{ mod } 850.$$

Soll nun der ate Monat hohl werden, so muß, wenn man die Fehler durchgängig negativ darstellt, einerseits

$$-\delta(a-1) = r\frac{399(a-1)}{850} < 425, \text{ also } = 425 - \omega,$$

$$\text{dabei } \omega = 1, 2, \ldots 425,$$

und andererseits $$-\delta a = r\frac{399a}{850} \overline{\overline{>}} 425, \text{ also } = 425 + \varphi,$$

$$\text{dabei } \varphi = 0, 1, \ldots 424 \text{ sein.}$$

Hieraus ergibt sich

$$399(a-1) \equiv 425 - \omega, \text{ mod } 850$$
$$399a \equiv 425 + \varphi,$$

und wenn man abzieht $\qquad \varphi + \omega = 399$,
weil diese Summe < 850 sein muß. Von diesen zwei Zahlen muß demnach

$$\omega = 1, 2, \ldots 399 \text{ und } \varphi = 398, 397, \ldots 0 \text{ sein.}$$

Dieselben Congruenzen geben

$$399a \equiv -26 - \omega \equiv 425 + \varphi, \text{ mod } 850.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber für $\frac{399}{850}$ der nächste Näherungsbruch $\frac{23}{49}$, und zwar der vierte, daher $399 \cdot 49 \equiv 1$; die Auflösung dieser Congruenz ist demnach

$$a \equiv 426 - 49\omega \equiv 425 + 49\varphi, \text{ mod } 850;$$

und wenn man davon, so wie von der letzten Gleichung, die Differenzen nimmt,

$$\Delta a \equiv -49\,\Delta\omega \equiv 49\,\Delta\varphi, \text{ mod } 850; \quad \Delta\omega = -\Delta\varphi.$$

Will man nun in der 49monatlichen Periode ihre 23 hohlen Monate vertheilen, so muß $a \leqq 49$ und $\Delta a < 49$ sein. Das Erstere fordert

$$426 - 49\omega < 49, \qquad 425 + 49\varphi - 850 < 49$$

also $\qquad \omega > \frac{377}{49}, \qquad \varphi < \frac{474}{49}$

und zugleich ω so klein und φ so groß als möglich, daher ist

$$\omega = \mathrm{E}\frac{377}{49} + 1 = 8, \qquad \varphi = \mathrm{E}\frac{474}{49} = 9,$$

und dazu gehört $\qquad a = 34, \qquad a = 16.$

Sollen ferner die kleinsten Zahlen $\Delta\omega$ gesucht werden, für welche $\Delta a \equiv -49\,\Delta\omega$, mod 850 so klein als möglich ausfällt, so muß man $850x - 49\,\Delta\omega$ nahe $= 0$, also $\frac{\Delta\omega}{x}$ nahe $= \frac{850}{49}$ haben.

Sucht man hiezu die Näherungswerthe, so rechnet man wie folgt:

$$\begin{array}{c} 17 \quad 2 \\ 850 : 49 : 17 : 15 \end{array}$$

$$\Delta\omega = 17, \; (18), \; 35, \ldots$$

$$\text{daher } \Delta a = 17, -32, -15, \ldots$$

Als brauchbare Werthe gehören demnach zusammen:

$\Delta\omega = 17$ mit $\Delta a = 17$ und $\Delta\omega = 18$ mit $\Delta a = -32$, also auch
$\Delta\varphi = 17$ mit $\Delta a = -17$ und $\Delta\varphi = 18$ mit $\Delta a = 32$.

Daraus kann man demnach, wenn man ω und φ nicht über die größere Hälfte von 399, d. i. nicht über 200, steigen läßt, folgende Reihen zusammen stellen:

$\omega =$ 8, 26, 43, 60, 78, 95, 112, 130, 147, 164, 182, 199,
$a =$ 34, 2, 19, 36, 4, 21, 38, 6, 23, 40, 8, 25;
$\varphi =$ 9, 27, 44, 61, 79, 96, 113, 131, 148, 165, 183, 200,
$a =$ 16, 48, 31, 14, 46, 29, 12, 44, 27, 10, 42, 25.

Demnach sollen in der 49monatlichen Ausgleichungs-Periode folgende 23 Monate hohl sein:

im ersten 17 monatlichen Kyklus die	8	Monate		2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16,
» zweiten 15 »	»	» 7	»	19, 21, 23, 25, 27, 29, 31,
» dritten 17 »	»	» 8	»	34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48.

22.

Ausgleichung des bürgerlichen Mondjahres mit dem mittleren astronomischen.

I. Bestimmung der zweckmäßigen Schaltperioden. Wird die Zeitrechnung nach dem Laufe des Mondes abgeglichen, so kann man sich, wofern nicht die kleinlichste Genauigkeit gefordert wird, auch begnügen, blos nach ganzen Mondjahren die Ausgleichung der bürgerlichen Zeitrechnung vorzunehmen. Die mittlere Dauer des astronomischen Mondjahres fanden wir (§. 13) nach Tob. Mayer $\lambda = 354$ T. 8 St. 48′ 33″.9396 $= 354\frac{79{\cdot}284849}{216}$ T. $= 354{\cdot}3670595$ T.; folglich werden in der Regel gemeine Mondjahre von $354 = l$ Tagen und zeitweise Schaltjahre von $355 = L$ Tagen zu wählen sein. Sollen nun auf je P Mondjahre M Schaltjahre kommen, so nimmt man möglichst nahe

$$\frac{M}{P} = \lambda - 354,$$

und zugleich P so klein als möglich.

Die Näherungswerthe ermittelt man durch folgende Rechnung:

			M:P
216000000	79284849	2	1:2
158569698	57430302	1	1:3
57430302	21854547	2	3:8
43709094	13721208	1	4:11
13721208	8133339	1	7:19
8133339	5587869	1	11:30
5587869	2545470	2	29:79
5090940	2484645	5	156:425
496929	60825	8	

Die beiden ersten Näherungsbrüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ geben zu erkennen, daß bei den Mondjahren in der Regel nach 3, zuweilen aber auch nach 2 Jahren ein Tag einzuschalten ist. Der dritte Näherungsbruch $\frac{3}{8}$ und der vierte $\frac{4}{11}$ zeigen, daß man entweder in 8 Jahren 3 Mal oder etwas genauer in 11 Jahren 4 Mal einschalten soll. Eine solche 11- und 8jährige Periode stellen die durch den fünften Näherungsbruch $\frac{7}{19}$ bestimmte 19jährige Periode mit 7 Schaltjahren zusammen, in welcher das mittlere bürgerliche Mondjahr 354 T. 8 St. 50′ 31.″5 beträgt, folglich noch um 1′ 57.″6 zu lang ist. Diese 19- und jene 11jährige Periode vereint, liefern die vom sechsten Näherungsbruche $\frac{11}{30}$ angegebene 30jährige Periode mit 11 Schaltjahren, in der das mittlere Jahr

354 T. 8 St. 48′ 0″ hält, mithin um 33.″94 zu kurz ist. Höchst genau wäre die vom siebenten Näherungsbruche $\frac{29}{79}$ angedeutete 79jährige Periode mit 29 Schaltjahren, weil ihr mittleres Jahr 354 T. 8 St. 48′ 36″.45 enthielte, also nur um 2″.51 zu lang wäre. Für ganz genau läßt sich endlich die durch den achten Näherungsbruch $\frac{156}{425}$ bestimmte 425jährige Periode mit 156 Schaltjahren ansehen; denn ihr mittleres Jahr ist $= 354\frac{156}{425}$ Tag $=$ 354 T. 8 St. 48′ 33″.8824, mithin von dem mittleren astronomischen Mondjahre gewiß um weniger als dessen wahrscheinlichen Beobachtungsfehler verschieden, und sofort darf es ihm gleich geachtet werden.

II. Vertheilung der Schaltjahre in den Schaltkreisen.

Will man die Schaltjahre so vertheilen, daß der Anfang jedes bürgerlichen Mondjahres von dem des mittleren astronomischen um höchstens einen halben Tag abstehe; so nehme man, zur Vereinfachung der Rechnung, die eben gefundene zureichend genaue Dauer des mittleren astronomischen Mondjahres $\lambda = 354\frac{156}{425}$ Tag, und den 425sten Theil des Tages zur Zeiteinheit an. Dann sind P bürgerliche Mondjahre, unter denen M Schaltjahre vorkommen, vermöge §. 17, wo jetzt $L - l = 425$, und $\lambda - l = 156$ ist, zu kurz um

$$\delta P = 156\,P - 425\,M,$$

daher, weil $\delta P \overline{\overline{<}}\ \frac{1}{2}$ Tag oder < 213 sein soll, ist der Fehler

$$\delta P = \pm\, r\frac{\pm 156\,P}{425} \equiv 156\,P, \text{ mod } 425.$$

Da in der Regel im dritten und zeitweise im zweiten Jahre einzuschalten ist, so berechnet man dafür die Fehler

$$\delta 2 = 312 - 425 = -113,$$
$$\delta 3 = 468 - 425 = \quad 43.$$

Bezeichnet nun a ein Schaltjahr überhaupt, so muß das erste Schaltjahr $a = 2$ und sein Fehler $\delta a = \delta 2 = -112$ werden. Uebergeht man ferner von einem Schaltjahre a auf ein um Δa späteres $a + \Delta a$, so ändert sich sein Fehler, von δa in $\delta(a + \Delta a) = \delta a + \delta\Delta a$, um $\delta\Delta a$; folglich, da diese Aenderung von δa auch, vermöge Vorbeg. XVI, durch $\Delta\delta a$ darzustellen kommt, ist $\Delta\delta a = \delta\Delta a$, d. h. die Aenderung des Fehlers gleich dem Fehler der Aenderung der Jahrzahl. Soll dies spätere Jahr gleichfalls ein Schaltjahr sein, so muß es um

$\Delta a = 2$ oder 3 Jahre später eintreten,

und bis zu ihm der Fehler sich ändern um

$\Delta\delta a = \delta\Delta a = \delta 2$ oder $\delta 3$, d. i. um
$\Delta\delta a = \delta\Delta a = -113$ oder 43.

Wäre nun δa negativ, und käme dazu noch $\Delta\delta a = -113$, so müßte $-(\delta a + \delta\Delta a) < 213$, also $-\delta a < 100$ sein. So oft demnach der Fehler δa negativ und < 100 ist, kann man um $\Delta a = 2$ Jahr später einschalten

und zum Fehler $\Delta\delta a = -113$ hinzufügen; sonst wird immer nach $\Delta a = 3$ Jahren eingeschaltet und dem Fehler $\Delta\delta a = 43$ zugelegt. Auf diese Weise müssen die Fehler am Ende der Schaltjahre durchgängig negativ ausfallen, und man vermag sehr leicht sowohl die negativen Fehler δa, als auch die 355tägigen Schaltjahre a, nach deren Schluß sie eintreten, dabei leztere nach der natürlichen Zahlenfolge, in folgende zwei Reihen, die bis an den Schluß einer 79jährigen Schaltperiode reichen, zusammen zu stellen.

$-\delta a =$ 113, 70, 183, 140, 97, 210, 167, 124, 81, 194, 151, 108, 65, 178, 135,
$a =$ 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 21, 24, 26, 29, 32, 35, 37, 40,
$-\ a =$ 92, 205, 162, 119, 76, 189, 146, 103, 60, 173, 130, 87, 200, 157,
$a =$ 43, 45, 48, 51, 54, 56, 59, 62, 65, 67, 70, 73, 75, 78.

Dieselben Jahre findet man auch nach der in §. 20 II. und in §. 21 angewendeten Methode.

III. **Anordnung des freien Mondjahres.** Nach dem Gefundenen läßt sich nun das freie Mondjahr entweder dermaßen anordnen, daß man die hohlen Mondmonate fortlaufend nach einer der in §. 21. II ermittelten Perioden vertheilt, und dann je 12 nach einander folgende Monate in ein Mondjahr zusammen faßt, welches daher 6 oder 7 volle Monate, also 354 oder 355 Tage hält; oder man kann, in den (§. 22. I) gefundenen Schaltperioden, 354tägige gemeine Mondjahre mit 355tägigen Schaltjahren abwechseln lassen, und den Schalttag irgendwo, am besten am Ende des Jahres, einrechnen. Nach beiden Verfahren werden die Längen der Jahre fast immer gleich ausfallen.

23.

Ausgleichung des Mondjahres mit dem tropischen Sonnenjahre.

Sollen, wie bei den meisten semitischen Völkern, die Feste des Cultus nach dem Stande des Mondes und der Sonne gefeiert werden, so sind die Umlaufszeiten beider Gestirne dergestalt auszugleichen, daß sie als aliquote Theile desselben Zeitraumes erscheinen, oder daß eine volle Anzahl der einen Umlaufszeiten nahe genug einer vollen Anzahl der anderen gleicht; mit anderen Worten, es ist ein Kreis von ganzen nach der Sonne abgemessenen Jahren zu finden, der zugleich eine ganze Zahl synodischer Monate enthält. Ein solcher Zeitkreis wird sich ergeben, wenn man das Verhältniß beider Umlaufszeiten, wenigstens genähert, in ganzen Zahlen ausdrückt; denn ist dies Verhältniß

Tropisches Jahr : Synodischer Monat $= a : m$,

so hat man

m trop. Jahre $=$ a synod. Monate $=$ gesuchter Zeitkreis.

Da sich hiebei zeigt, daß das tropische Jahr nahe $12\frac{1}{3}$ synodische Monate enthält, so kann man bald $12 = l$, bald $13 = L$ synodische Monate in ein

Mondjahr zusammen fassen, welches auch im ersten Falle ein Gemeinjahr, im anderen aber, wo es um den Schaltmonat länger ist, ein Schaltjahr genannt wird, und sonach ein gebundenes Mondjahr ist.

I. Bestimmung der Schaltperioden für gebundene Mondjahre. Nach der Bestimmung T. Mayer's ist der synodische Monat $= 29\frac{458\cdot428283}{864}$ Tage $= \frac{25514\cdot428283}{864}$ Tag, und nach Lalande's Berechnung das tropische Sonnenjahr $= 365$ T. 5 St. $48'\ 48'' = 365\frac{209\cdot28}{864}$ Tag $= \frac{315569\cdot28}{864}$ Tag.

Demnach ist

$$\frac{\text{trop. Jahr}}{\text{synod. Monat}} = \frac{31556928}{2551442\cdot8283} = 12\frac{9396140604}{25514428283}$$
$$= 12\cdot36826773 = \lambda.$$

Man hat sofort, vermöge §. 17, unter je P Jahre M Schaltjahre zu vertheilen, indem man möglichst genähert

$$\frac{M}{P} = \lambda - 12 = \frac{9396140604}{25514428283} = 0\cdot36826773$$

und dabei P so klein als möglich wählt.

Sucht man die Näherungswerthe, so findet man zuvörderst die Quoti

$$2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 17,\ 2,\ 20,\ldots$$

und darnach die Näherungsbrüche $\frac{M}{P} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{7}{19}, \frac{123}{334}, \frac{253}{687}, \ldots$

Die fünf ersten Näherungsbrüche, und der aus dem vierten und fünften folgende Zwischenbruch $\frac{11}{30}$ sind ganz die sechs ersten Näherungsbrüche bei der Ausgleichung der bürgerlichen freien Mondjahre; folglich sind wenigstens die kleineren Schaltkreise, nach denen man das Mondjahr, durch Einschaltung eines Monates, mit dem Sonnenlaufe ausgleicht, dieselben, als nach welchen man es, durch Einschaltung eines Tages, mit dem Mondlaufe in Uebereinstimmung bringt. Ziemlich genau ist der fünfte Näherungsbruch $\frac{7}{19} = 0\cdot368421$, nur um $0\cdot000158$ zu groß; noch genauer ist der sechste $\frac{123}{334} = 0\cdot3682635$, also blos um $0\cdot000043$ zu klein; endlich für völlig genau dürfte man immerhin den siebenten $\frac{253}{687} = 0\cdot36826783$ anerkennen, da er blos um $0\cdot0000001$ zu groß ist.

Weil nun das Verhältniß

$$\frac{\text{trop. Jahr}}{\text{synod. Monat}} = \lambda = 12 + \frac{M}{P}$$

ist, so findet man genähert

P tropische Jahre = (12 P + M) synodische Monate;

z. B. nach dem Näherungsbruche $\frac{7}{19}$, nahe

19 tropische Jahre = 235 synodische Monate;

nemlich nach etwa 19 tropischen Jahren oder 235 synodischen Mondmonaten, dem von Meton entdeckten Mondkreise, (§. 14. II) wiederkehren dieselben Stellungen der Lichtgestalten des Mondes gegen die Jahrpunkte.

II. Vertheilung der Schaltmonate in den Schaltkreisen der gebundenen Mondjahre. Sollen die Anfänge der Mondjahre von jenen der tropischen Jahre möglichst wenig, folglich höchstens um einen halben synodischen Monat abstehen; so nehme man, für die Austheilung der Schaltmonate, zur Vereinfachung der Rechnung, die eben gefundene Dauer des tropischen Jahres $\lambda = 12\frac{253}{687}$ synodische Monate, und den 687sten Theil eines solchen Monates zur Zeiteinheit an. Dann sind P astronomische Mondjahre mit M Schaltmonaten, vermöge §. 17, Gl. (2), wo für den vorliegenden Fall $L - l = 687$ und $\lambda - l = 253$ ist, kürzer als P tropische Jahre um

$$\delta P = 253P - 687M;$$

folglich, weil $\delta P \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}$ synod. Monat oder < 344 sein soll, ist der Fehler

$$\delta P = \pm r\frac{\pm 253P}{687} \equiv 253P, \bmod 687.$$

Gewöhnlich wird, wie bei freien Mondjahren (§. 22.), im dritten und zuweilen im zweiten Jahre eingeschaltet, folglich sind dafür die Fehler

$$\delta 2 = 506 - 687 = -181$$
$$\delta 3 = 759 - 687 = \quad 72.$$

Bezeichnet wieder a ein Schaltjahr überhaupt, so ist das erste Schaltjahr $a = 2$ und sein Fehler $\delta a = \delta 2 = -181$. Das nächste Schaltjahr $a + \Delta a$ tritt um

$$\Delta a = 2 \text{ oder } 3 \text{ Jahre später ein,}$$

und inzwischen ändert sich der Fehler um

$$\Delta\delta a = \delta\Delta a = -181 \text{ oder } 72.$$

Sollte dabei δa negativ sein, und dazu noch $\Delta\delta a = -181$ kommen, so müßte $-(\delta a + \delta\Delta a) < 344$ also $-\delta a < 163$ sein. So oft demnach der Fehler δa negativ und < 163 ist, kann man um $\Delta a = 2$ Jahre später einschalten und zum Fehler $\Delta\delta a = -181$ hinzufügen; sonst wird immer nach $\Delta a = 3$ Jahren eingeschaltet, und dem Fehler $\Delta\delta a = 72$ zugesezt. Auf diese Weise fallen am Ende der Schaltjahre die Fehler stets negativ aus, und man ist im Stande, sowohl die negativen Fehler δa, als auch die 13monatlichen Schaltjahre, denen sie zukommen, in folgende zwei Reihen, welche ebenfalls, wie die obige (in §. 22. II), 79 Jahre umfassen, zusammen zu stellen.

$-\delta a =$ 181, 109, 290, 218, 146, 327, 255, 183, 111, 292, 220, 148, 329, 257, 185,
$a =$ 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 21, 24, 26, 29, 32, $\underline{34}$, 37, 40,

$-\delta a =$ 366, 294, 222, 150, 331, 259, 187, 115, 296, 224, 152, 333, 261, 189,
$a =$ $\underline{42}$, 45, 48, 51, $\underline{53}$, 56, 59, 62, $\underline{64}$, 67, 70, $\underline{72}$, 75, 78.

Bis auf die unterstrichenen Jahre, in denen die Einschaltung um ein Jahr früher erfolgt, stimmen diese 29 Schaltjahre ganz mit den oben (in §. 22. II) für die freien Mondjahre gefundenen überein.

24.

Anzahl und Kennzeichen der Schaltjahre einer Aere.

I. Sind in einer Aere die Schaltjahre periodisch vertheilt, dergestalt, daß in jeder ϖjährigen Periode ε Schaltjahre vorkommen, namentlich die Jahre $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{\varepsilon-1}$; so läßt sich aus diesen Angaben leicht die Hilfszahl δ nach Vorb. (177) oder (178) bestimmen, mit der Bemerkung, daß weil vor dem ersten Jahre kein Schaltjahr sein kann, nach (180) $\varepsilon+\delta = 0, 1, \ldots \varpi-1$ sein muß; und sofort ergibt sich die Anzahl e der vom Beginn der Aere bis zum Anfange des Jahres a verflossenen Schaltjahre, wenn man in Vorb. (189) x in a, und u in e umtauscht,

$$(5) \qquad e = q\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}.$$

Das Jahr ist ein Schaltjahr, wenn bei dem Uebergange von a auf a + 1 die Anzahl e gleichfalls um 1 zunimmt, also vermöge (196), wenn

$$(6) \qquad r\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi} \geqq \varpi-\varepsilon \text{ oder } > \varpi-\varepsilon-1$$
$$= \varpi-\varepsilon,\ \varpi-\varepsilon+1, \ldots \varpi-1 \text{ ist.}$$

Bezeichnet man die Anzahl der Einschaltungen (der Schalttage oder Schaltmonate), welche im Jahre a überhaupt eintreten, mit i; wornach also i in Gemeinjahren 0 und in Schaltjahren 1 ist; so erhält man dafür, indem man in Gl. (193) i statt w schreibt, den Ausdruck

$$(7) \qquad i = q\frac{\varepsilon(a+1)+\delta}{\varpi} - q\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi} = q\frac{\varepsilon + r\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}}{\varpi}.$$

Beispiel. Rechnet man nach freien Mondjahren, und läßt man, so wie oben in §. 22. II. gefunden wurde, in jeder 30jährigen Periode die 11 Jahre 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 21, 24, 26, 29, Schaltjahre sein; so hat man $\varpi = 30$, $\varepsilon = 11$, und in (175)

$$\Sigma\xi = 2+5+7+10+13+15+18+21+24+26+29 \equiv 20, \text{mod } 30$$

daher nach (177)

$$\delta \equiv -\frac{11+1}{2} - 20, \text{mod } 30 \equiv -6+10 \equiv 4$$

und vermöge (180) $\delta = 4$.

In einer solchen Aere verfließen bis zum Jahre a der Schaltjahre $e = q\frac{11a+4}{30}$; und das Jahr a ist selbst ein Schaltjahr, wenn $r\frac{11a+4}{30} \geqq 19$ oder > 18; überhaupt enthält es $i = q\frac{11 + r\frac{11a+4}{30}}{30}$ Schalttage.

Z. E. Bis zum Anfange des Jahres $1246 = a$ sind $e = \mathfrak{q}\frac{13710}{30} = 457$ Schaltjahre, mithin $(1246 - 1) - 457 = 1245 - 457 = 788$ Gemeinjahre vergangen, es ist $\mathfrak{r}\frac{13710}{30} = 0$, und $i = \mathfrak{q}\frac{11+0}{30} = 0$, folglich dieses Jahr ein Gemeinjahr.

II. Ist insbesondere in einem ϖjährigen Schaltkreise nur das Jahr ξ ein Schaltjahr, so verfließen in der Aere bis zum Jahre a vermöge (202)

$$(8) \qquad e = \mathfrak{q}\frac{a+\varpi-\xi-1}{\varpi} \text{ Schaltjahre;}$$

das Jahr a ist ein Schaltjahr, so oft $a \equiv \xi$, mod ϖ ist, und es kommen in ihm überhaupt

$$(9) \quad i = \mathfrak{q}\frac{a+\varpi-\xi}{\varpi} - \mathfrak{q}\frac{a+\varpi-\xi-1}{\varpi} = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{a-\xi}{\varpi}}{\varpi} \text{ Einschaltungen vor.}$$

Beispiel. Läßt man bei einer Zeitrechnung nach Sonnenjahren, so wie oben (§. 19.) gefunden wurde, in jedem $4 = \varpi$jährigen Schaltkreise eines der Jahre $1, 2, 3, 4 = \xi$ den Schalttag enthalten; so kommen bis zum Jahre a

$$\text{Schaltjahre } e = \mathfrak{q}\frac{a+2}{4},\ \mathfrak{q}\frac{a+1}{4},\ \mathfrak{q}\frac{a}{4},\ \mathfrak{q}\frac{a-1}{4} \text{ vor;}$$

das Jahr a ist ein Schaltjahr, wenn

$$a \equiv 1, \qquad 2, \qquad 3, \qquad 0, \text{ mod } 4;$$

und enthält Schalttage $i = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{a-1}{4}}{4},\ \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{a-2}{4}}{4},\ \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{a+1}{4}}{4},\ \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{a}{4}}{4}$.

25.

Zu einem Monatstage den Jahrstag und umgekehrt bestimmen.

Um zu jedem Monatstage anzugeben, der wievielte Tag im Jahre er sei, können zwar gleichfalls aus den Längen der Monate algebraische Formen aufgestellt werden, wie es bei einigen Zeitrechnungen geschehen soll; allein meistens ist es bequemer, in einem besonderen Täfelchen ersichtlich zu machen: die Folge und Dauer der Monate der angegebenen Jahrform, ferner die Summe der nach jedem Monate abgelaufenen Tage, und den Jahrstag des nullten Tages jedweden Monates, nemlich der wievielte Tag im Jahre der lezte Tag des nächst vorangehenden Monates ist, oder nach dem wievielten Tage des Jahres dieser Monat anfängt.

Zeigt nun eine solche Tafel, daß der 0te Tag eines Monates der $d_0{}^{te}$ im Jahre ist, so muß der t^{te} Tag dieses Monates der $d_0 + t = d^{te}$ Tag des Jahres sein.

Mittels derselben Tafel kann man auch umgekehrt bestimmen, in welchen Monat und auf den wievielten Tag desselben der d^{te} Tag des Jahres trifft. Denn zeigt die Tafel, daß der diesem d^{ten} Jahrstage zunächst vorangehende nullte Monatstag der $d_0{}^{te}$ Tag im Jahre ist, so muß der d^{te} Jahrstag in demselben Monate der $d - d_0 = t^{te}$ Tag sein.

Anwendungen hievon finden sich in §. 41.

26.

Zu einem Jahr und Tag den Tag der Aere bestimmen.

Bei einer Zeitangabe (einem Datum) wird gewöhnlich das Jahr einer Aere, der Monat desselben, und darin der Tag angeführt. Statt des Monatstages kann man, nach dem so eben Gesagten, den für die Rechnung bequemeren Jahrstag einführen. Da nun wirft sich die in vielen folgenden Forschungen wiederkehrende wichtige Frage auf: »Wenn aus einem Jahre einer Aere ein Tag, mittels seiner Nummer, angegeben wird; der wievielte Tag ist er in der Aere selbst?«

I. Sei das Jahr a der Aere, und in ihm der d^{te} Tag bezeichnet, so sind bis zum Anfange dieses Jahres $a - 1$ Jahre verflossen. Unter diesen seien e Schaltjahre, folglich $a - 1 - e$ Gemeinjahre; dabei halte ein Gemeinjahr l, ein Schaltjahr aber $l + \Delta l$ Tage. Dann vergingen bis zum Anfange jenes Jahres

$$(a - 1 - e)\, l + e\,(l + \Delta l) = (a - 1)\, l + e\Delta l \text{ Tage.}$$

Soll nun sein d^{ter} Tag der n^{te} in der ganzen Aere sein, so hat man

$$(10) \qquad n = (a - 1)\, l + e\Delta l + d.$$

Sind die Schaltjahre, auf die (in §. 24.) beschriebene Weise, periodisch in der Aere vertheilt, so kann man e durch den dortigen Ausdruck (5) oder (8) ersetzen, und erhält

$$(11) \qquad n = (a - 1)\, l + q\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}\, \Delta l + d.$$

II. Die bis zum Anfange des Jahres a vergangenen

$$n - d = (a - 1)\, l + q\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}\, \Delta l \text{ Tage}$$

gestatten noch ein Paar andere brauchbare Ausdrücke. Es ist

$$a = \varpi Q\frac{a}{\varpi} + R\frac{a}{\varpi},$$

daher
$$q\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi} = \varepsilon Q\frac{a}{\varpi} + q\frac{\varepsilon R\frac{a}{\varpi} + \delta}{\varpi},$$

folglich wird

$$n - d = (\varpi l + \varepsilon \Delta l)\, Q\frac{a}{\varpi} + \left(R\frac{a}{\varpi} - 1\right) l + q\frac{\varepsilon R\frac{a}{\varpi} + \delta}{\varpi}\, \Delta l.$$

Da in jeder ϖjährigen Schaltperiode ε Schaltjahre vorkommen, welche um Δl Tage länger als die $l$tägigen Gemeinjahre sind, so enthält die ganze Periode

$$(12) \qquad \varpi l + \varepsilon \Delta l = p \text{ Tage};$$

und dadurch übergeht obiger Ausdruck in

$$(13) \quad n - d = p\,\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi} + \left(\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} - 1\right) l + \mathfrak{q}\,\frac{\varepsilon\,\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} + \delta}{\varpi}\,\Delta l.$$

Setzt man endlich hierin, vermöge VI, (7) und (8), $\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi} = \mathfrak{q}\frac{a-1}{\varpi}$ und $\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} = \mathfrak{r}\frac{a-1}{\varpi} + 1$, oder gleich ursprünglich $a - 1 = \varpi\mathfrak{q}\frac{a-1}{\varpi} + \mathfrak{r}\frac{a-1}{\varpi}$; so gewinnt man auch noch den Ausdruck

$$(14) \quad n - d = p\,\mathfrak{q}\frac{a-1}{\varpi} + \mathfrak{r}\frac{a-1}{\varpi}\, l + \mathfrak{q}\,\frac{\varepsilon\,\mathfrak{r}\frac{a-1}{\varpi} + \varepsilon + \delta}{\varpi}\,\Delta l.$$

Vom Anbeginn der Aere sind aber bis zum Jahre a volle ϖjährige Schaltkreise $\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi} = \mathfrak{q}\frac{a-1}{\varpi}$, und vom laufenden Schaltkreise noch $\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} - 1 = \mathfrak{r}\frac{a-1}{\varpi}$ Jahre verflossen. Die ersten Glieder der aufgestellten Ausdrücke geben demnach die in den verflossenen ganzen Schaltkreisen, die zwei letzten Glieder zusammen, die in den abgelaufenen Jahren des eben im Zuge begriffenen Schaltkreises enthaltenen Tage an, insbesondere das zweite Glied die gewöhnlich laufenden Tage und das dritte Glied die Schalttage; und darnach lassen sich jene Ausdrücke auch direct aufstellen. Sie gewähren hauptsächlich den Vortheil, daß man in einer Tafel die, in den nach einander folgenden Anzahlen voller Schaltkreise (mindestens in 1, 2, ... 9 Schaltkreisen) enthaltenen Tage, und in einer anderen die nach den einzelnen Jahren eines Schaltkreises vergangenen Tage verzeichnen, und durch Anwendung dieser Tafeln die Rechnung bedeutend abkürzen kann.

27.

Zu einem Tage einer Aere Jahr und Tag bestimmen.

Eben so wichtig, wie die vorhergehende, ist die umgekehrte Aufgabe: »Wenn ein Tag einer Aere angegeben wird, zu bestimmen, in das wievielte Jahr, und auf den wievielten Tag desselben er trifft.«

Sei nun der $n$te Tag einer Aere angegeben, und das Jahr a so wie der Tag d desselben zu suchen, worauf er trifft.

I. Geschieht die Einschaltung beliebig, periodisch oder nicht, so kann man a und d aus der Gleichung

$$(10) \qquad (a - 1)\, l + e\Delta l + d = n$$

auf folgende Weise finden. Zunächst erhält man aus ihr

$$(a-1)\,l+d=n-e\Delta l.$$

Vernachlässigt man hierin vorerst die Schalttage $e\Delta l$, deren in Vergleich gegen n nur wenige sind, und bezeichnet man den vorläufigen, wenigstens einiger Maßen genäherten, Werth von a durch a'; so kann man, weil $d=1, 2, \ldots l+\Delta l$ sein muß, sezen

$$a'-1=\mathfrak{Q}\frac{n}{l}$$

oder (15) $$a'=\mathfrak{Q}\frac{n}{l}+1=-\,\mathfrak{q}\frac{-n}{l}$$

$$=\text{oberer Quotus von } n:l.$$

Zu dieser ungefähr richtigen Jahrzahl a', welche höchstens etwas zu hoch sein kann, läßt sich sofort die ihr entsprechende Anzahl der Schaltjahre e' berechnen, die folglich gleichfalls etwas zu groß sich ergeben könnte.

Sei nun die richtige Jahrzahl a um $\Delta a'$ kleiner als die beiläufige a', nemlich (16) $a=a'-\Delta a'$,
und die wahre Anzahl der Schaltjahre e um $\Delta e'$ kleiner als die beiläufige e' nemlich (17) $e=e'-\Delta e'$.

Dann liefern obige Gleichungen

$$d=n-(e'-\Delta e')\,\Delta l-l\,(a'-1-\Delta a')$$

$$=n-l\,\mathfrak{Q}\frac{n}{l}-e'\Delta l+l\,.\,\Delta a'+\Delta l\,.\,\Delta e'$$

oder (18) $$d=\mathfrak{R}\frac{n}{l}-e'\Delta l+l\Delta a'+\Delta l\,.\,\Delta e'.$$

So lange nunmehr $e'\Delta l<\mathfrak{R}\frac{n}{l}$ ausfällt, kann man sowohl $\Delta a'=0$, als auch $\Delta e'=0$ sezen, und findet sonach

$$a=a',\quad e=e',\quad d=\mathfrak{R}\frac{n}{l}-e'\Delta l.$$

Sobald aber $e'\Delta l\ \overline{\overline{>}}\ \mathfrak{R}\frac{n}{l}$ sich ergibt, bemißt man, weil $d=1, 2, \ldots l+\Delta l$ sein muß, nach dem Unterschiede $e'\Delta l-\mathfrak{R}\frac{n}{l}$ die erforderliche Zurückschiebung $\Delta a'$ des Jahres a', so daß $l\Delta a'$ größer als dieser Unterschied ausfällt, indem man

(19) $$\Delta a'=\text{oberen Quotus von}\left(e'\Delta l-\mathfrak{R}\frac{n}{l}\right):l.$$

$$=-\,\mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{n}{l}-e'\Delta l}{l}=\mathfrak{Q}\frac{e'\Delta l-\mathfrak{R}\frac{n}{l}}{l}+1$$

annimmt. Daraus ersieht man dann zugleich, ohne besondere Schwierigkeit, die Anzahl $\Delta e'$ der Schaltjahre, um welche bei der bestehenden Schaltweise bis zum Jahre $a'-\Delta a'$ weniger sind, als bis zum Jahre a'. Kennt man aber $\Delta a'$ und $\Delta e'$, so kann man sogleich a, e und d genau berechnen.

II. Etwas einfacher stellt sich die Lösung der Aufgabe auf folgendem Wege. Aus der Gleichung (10) folgt sogleich

$$a - 1 \leqq \mathfrak{Q}\frac{n}{l}$$

daher $$a - 1 = \mathfrak{Q}\frac{n}{l} - \Delta a.$$

Dann ist $$d = n - l\,\mathfrak{Q}\frac{n}{l} - e\Delta l + l\Delta a,$$

oder $$d = \mathfrak{R}\frac{n}{l} - e\Delta l + l\Delta a.$$

Bestimmt man demnach $n = l\,\mathfrak{Q}\frac{n}{l} + \mathfrak{R}\frac{n}{l}$, nemlich, indem man n durch l außerordentlich theilt, die Zahlen $\mathfrak{Q}\frac{n}{l}$ und $\mathfrak{R}\frac{n}{l}$; so ist ein vorläufiger Werth für die Jahrzahl $a = \mathfrak{Q}\frac{n}{l} + 1$. Dazu sucht man e, und $\mathfrak{R}\frac{n}{l} - e\Delta l$, woraus man dann fast immer sehr leicht entnimmt, wie groß man, damit d wenigstens 1 und höchstens $= l + \Delta l$ werde, die Correction Δa zu nehmen hat. Nach ihr bestimmt man sofort die richtige Jahrzahl

$$(20) \qquad a = \mathfrak{Q}\frac{n}{l} + 1 - \Delta a,$$

aus dieser die wahre Anzahl e der bisherigen Einschaltungen, und darnach endlich den Jahrestag

$$(21) \qquad d = \mathfrak{R}\frac{n}{l} - e\Delta l + l\Delta a.$$

28.

Fortsetzung.

III. Wird periodisch eingeschaltet, nemlich in je ϖ Jahren ε Mal, so kann man a und d aus einer der weiteren Gleichungen in §. 26. berechnen. Wählt man dazu die erstere

$$(11) \qquad (a-1)\,l + \mathfrak{q}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}\Delta l + d = n,$$

so multiplicire man sie mit ϖ, und setze darin

$$\varpi\,\mathfrak{q}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi} = \varepsilon a + \delta - \mathfrak{r}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi};$$

dadurch erhält man

$$a\,(\varpi l + \varepsilon\Delta l) - \varpi l + \varpi d - \mathfrak{r}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}\Delta l = \varpi n - \Delta l.\delta$$

oder wegen §. 26. Gl. (12)

$$p\,(a-1) + \varpi d - \mathfrak{r}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}\Delta l = \varpi n - (\delta + \varepsilon)\,\Delta l.$$

Ist nun $$d = 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ l,$$

folglich $$\varpi d = \varpi,\ 2\varpi,\ \ldots\ldots\ \varpi l,$$

so ist $\qquad \mathfrak{r}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi} = \varpi - 1,\ \varpi - 2, \ldots\ldots 1,\ 0,$

daher $\quad \varpi d - \mathfrak{r}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}\,\Delta l = \varpi - (\varpi - 1)\,\Delta l, \ldots\ldots \varpi l < p.$

Diese Reste werden also im Allgemeinen so lange negativ ausfallen, als nicht $\varpi d \overline{\overline{>}} \mathfrak{r}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}\,\Delta l$, folglich $d \overline{\overline{>}} 1 + \left(\mathfrak{r}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}\,\Delta l \underset{\mathfrak{Q}}{:} \varpi\right)$ ist; jedoch sicher positiv, sobald $d \overline{\overline{>}} \Delta l$ ist. Für den gewöhnlichsten Fall, wo $\Delta l = 1$ ist, werden sie jedoch durchgängig positiv > 0 und $< p$.

Ist aber in einem Schaltjahre $d = l + \Delta l$, so muß $\mathfrak{r}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi} \overline{\overline{>}} \varpi - \varepsilon$ sein, also ist $\varpi d - \mathfrak{r}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi} \overline{\overline{<}} \varpi l + \varepsilon\Delta l$, d. h. höchstens $= p$.

Man kann demnach, wenn $\Delta l = 1$ ist, jederzeit, und falls $\Delta l > 1$ sein sollte, wenigstens für eine äußerst genaue Annäherung, vermöge Vorbegr. V, 2, setzen

$$(22) \qquad a = \mathfrak{Q}\frac{\varpi n - (\delta+\varepsilon)\,\Delta l}{p} + 1 = \mathfrak{Q}\frac{\varpi(n+1) - \Delta l.\delta}{p}$$

und $\quad \varpi d - \mathfrak{r}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}\,\Delta l = \mathfrak{R}\frac{\varpi n - (\delta+\varepsilon)\,\Delta l}{p} = \mathfrak{R}\frac{\omega(n+1) - \Delta l.\delta}{p};$

woraus sogleich sich ergibt

$$(23) \qquad d = \left(\mathfrak{r}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}\,\Delta l + \mathfrak{R}\frac{\varpi n - (\delta+\varepsilon)\Delta l}{p}\right) : \varpi.$$

Doch kann man auch nach Gl. (11) den Ausdruck

$$(24) \qquad d = n - (a - 1)\,l - \mathfrak{q}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}\,\Delta l \text{ verwenden.}$$

Für den äußerst seltenen Fall, wo $d > l + i\Delta l$ (die Zahl i nach §. 24, (7) oder (9) bestimmt), d. h. d größer als die Anzahl der Tage des Jahres a werden sollte, was nur möglich wäre, wenn $\Delta l > 1$ ist; fällt der angegebene $n$te Tag der Aere in's nächst folgende Jahr $a + 1$ auf den Tag $d - (l + i\Delta l)$.

IV. Benüzt man dagegen die Gleichung (13), so hat man

$$p\,\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi} + \left(\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} - 1\right)l + \mathfrak{q}\frac{\varepsilon\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} + \delta}{\varpi}\,\Delta l + d = n.$$

Im ersten Theile dieser Gleichung drückt die Summe der drei lezten Glieder, vermöge §. 26, II, aus, der wievielte der angegebene Tag in der laufenden Schaltperiode ist, folglich kann diese Summe von 1 bis p reichen. Demgemäß gibt die Gleichung, nach Vorbegr. V, 2, die Anzahl der verflossenen vollen Schaltkreise

$$(25) \qquad \mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi} = \mathfrak{Q}\frac{n}{p},$$

und überdies die Nummer des zu suchenden Tages in der laufenden Periode,

$$(26)\qquad \left(\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi}-1\right)l+\mathfrak{q}\frac{\varepsilon\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi}+\delta}{\varpi}\Delta l+d=\mathfrak{R}\frac{n}{p}.$$

Aus der letzteren Gleichung findet man nach der gleichgestalteten (11), so wie in (22) und (23), das Jahr in der Periode

$$(27)\qquad \mathfrak{R}\frac{a}{\varpi}=\mathfrak{Q}\frac{\varpi\mathfrak{R}\frac{n}{p}-(\delta+\varepsilon)\Delta l}{p}+1,$$

und den Jahrstag

$$(28)\qquad d=\left(\mathfrak{r}\frac{\varepsilon\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi}+\delta}{\varpi}\Delta l+\mathfrak{R}\frac{\varpi\mathfrak{R}\frac{n}{p}-(\delta+\varepsilon)\Delta l}{p}\right):\varpi.$$

Die Gleichung (26) gestattet aber auch folgende Auflösung. Es ist

$$\mathfrak{q}\frac{\varepsilon\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi}+\delta}{\varpi}\Delta l=(0,1,\ldots\varepsilon)\Delta l$$

$$d=1,2,\ldots l+\Delta l$$

daher $\left(\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi}-1\right)l=\mathfrak{R}\frac{n}{p}-1,\mathfrak{R}\frac{n}{p}-2,\ldots\mathfrak{R}\frac{n}{p}-l-(1+\varepsilon)\Delta l$

und (29) $\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi}\geqq\frac{\mathfrak{R}\frac{n}{p}-(\varepsilon+1)\Delta l}{l}$, aber $<\frac{\mathfrak{R}\frac{n}{p}}{l}+1$.

Das Jahr $\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi}$ der Periode wird demnach meistens $=\mathfrak{Q}\frac{\mathfrak{R}\frac{n}{p}}{l}+1$, oder höchstens um 1 kleiner sein. Zu diesem Resultate gelangt man auch, wenn man in der Gleichung (26), so wie in §. 27. I die ohnehin nicht über $\varepsilon\Delta l$ steigenden Schalttage vernachlässigt.

Nach ihm bestimmt man sofort den Jahrstag

$$(30)\qquad d=\mathfrak{R}\frac{n}{p}-\left(\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi}-1\right)l-\mathfrak{q}\frac{\varepsilon\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi}+\delta}{\varpi}\Delta l.$$

Aus $\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi}$ und $\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi}$ findet man endlich die Jahrszahl selbst

$$(31)\qquad a=\varpi\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi}+\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi}.$$

V. Besitzt man zwei Tafeln, wie die oben in §. 26, II beschriebenen, so entnimmt man für den gegebenen nten Tag der Aere aus der ersten Tafel die Tage $p\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi}$ der bis zu ihm verflossenen vollen Schaltperioden, und zugleich die Anzahl $\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi}$ dieser Schaltperioden, oder besser die Zahl der in ihnen

enthaltenen Jahre $\varpi\,\mathrm{Q}\frac{a}{\varpi}$. Zieht man die erstere Zahl $p\,\mathrm{Q}\frac{a}{\varpi}$, welche auch anzeigt, der wievielte Tag der Aere der nullte der laufenden Periode ist, von der Nummer n ab, so gibt der Rest $n - p\,\mathrm{Q}\frac{a}{\varpi}$ an, der wievielte Tag der laufenden Periode der angewiesene nte Tag der Aere ist. — Zu diesem Reste liefert die größte darin enthaltene Zahl der zweiten Tafel,

$$\left(\mathrm{R}\frac{a}{\varpi} - 1\right)l + \mathrm{q}\frac{\varepsilon\,\mathrm{R}\frac{a}{\varpi} + \delta}{\varpi}\Delta l,$$

die Tage der in dieser Periode bis zum Beginn des laufenden Jahres vergangenen ganzen Tage, welche Zahl zugleich ansagt, der wievielte Tag der laufenden Periode der nullte Tag des laufenden Jahres ist; überdies erfährt man auch die Nummer $\mathrm{R}\frac{a}{\varpi}$ des laufenden Jahres, und wenn man diese zur obigen Zahl $\varpi\,\mathrm{Q}\frac{a}{\varpi}$ addirt, die verlangte Jahrzahl a selbst. Zieht man sofort die aus der zweiten Tafel entnommene Zahl von dem ersten Reste ab, so ist der zweite Rest der gesuchte Jahrstag d selbst.

29.

Fortsetzung.

VI. Endlich läßt sich zur Auflösung dieser Aufgabe auch die Gleichung (14) verwenden, indem man zur deutlicheren Einsicht in den Gang der Rechnung die, vor dem zu betrachtenden Tage, verflossenen Tage zählt, und ihr die Gestalt

$$p\,\mathrm{q}\frac{a-1}{\varpi} + \mathrm{r}\frac{a-1}{\varpi}l + \mathrm{q}\frac{\varepsilon\,\mathrm{r}\frac{a-1}{\varpi} + \varepsilon + \delta}{\varpi}\Delta l + d - 1 = n - 1$$

anweist. Daraus findet sich nun sogleich die Anzahl der verflossenen vollen Schaltkreise

$$(32) \qquad \mathrm{q}\frac{a-1}{\varpi} = \mathrm{q}\frac{n-1}{p},$$

und die Anzahl der vor dem zu suchenden Tage von der laufenden Periode bereits vergangenen Tage

$$\mathrm{r}\frac{a-1}{\varpi}l + \mathrm{q}\frac{\varepsilon\,\mathrm{r}\frac{a-1}{\varpi} + \varepsilon + \delta}{\varpi}\Delta l + d - 1 = \mathrm{r}\frac{n-1}{p}.$$

Vernachlässigt man hierin die durch das zweite Glied angegebenen Schalttage, da ihrer höchstens $\varepsilon\Delta l$ sein können, so findet man die Zahl der von der laufenden Periode schon verflossenen Jahre

$$(33) \qquad \mathrm{r}\frac{a-1}{\varpi} = \mathrm{q}\frac{\mathrm{r}\frac{n-1}{p}}{l},$$

und die vom laufenden Jahre vergangenen Tage

$$(34)\qquad d-1=\mathrm{r}\frac{n-1}{p}-\left(\mathrm{r}\frac{a-1}{\varpi}\,l+\mathrm{q}\frac{\varepsilon\,\mathrm{r}\frac{a-1}{\varpi}+\varepsilon+\delta}{\varpi}\,\Delta l\right).$$

Daraus ergibt sich leicht die ganze Zahl der abgelaufenen Jahre

$$(35)\qquad a-1=\varpi\,\mathrm{q}\frac{a-1}{\varpi}+\mathrm{r}\frac{a-1}{\varpi},$$

und darnach die verlangte Jahrzahl a, so wie der Jahrstag d.

VII. Besonders, wenn man die oben in §. 26, II beschriebenen Tafeln besitzt, ist der Zug der Rechnung höchst klar und einfach. Man theile die um 1 verringerte Ordnungszahl n des angegebenen Tages der Aere, d. i. die Anzahl $n-1$ der vor ihm verflossenen Tage, durch die Zahl p der Tage eines Schaltkreises. Der Quotus gibt die Anzahl der abgelaufenen vollen Schaltkreise $\mathrm{q}\frac{n-1}{p}$, und wenn man mit ihm die Zahl ϖ der Jahre eines Schaltkreises multiplicirt, die in jenen Kreisen enthaltenen Jahre selbst. Der Rest $\mathrm{r}\frac{n-1}{p}$ aber zeigt die von der laufenden Periode bereits vergangenen Tage an. Alles dieses gibt die Tafel der Dauer der vollen Schaltkreise noch leichter mit einer einzigen Subtraction. Hebt man ferner aus der zweiten Tafel die größte in dem Reste noch enthaltene Zahl, d. i. die Tage der vor dem laufenden Jahre verflossenen Jahre der Periode; so gibt ihre Ergänzung zum Reste die Anzahl $d-1$ der vor dem zu suchenden Tage vergangenen Tage, und um 1 vermehrt zeigt sie den geforderten Jahrstag d. Zugleich liefert die zweite Tafel auch die schon abgelaufenen Jahre $\mathrm{r}\frac{a-1}{\varpi}$ der Periode; addirt man sie zu den Jahren $\varpi\,\mathrm{q}\frac{a-1}{\varpi}$ der abgelaufenen Schaltkreise, so erhält man die vor dem zu suchenden Jahre hergehenden Jahre $a-1$, und wenn man dazu noch 1 zählt, die Jahrzahl a selbst.

30.

Berechnung der Wochentage.

Legt man den 7 Tagen der Woche, statt ihrer Namen, Nummern auf, nach dem gewöhnlichen Gebrauche die Nummern von 1 bis 7; so kann man mit diesen wie mit anderen Ordnungszahlen rechnen. Nach diesen 7 Zahlen zählt man demnach die fortlaufenden Tage der Monate, Jahre, Jahrkreise und Aeren stets wiederkehrend. Daher ist die Bestimmung des Wochentags, auf den ein bezeichneter Tag eines Jahres trifft, eine sehr gewöhnliche Aufgabe, die hier nach ihren Grundzügen gelöst werden soll.

Ist nun ein Datum durch Aere, Jahr, Monat und Tag angegeben, so kann man den Monatstag, nach §. 25, auf den Jahrstag, und diesen wieder, nach §. 26, auf den Tag der Aere zurückführen. Sei dieser Tag der nte in

der Aere, und er treffe auf den noch zu bestimmenden $h$ten Wochentag. Bekannt sei hiebei, daß ein anderer Tag dieser Aere, der Nte auf den Wochentag H treffe. Unter diesen Voraussezungen hat man, in XVIII, 5 der Vorbegriffe, nur t, p und P in 7, h und H umzutauschen, und erhält sogleich nach (84) für den verlangten Wochentag h überhaupt den Ausdruck

$$(36) \qquad h \equiv H + n - N, \text{ mod } 7$$

und wenn man, wie üblich, die Wochentage von 1 bis 7 zählt

$$(37) \qquad h = R\frac{n-N+H}{7}.$$

Der erstere Ausdruck ist in der Darstellung einfacher und in der Rechnung bequemer; er möge daher im Folgenden jederzeit den lezteren vertreten. Bei seiner Anwendung kann man sogar die höchst bequemen kleinsten Reste nach dem Theiler oder Modul 7 zur Numerirung der Wochentage verwenden, indem man sich, was wohl keine Mühe fordert, gewöhnt,

die negativen Reste $0, -1, -2, -3$
den Wochentagen $7, 6, 5, 4$ beizulegen, so daß 0 den Schlußtag der Woche, -1 den ersten, -2 den zweiten und -3 den dritten Tag vor dem Schlußtage bezeichnet; und im Zusammenhange
den Wochentagen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, 3, \ldots$
die kleinsten Reste $1, 2, 3, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
zuzuweisen. Selbst der Modul 7 kann weg bleiben, wo man mit Bestimmtheit weiß, daß h einen Wochentag andeutet.

Sei H_0 der Wochentag des 0ten Tags der Aere, oder die Aere fange nach dem H_0ten Wochentage an, so kann man $N = 0$ und $H = H_0$ sezen. Oder überhaupt sei $H - N \equiv H_0$, mod 7, nemlich H_0 der kleinste Rest von $H - N$ durch 7. Dann vereinfacht sich der Ausdruck des Wochentages h, auf den der $n$te Tag der Aere trifft, in

$$(38) \qquad h \equiv n + H_0.$$

Ist der 0te Tag eines Jahres der Nte in der Aere und trifft er auf den Wochentag H, oder fängt dies Jahr nach dem Hten Wochentage an; so fällt der $d$te Tag dieses Jahres, als der $N + d = n$te Tag der Aere auf den Wochentag

$$(39) \qquad h \equiv d + H.$$

Will man im vorigen Falle n durch Jahr a und Tag d ausdrücken, so hat man, nach §. 26,

$$(10) \qquad n = (a-1)l + e\Delta l + d;$$

daher den Wochentag des $d$ten Tages im $a$ten Jahre

$$(40) \qquad h \equiv (a-1)l + e\Delta l + d + H_0.$$

Wird periodisch, in je ϖ Jahren ε Mal, eingeschaltet, so ist, nach §. 24,

$$(5) \qquad e = q\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi},$$

also auch (41) $\qquad h \equiv (a-1)l + q\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}\Delta l + d + H_0.$

Da man immer bequemer mit den Resten als mit den Quotis rechnet, so kann man folgende Umstaltung dieser Congruenz vornehmen. Es ist nach Gl. (5)

$$\varepsilon a + \delta = \varpi e + r\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi},$$

also $\qquad \varpi e = \varepsilon a + \delta - r\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}.$

Gibt nun das ψfache von ϖ durch 7 getheilt den Rest 1, so daß

$$(42) \qquad \varpi\psi \equiv 1, \text{ mod } 7$$

ist, so übergeht diese Gleichung, wenn man sie mit ψ multiplicirt, in

$$e \equiv \psi\left(\varepsilon a + \delta - r\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}\right), \text{ mod } 7.$$

Durch Einführung dieses Ausdruckes in (41) ergibt sich sofort

$$(43) \qquad h \equiv a(l + \psi\varepsilon\Delta l) + \psi\left(\delta - r\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}\right)\Delta l + d + H_0 - l.$$

Nun ist aber die Zahl der Tage eines ϖjährigen Schaltkreises, nach §. 26, II,

$$(12) \qquad \varpi l + \varepsilon\Delta l = p,$$

daher wenn man diese Gleichung mit ψ multiplicirt, vermöge (42)

$$l + \psi\varepsilon\Delta l \equiv p\psi, \text{ mod } 7.$$

Dadurch verwandelt sich der Ausdruck des Wochentages noch in den für die Rechnung bequemsten

$$(44) \qquad h \equiv p\psi . a - \psi\Delta l . r\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi} + d + H_0 - l + \psi\Delta l . \delta.$$

Setzt man darin $d = 0$, so findet man den Wochentag H des 0. Tages im Jahre a

$$(45) \qquad H \equiv p\psi . a - \psi\Delta l . r\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi} + H_0 - l + \psi\Delta l . \delta,$$

und wie früher den Wochentag des dten Tages dieses Jahres

$$(39) \qquad h \equiv d + H.$$

31.

Verwandlung der Data.

Allgemeines Verfahren.

Eine der Hauptaufgaben der Chronologie verlangt, daß zu einem bekannten Datum nach einer Zeitrechnung das entsprechende nach einer anderen gesucht werde. Da jedoch die Tage der Zeitrechnungen nicht durchgängig mit

einerlei Tageszeit anheben; so ist es am angemessensten, jeden außermitternächtlichen Anfang stets auf die nächste Mitternacht zu verlegen, und zwar auf die nächst vorhergehende, wenn der Tag entweder Morgens oder Mittags beginnt, dagegen auf die nächst folgende Mitternacht, wenn der Tag Abends anfängt*). Demnach entsprechen Tage zweier Zeitrechnungen einander, wenn sie mit derselben Mitternacht beginnen, und überhaupt ihre Mittage sammt den Nachmittagen zusammen fallen. Die allgemeine Lösung der Aufgabe ergibt sich auf folgende Weise.

Aus dem Jahre, Monate und Tage des bekannten Datums berechne man, nach §. 26, der wievielte der bezeichnete Tag in der gewählten Aere ist. Diese Nummer vermehre oder vermindere man um jene Anzahl Tage, um welche die Epochen beider Aeren von einander abstehen, je nachdem die zweite Aere früher oder später als die erste anfängt. Dadurch erfährt man, der wievielte jener Tag in der zweiten Aere ist; folglich hat man zu ihm nur noch Jahr, Monat und Tag, nach §. 27—29, zu berechnen.

Damit die Data jeder zwei Zeitrechnungen leicht auf einander zurückgeführt werden können, ist es vortheilhaft, die Abstände ihrer Epochen von einer zur Hilfe genommenen dritten Aere, welche früher als jede von beiden anhebt, oder älter als jede von ihnen ist, zu bestimmen; da dann die jüngere, oder später anfangende der beiden Aeren um den Unterschied dieser zwei Abstände später als die andere ältere oder früher anfangende Aere beginnt. Zu mehreren Aeren wählt man die älteste aus ihnen als Hilfsäre. Ein solcher Abstand der Epoche einer Aere von jener einer festgesetzten frühesten Aere wird von manchen Chronologen mit einem der ohnehin schon so vieldeutigen Namen »Wurzel“ oder „Absolutzahl“ belegt.

Sei, um den Zug der Rechnung in allgemeinen Zeichen anschaulich zu machen, das bekannte Datum der $d$te Tag des Jahres a einer gewissen Aere; das Gemeinjahr halte l, das Schaltjahr $l + \Delta l$ Tage, und bis zum Jahre a sei e Mal eingeschaltet worden. Dann ist vermöge §. 26 jenes Datum in der Aere der Tag

(10) $$n = (a-1)l + e\Delta l + d.$$

Wird periodisch, in je ϖ Jahren ε Mal, eingeschaltet, so enthält der Schaltkreis Tage

(12) $$p = \varpi l + \varepsilon \Delta l.$$

Aus den Nummern der Schaltjahre jedes Schaltkyklus ergibt sich, nach XXII, 3 der Vorbegriffe, die Constante δ; und sofort sind vor dem Jahre a Schaltjahre

*) Vergl. Ideler Handb. 1. Bd. S. 99.

$$(5) \qquad e = \mathfrak{q}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}.$$

Daher hat man auch, nach §. 26,

$$(11) \qquad n = (a-1)\,l + \mathfrak{q}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}\,\Delta l + d, \text{ oder}$$

$$(13) \qquad n = p\,\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi} + \left(\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} - 1\right) l + \mathfrak{q}\frac{\varepsilon\,\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} + \delta}{\varpi}\,\Delta l + d, \text{ oder}$$

$$(14) \qquad n = p\,\mathfrak{q}\frac{a-1}{\varpi} + \mathfrak{r}\frac{a-1}{\varpi}\,l + \mathfrak{q}\frac{\varepsilon\,\mathfrak{r}\frac{a-1}{\varpi} + \varepsilon + \delta}{\varpi}\,\Delta l + d.$$

Ist ferner die Epoche dieser Aere um g Tage später als die Epoche der Hilfsäre, so ist jener angegebene Tag der $n+g$te in dieser Hilfsäre.

Bezeichnet man andererseits die auf die zweite Aere sich beziehenden Zahlen mit denselben Buchstaben und einem aufgesetzten Accent oder Strich, so ist der angegebene Tag in der Hilfsäre auch der $n' + g'$te Tag, daher

$$(46) \qquad n' + g' = n + g;$$

folglich erhält man überhaupt

$$(47) \qquad n' = n + g - g'$$

und insbesondere $\quad n' = n + (g - g')$ oder $n' = n - (g' - g)$,
je nachdem $g >$ oder $< g'$ ist, also die zweite Aere entweder um $g - g'$ früher oder um $g' - g$ später als die erste beginnt.

Hat man somit erfahren, daß der angegebene Tag der n'te in der zweiten Aere ist, so findet man hierin das Jahr a' und den Tag d' entweder, nach §. 27, II, Gl. (20) und (21), aus

$$a' = \mathfrak{Q}\frac{n'}{l'} + 1 - \Delta a$$

$$d' = \mathfrak{R}\frac{n'}{l'} - e'\Delta l' + l'\Delta a$$

oder vermöge §. 28, Gl. (22) — (24), aus den Gleichungen

$$a' = \mathfrak{Q}\frac{\varpi'(n'+l') - \Delta l'.\delta'}{p'}$$

$$d' = \left(\mathfrak{r}\frac{\varepsilon' a' + \delta'}{\varpi'}\,\Delta l' + \mathfrak{R}\frac{\varpi'(n'+l') - \Delta l'.\delta'}{p'}\right) : \varpi'$$

$$= n' - (a'-1)\,l' - \mathfrak{q}\frac{\varepsilon' a' + \delta'}{\varpi'}\,\Delta l'$$

oder nach §. 28, Gl. (25) — (31) aus

$$\mathfrak{Q}\frac{a'}{\varpi'} = \mathfrak{Q}\frac{n'}{p'}$$

$$\mathfrak{R}\frac{a'}{\varpi'} = \mathfrak{Q}\frac{\varpi'\left(\mathfrak{R}\frac{n'}{p'} + l'\right) - \Delta l'.\delta'}{p'}$$

$$a' = \varpi' \mathfrak{Q}\frac{a'}{\varpi'} + \mathfrak{R}\frac{a'}{\varpi'}$$

$$d' = \left(\mathfrak{F}\frac{\varepsilon' \mathfrak{R}\frac{a'}{\varpi'} + \delta'}{\varpi'} \Delta l' + \mathfrak{R}\frac{\varpi'\left(\mathfrak{R}\frac{n'}{p'} + l'\right) - \Delta l'.\delta'}{p'} \right) : \varpi',$$

oder endlich auch nach §. 28, V und §. 29.

32.

Fortsezung. Besondere Fälle.

Zur Abkürzung späterer Rechnungen wird es förderlich sein, einige häufig vorkommende besondere Fälle eigens zu betrachten. Zu diesem Zwecke gebe man dem Ausdrucke von n in Gl. (10) die hier brauchbare Gestalt

$$n = (a-1)\left(l + \frac{e\Delta l}{a-1}\right) + d.$$

Wird periodisch eingeschaltet, nemlich in je ϖ Jahren ε Mal, so ist

$$e = \mathfrak{Q}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi} = \left(\varepsilon a + \delta - \mathfrak{R}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}\right) : \varpi$$

$$= \frac{\varepsilon(a-1)}{\varpi} + \left(\varepsilon + \delta - \mathfrak{R}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}\right) : \varpi.$$

Im lezten Dividende ist, weil für $a = 1$ gewiß $e = 0$, also $\mathfrak{Q}\frac{\varepsilon + \delta}{\varpi} = 0$ sein muß, $\varepsilon + \delta < \varpi$. Der größte positive Werth des zweiten Quotienten ist daher $\frac{\varepsilon + \delta}{\varpi} < 1$, und sein größter negativer $-\left(1 - \frac{\varepsilon + \delta + 1}{\varpi}\right)$ höchstens $= -1$. Man kann demnach ohne erheblichen Fehler diesen zweiten Quotienten außer Acht lassen, und sehr nahe

$$e = \frac{\varepsilon(a-1)}{\varpi}$$

sezen. Dann ist genähert

$$n = (a-1)\left(l + \frac{\varepsilon \Delta l}{\varpi}\right) + d.$$

Hier drückt $l + \frac{\varepsilon\Delta l}{\varpi} = \frac{p}{\varpi}$ Tage die bestimmte mittlere Länge des Jahres in einem ϖjährigen Schaltkreise aus; dagegen oben $l + \frac{e\Delta l}{a-1}$ Tage die durchschnittliche, etwas Weniges veränderliche, Länge des bürgerlichen Jahres während der vergangenen $a-1$ Jahre. Beide sind einander überhaupt desto näher, je größer a ist, und insbesondere werden sie jedesmal völlig gleich, so oft mit dem Jahre a ein neuer Schaltkreis anhebt, also $a-1$ durch ϖ theilbar ist, weil dann $a \equiv 1$, mod ϖ, also $e = \varepsilon(a-1) : \varpi$ wird. Bezeichnet man daher jenes oder dieses mittlere Jahr mit Λ, so hat man, wo nicht völlig genau, so wenigstens sehr genähert

$$n = (a-1)\,\Lambda + d,$$

und ähnlich $$n' = (a'-1)\,\Lambda' + d'.$$

Die Zahl Λ ist zwar fast nie eine ganze Zahl; dessen ungeachtet kann man durch $\mathfrak{q}\frac{g-g'}{\Lambda}$ die positive oder negative ganze Zahl andeuten, welche anzeigt, wie oft Λ in $g-g'$ dergestalt enthalten ist, daß der Rest $\mathfrak{r}\frac{g-g'}{\Lambda}$ positiv und $< \Lambda$ ausfällt. Nimmt man zugleich für diesen Rest die nächst zustimmende ganze Zahl, so darf man mit genügender Annäherung sezen

$$g-g'=\Lambda\,\mathfrak{q}\frac{g-g'}{\Lambda}+\mathfrak{r}\frac{g-g'}{\Lambda}.$$

Bringt man diese Ausdrücke in die Gleichung (47), so verwandelt sie sich in die nahe richtige

$$(a'-1)\Lambda'+d'=(a-1)\Lambda+d+g-g'$$

oder in $$(a'-1)\Lambda'+d'=\left(a-1+\mathfrak{q}\frac{g-g'}{\Lambda}\right)\Lambda+\mathfrak{r}\frac{g-g'}{\Lambda}+d.$$

I. Sind nun, was häufig vorkommt, die mittleren bürgerlichen Jahre Λ und Λ' in den mit einander verglichenen Zeitrechnungen entweder ganz oder wenigstens hinreichend nahe gleich; so kann man immerhin, weil $\mathfrak{r}\frac{g-g'}{\Lambda}+d$ nie zwei solche Jahre beträgt,

$$(48)\qquad a'=a+\mathfrak{q}\frac{g-g'}{\Lambda}=a-\mathfrak{Q}\frac{g'-g}{\Lambda}-1$$

sezen, dann ist

$$d'=d+\mathfrak{r}\frac{g-g'}{\Lambda}.$$

Sollte hiebei d' schon größer ausfallen, als des Jahres a' Länge

$l'+i'\Delta l'=l'+\mathfrak{q}\dfrac{\varepsilon'+\mathfrak{r}\frac{\varepsilon' a'+\delta'}{\varpi'}}{\varpi'}\,\Delta l'$ Tage; so wäre dem Jahre a' noch eines zuzuzählen; und in diesem Jahre $a'+1$ ist dann der gesuchte Jahrstag der sovielte, als um wie viel d' mehr Tage als das Jahr a' zählt. Zur Vereinfachung der Berechnung des Jahrstages d', oder noch besser des ihm entsprechenden Monatstages, kann man in einer kleinen Tabelle ausweisen, auf die wievielten Monatstage der zweiten Aere überhaupt die $t$ten Tage der einzelnen Monate der ersten Aere treffen; denn die Monatstage der ersten Aere werden entweder genau oder wenigstens nahe immer auf einerlei Monatstage der zweiten Aere fallen, oder die allenfallsige Abweichung läßt sich doch allgemein ausdrücken.

II. Ist insbesondere die Jahrform, die Länge und Vertheilung der Gemein- und Schaltjahre in beiden Aeren gleich, also das mittlere Jahr in ihnen dasselbe, und fängt das eine Jahr während eines Monates des anderen Jahres an, so treffen die Monatstage der einen Aere immer auf einerlei, aber nicht nothwendig auf die gleichvielten, Monatstage der anderen; weil der hier bestehende, von Null verschieden vorausgesezte, Abstand

$d' - d = \mathfrak{r}\frac{g-g'}{\Lambda}$ der einander entsprechenden Jahrstage d und d' durchgängig derselbe bleibt.

III. Sezt man in beiden Fällen, um den Anfang des Jahres a der ersten Aere in der anderen Aere zu bestimmen, $d = 0$ oder 1, so wird nahe oder völlig richtig $d' = \mathfrak{r}\frac{g-g'}{\Lambda}$ oder $\mathfrak{R}\frac{g-g'+1}{\Lambda}$. Das Jahr a der ersten Aere fängt demnach entweder genau oder wenigstens nahe nach dem $\mathfrak{r}\frac{g-g'}{\Lambda}$ten Tage am $\mathfrak{R}\frac{g-g'+1}{\Lambda}$ten Tage des Jahres $a' = a + \mathfrak{q}\frac{g-g'}{\Lambda}$ der zweiten Aere an, und endigt sich im darauf folgenden Jahre $a' + 1 = a + \mathfrak{q}\frac{g-g'}{\Lambda} + 1$.

Nimmt man überdies noch als bekannt an, daß das Jahr A der ersten Aere im Jahre A' der anderen anfängt, so ist auch $A' = A + \mathfrak{q}\frac{g-g'}{\Lambda}$, daher der unveränderliche Abstand der Jahrzahlen beider Aeren

$$\mathfrak{q}\frac{g-g'}{\Lambda} = A' - A = a' - a;$$

folglich beginnt, wie man auch aus den Vorbegr. XVII, Gl. (76) erschließen konnte, das Jahr a der ersten Aere im Jahre

$$(49) \qquad a' = a + A' - A$$

der zweiten Aere, und endigt sich im Jahre

$$(50) \qquad a' + 1 = a + A' - A + 1.$$

IV. Fängt jedes Jahr der einen Aere am ersten Tage eines gewissen Monates der anderen Aere an, — mag dieser der erste Monat im Jahre sein oder nicht — und haben die nach einander folgenden Monate in beiden Jahrformen gleich viel Tage, übrigens die nemlichen oder verschiedene Namen, so treffen die Monatstage der einen Aere stets auf die gleichvielten Tage des entsprechenden Monates der anderen, und man nennt die Monate beider Aeren einander parallel gestellt. Sind dabei diese Monate, so wie sie einander entsprechen, auch nicht gleichvielte in den Jahren beider Aeren, so gelten dennoch die vorigen Vergleichungen zwischen den Jahren a und a'.

V. Sind endlich diese parallelen Monate auch noch gleichvielte in den Jahren der Aeren, so fangen die Jahre und ihre gleichvielten Monate immer zugleich an; daher ist für $d = 0$ auch $d' = 0$, also $\mathfrak{r}\frac{g-g'}{\Lambda} = 0$, sonach auch überhaupt $d' = d$, d. h. die entsprechenden Jahrstage sind gleichvielte. Dies Leztere wird auch schon bestehen, wenn nur $\mathfrak{r}\frac{g-g'}{\Lambda} = 0$ ist, und die Jahre der zwei Aeren gleich viel Tage enthalten, ohne gerade ganz gleich geformt zu sein. Die Anfänge beider Aeren stehen also um eine Anzahl voller Jahre, $\mathfrak{q}\frac{g-g'}{\Lambda}$, von einander ab; mithin stimmt das Jahr a der ersten Aere genau

mit dem Jahre $a' = a + \mp\frac{g-g'}{\Lambda}$ der zweiten überein. Ist ferner bekannt, daß das Jahr A der ersten Aere mit dem Jahre A' der anderen zusammen fiel, so muß auch $A' = A + \mp\frac{g-g'}{\Lambda}$, folglich wie früher der unveränderliche Unterschied der Jahrzahlen beider Aeren

$$\mp\frac{g-g'}{\Lambda} = A' - A = a' - a$$

sein, und somit ist das Jahr a der ersten Aere völlig übereinstimmend mit dem Jahre

$$(49) \qquad a' = a + A' - A$$

der zweiten Aere. Auch hier sind die einander entsprechenden Monatstage gleichvielte.

VI. Von dieser Gleichung

$$a' = a + A' - A,$$

welche ausdrückt, daß, so wie das Jahr A einer Aere in oder mit dem Jahre A' einer anderen anfängt, auch das Jahr a der ersteren in oder mit dem Jahre a' der lezteren anfängt, macht man stets da Gebrauch, wo blos die Jahre der Begebenheiten anzugeben oder mit einander zu vergleichen sind; oder wo angeführt wird, im wievielten Jahre nach oder vor einem bedeutsamen Ereignisse sich eine Begebenheit zutrug.

33.

Fortsezung.

Tittel's näherungsweise Verwandlung der Data.

Die so eben in §. 32 gefundene, angenähert richtige Gleichung

$$(a'-1)\Lambda' + d' = (a-1)\Lambda + d + g - g'$$

dient auch zur Aufstellung der zuerst von Tittel*) bekannt gemachten interessanten Formel zur näherungsweisen Uebertragung der Data aus einer Zeitrechnung in eine andere. Denn drückt man die im Mittel vor dem bezeichneten Datum in der zweiten Aere vergangene Zeit in Tagen aus, so ist sie

$$(a'-1)\Lambda' + d' - 1 = (a-1)\Lambda + d - 1 + g - g'.$$

In mittleren Jahren Λ' der zweiten Aere ausgedrückt sei diese Zeit m', so ist

$$m' = a' - 1 + \frac{d'-1}{\Lambda'} = \frac{\Lambda}{\Lambda'}(a-1) + \frac{d-1}{\Lambda'} + \frac{g-g'}{\Lambda'}$$

oder $$(51) \qquad m' = \frac{\Lambda}{\Lambda'}a + \frac{1}{\Lambda'}d - \frac{\Lambda+1}{\Lambda'} + \frac{g-g'}{\Lambda'}.$$

Drückt man die Abstände g und g' der Epochen dieser Aeren von der älteren Hilfsäre nicht in Tagen, sondern in Jahren von λ Tagen, z. B. in Jahren

---

*) Vergl. Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, herausgegeben von Bohnenberger und Lindenau, Tübingen 1816—18. Bd. 2. S. 251.

von $365\frac{1}{4} = 365{\cdot}25$ Tagen, aus, und seien diese Abstände γ und γ' solche Jahre; so hat man

$$\gamma = \frac{g}{\lambda},\ \gamma' = \frac{g'}{\lambda} \text{ oder } g = \gamma\lambda,\ g' = \gamma'\lambda,$$

folglich auch

$$m' = \frac{\Lambda}{\Lambda'}\,a + \frac{1}{\Lambda'}\,d - \frac{\Lambda+1}{\Lambda'} + \frac{\lambda}{\Lambda'}(\gamma - \gamma'). \tag{52}$$

34.

Bestimmung des in einem Jahre einer Aere beginnenden Jahres einer anderen Aere.

Ist die mittlere Dauer der bürgerlichen Jahre zweier Zeitrechnungen merklich verschieden, so läßt sich das Jahr einer Aere, welches in einem angewiesenen Jahre einer anderen Aere anfängt, nicht so leicht, wie eben in §. 32 gezeigt wurde, sondern auf folgendem etwas mühsameren Wege finden.

Sei also das Jahr einer Aere zu suchen, welches im Jahre a' einer zweiten Aere anfängt.

Zu diesem Zwecke suchen wir zuvörderst das Jahr a und den Tag d der ersten Aere, in und an welchem der nullte Tag des Jahres a' der zweiten Aere eintritt. Dieser nullte Tag nun ist, nach §. 26, in der zweiten Aere der Tag

$$\begin{aligned} n' &= (a'-1)\,l' + e'\Delta l' \\ &= (a'-1)\,l' + \mathfrak{q}\frac{\varepsilon' a' + \delta'}{\varpi'}\,\Delta l' \\ &= p'\,\mathfrak{Q}\frac{a'}{\varpi'} + \left(\mathfrak{R}\frac{a'}{\varpi'} - 1\right) l' + \mathfrak{q}\frac{\varepsilon'\,\mathfrak{R}\frac{a'}{\varpi'} + \delta'}{\varpi'}\,\Delta l'; \end{aligned}$$

daher nach §. 31 in der ersten Aere der Tag

$$n = n' + g' - g\ . \tag{47}$$

folglich trifft er vermöge §. 27 und 28

in das Jahr $\quad a = \mathfrak{Q}\frac{n}{l} + 1 - \Delta a$

und auf den Tag $\quad d = \mathfrak{R}\frac{n}{l} - e\Delta l + l\Delta a,$

wo Δa angemessen zu wählen ist;

oder in das Jahr $a = \mathfrak{Q}\dfrac{\varpi(n+l) - \Delta l.\delta}{p}$

und auf den Tag $\quad d = \left(\mathfrak{r}\dfrac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}\,\Delta l + \mathfrak{R}\dfrac{\varpi(n+l) - \Delta l.\delta}{p}\right) : \varpi$

$$= n - (a-1)\,l - \mathfrak{q}\frac{\varepsilon a + \delta}{\varpi}\,\Delta l;$$

oder nach der Periode $\mathfrak{Q}\dfrac{a}{\varpi} = \mathfrak{Q}\dfrac{n}{p}$

in das Jahr $$\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi} = \mathfrak{Q}\frac{\varpi\left(\mathfrak{R}\frac{n}{p}+1\right)-\Delta l.\delta}{p}$$

der nächst folgenden Periode, also in das Jahr

$$a=\varpi\,\mathfrak{Q}\frac{a}{\varpi}+\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi}$$

der ersten Aere, auf den Tag

$$d=\left(\mathfrak{r}\frac{\varepsilon\,\mathfrak{R}\frac{a}{\varpi}+\delta}{\varpi}\,\Delta l+\mathfrak{R}\frac{\varpi\left(\mathfrak{R}\frac{n}{p}+1\right)-\Delta l.\delta}{p}\right):\varpi.$$

In diesem Jahre a wird, vermöge §. 24 Gl. (7)

$$i=\mathfrak{q}\frac{\varepsilon+\mathfrak{r}\frac{\varepsilon a+\delta}{\varpi}}{\varpi}\text{ Mal}$$

eingeschaltet, nemlich $i=0$ Mal im Gemeinjahr und $i=1$ Mal im Schaltjahr; daher beträgt die Länge desselben Jahres

$$l+i\Delta l \text{ Tage.}$$

Sein Schluß erfolgt also nach dem 0. Tage des Jahres a' am

$$d'=l+i\Delta l-d^{ten}\text{ Tage.}$$

Im Jahre a' der zweiten Aere schließt sich demnach das Jahr a der ersten Aere, oder es ist der 0. Tag des Jahres $a+1$

am Tage $$d'=l+i\Delta l-d$$

und somit beginnt das Jahr $a+1$

am Tage $$d'+1=l+i\Delta l-d+1.$$

Zweite Abtheilung.

Besondere Chronologie.

Zweite Abtheilung.

Besondere Chronologie.

Einleitung.

35.

Kurzer Abriß der Entstehung und Verbreitung der Zeitrechnungen der Völker.

Zwei Völker sind es vorzüglich, die in der frühesten Zeit mit der Beobachtung des Himmels sich beschäftigten, und deren astronomische Kenntnisse sich allmälig den übrigen Völkern mittheilten; die Aegypter und Babylonier. Jene zwang die jährlich wiederkehrende, das Land befruchtende, Ueberschwemmung ihres Hauptstroms, des Nils, zur Vorausbestimmung der Eintrittszeit derselben, die Bewegung der Gestirne, mit der sie zusammenhing, zu erforschen und ihre Zeitrechnung nach dem Laufe der Sonne zu regeln. Die Babylonier dagegen wurden durch die Heiterkeit der Nächte angezogen, die Erscheinungen am Himmel zu beobachten, und darnach die Zeit zu messen; allein von ihrer Zeitrechnung hat die Geschichte uns nur wenig aufbewahrt.

Von beiden Völkern lernten die Juden, die meisten Völkerschaften des westlichen Asiens, mit denen sie theils in friedlichem Handelsverkehre, theils in kriegerischen Verhältnissen standen, und die Griechen; von diesen endlich wieder die älteren Römer. Der Cultus aller dieser Völker erheischte ein Mondjahr, das jedoch ihr Ackerbau bald mit dem Sonnenlaufe abzugleichen zwang. Seit 334 vor Chr. verbreiteten noch die Züge des macedonischen Königs Alexander d. Gr. in Asien, und die Ansiedlung seines Heeres unter ihm und seinen Feldherren, die sich in sein weites Reich theilten, die macedonische Zeitrechnung über Kleinasien, Babylonien, Syrien und Arabien.

Nach und nach lernte man im Oriente die mittlere Dauer des tropischen Jahres genauer kennen, und berichtigte darnach das bürgerliche Mondjahr; wie in Griechenland durch den 19jährigen Mondkreis des Meton und durch die 76jährige Periode des Kallippus, von denen auch die anderen nach Mondjahren zählenden west-asiatischen Völker griechischen Stammes Gebrauch machten. Als gewichtiger und eigentlicher Verbesserer der Schaltrechnung trat jedoch,

45 vor Chr., der römische Dictator und Pontifex maximus Julius Cäsar auf, dessen mittleres Sonnenjahr für eine längere Zeit ziemlich mit dem Himmel übereinstimmt; nur Schade, daß er die Längen der Monate nicht auch verständig anordnete.

Diese genauere julianisch-römische Schaltrechnung und Jahrform verbreitete sich bald über das ganze große römische Reich, indem man sie theils ganz, so wie sie war, annahm, theils nur die vorhandenen Mondmonate in Sonnenmonate umstaltete, theils endlich die bereits üblichen ägyptischen Sonnenjahre durch die julianische Schaltweise mit dem Himmel abglich. Nur die Juden und Araber blieben bis jezt an ihrem Mondjahre hangen. Mit dem um dieselbe Zeit entstandenen und allmälig ausgebreiteten christlichen Religions-Cultus wurde endlich das julianische Sonnenjahr auf's innigste verflochten und mit der Zeit über alle Erdtheile verpflanzt. Blos seine Schaltrechnung wurde am Ende des 16. Jahrhunderts durch Papst Gregor XIII. berichtiget. Andrerseits wurde das arabische, freie Mondjahr mit dem mohammedanischen Cultus verknüpft und wie dieser in einem großen Theile der alten Welt herrschend.

Nur auf kurze Zeit entstand gegen den Schluß des 11. Jahrhunderts in Persien eine sehr wohl geregelte Jahrform, und am Ausgang des vorigen Jahrhunderts in Frankreich eine durch leidenschaftliche Neuerungssucht übereilte Zeitrechnung.

Die wichtigsten gegenwärtig bestehenden Zeitrechnungen sind daher:

1. Bei den orientalischen christlichen Völkern die alte, bei den occidentalen und übrigen christlichen Völkern die durch Gregor verbesserte julianische Zeitrechnung;

2. die durch die talmudistischen Rabiner geordnete jüdische, und

3. die mohammedanisch-arabische der Bekenner des Islams.

Andere Zeitrechnungen sind theils mit den Völkern, die sich ihrer bedienten, erloschen, theils zu wenig bekannt geworden, theils einzelnen noch lebenden unbedeutenden Völkerschaften eigen; daher wir sie keiner weiteren Untersuchung in diesem der arithmetischen Behandlung der Zeitkunde gewidmeten Werke zu unterwerfen vermögen. Hierin werden wir zunächst und am ausführlichsten die auf uns übergegangene und am weitesten verbreitete christlich-julianische Zeitrechnung der Römer, und dann die Zeitrechnungen der anderen Völker, so weit möglich in der Ordnung und Zeitfolge, wie sie sich aus einander entwickelten, behandeln und stets mit der vorherrschenden christlichen vergleichen.

Erster Abschnitt.

Zeitrechnung der Römer.

36.
Der Tag.

Den Anfang des bürgerlichen Tages banden die Römer seit jeher an die Mitternacht. Ihre Abtheilung desselben bestand in den frühesten Zeiten blos darin, daß sie in der Nacht vier gleich lange Vigilien und eben so im natürlichen Tage vier gleiche Zeitabschnitte unterschieden. Dabei halfen ihnen theils die Auf- und Untergänge, so wie auch ausgezeichnete Stände der Fixsterne, theils Sand- und Wasseruhren. Zur Bezeichnung dieser Tageszeiten dienten die bekannten Ausdrücke: media nox, de (unmittelbar nach) media nocte, ante lucem et diluculum; mane, ad meridiem; meridies, de meridie, suprema (sc. die, lezte Zeit des Tages); vespera, crepusculum, concubium, intempesta (sc. nox), ad mediam noctem, u. a. Später, seit 263 vor Chr., nachdem M. Valerius Messala öffentliche Sonnenzeiger hatte errichten lassen, theilten die Römer, mittels derselben, wie alle alten Völker, Babylonier, Aegypter und Griechen, von denen sie lernten, den natürlichen Tag sowohl als die Nacht in zwölf Stunden, so daß der Mittag auf den Anfang der siebenten Tagesstunde und die Mitternacht auf den Anfang der siebenten Nachtstunde traf.

37.
Die Woche.

Die Römer hatten eine achttägige Woche. Sieben Tage arbeitete der Landmann, am achten kam er in die Stadt, um zu handeln und sich nach Staatsangelegenheiten zu erkundigen, weil jeder römische Bürger, auch auf dem Lande, an der Gesezgebung und Vertheilung der Staatsämter Antheil nahm. Dieser Markttag wurde Nundinae genannt, weil er nach römischer Zählweise nono quoque die wiederkehrte.

Diese Zeiteinschnitte waren bei den Römern uralt, indem ihre Einführung von Einigen dem Romulus, von Anderen dem Servius Tullius zugeschrieben wird. Die Ordnung der Nundinae scheint nie eine Unterbrechung erlitten zu haben.

38.

Das Jahr.

I. Jahr des Romulus. Von der Länge des von Romulus, dem Gründer der Stadt Rom, eingeführten Jahres weiß man nichts Gewisses. Sicher ist jedoch, daß es in 10 Monate eingetheilt wurde, welche folgende Namen führten:

1. Martius, 2. Aprilis, 3. Maius, 4. Junius, 5. Quintilis, 6. Sextilis, 7. September, 8. October, 9. November, 10. December.

Von diesen Monaten des Romulus hatten, nach Plutarch, einige kaum 20, andere 35 und mehr Tage; daher sie weder nach den Mondwechseln, noch nach dem Stande der Sonne in der Ekliptik sich richteten, sondern wahrscheinlich, wie Dodwell meint, Abtheilungen des Sonnenjahres andeuteten, welche von den Auf- und Untergängen ausgezeichneter Fixsterne begrenzt wurden.

II. Jahr des Numa. Gewöhnlich schreibt man dem Könige Numa Pompilius die Einführung eines Mondjahres von 355 Tagen zu, welches aus 12 Monaten von folgender Anordnung bestand:

1. Martius	**31**	Tage.	**5. Quintilis**	**31**	Tage.	**9. November**	**29**	Tage.
2. Aprilis	**29**	»	**6. Sextilis**	**29**	»	**10. December**	**29**	»
3. Maius	**31**	»	**7. September**	**29**	»	**11. Januarius**	**29**	»
4. Junius	**29**	»	**8. October**	**31**	»	**12. Februarius**	**28**	»

In diesen Mondmonaten hob man die Tage hervor, an welchen die an den Abenden sichtbaren Haupt-Mondphasen, der Neumond, das erste Viertel und der Vollmond eintraten. Den Anfang des Monates sezte man auf den Tag des Neumondes, d. i. auf den Tag des Erscheinens der Mondsichel am Abendhimmel. Für den Vollmond rechnete man 17 Tage vor dem nächstkommenden Neumonde, so daß er in den vier 31tägigen Monaten, **Martius, Maius, Quintilis** und **October**, auf den 15ten und in den übrigen auf den 13ten Monatstag traf, welche Vollmondstage den Namen **Idus** führten. Das erste Viertel sezte man auf den 9ten Tag vor dem Vollmondstage; daher es in den 31tägigen Monaten auf den 7ten, in den anderen auf den 5ten Monatstag traf, und diese Tage **Nonae** genannt wurden. Einem der Pontifices lag es ob, aus der Gestalt der zuerst wahrgenommenen Mondsichel, welche sich, wegen der verschiedenen Lage der Mondbahn gegen die Erdbahn, bald einen, bald auch erst zwei oder drei Tage nach der Conjunction zeigt, zu beurtheilen, wie viel Tage bis zu den Nonen noch zu zählen seien, und diese 5 oder 7 Tage (die vermeintlich unglückliche gerade Zahl 6 meidend) öffentlich auszurufen (**calare** von καλέω, ich rufe), weswegen der erste Tag des Monates **Calendae** hieß. An jedem Tage vor diesen drei Epochen, **Nonae** und **Idus** des laufenden, und **Calendae** des kommenden Monates, zählte man, nach Art der älteren

Völker, der wievielte er vor der nächstfolgenden Epoche sei, wobei man jedoch, wie sonst immer, den Epochentag selbst als den ersten mitrechnete, und am zweiten Tage mit pridie (Tags vor der jedesmaligen Epoche) datirte, folglich erst bei dem dritten zu zählen anfing.

Den Anfang des Jahres sezte Numa in den Monat Martius und auf den Neumond zunächst nach der Frühlingsnachtgleiche. Um aber ihn und die ländlichen Feste in einerlei Jahrszeit zu erhalten und dabei doch immer die Monate mit den Neumonden anzufangen, schaltete er wahrscheinlich, so oft es nöthig war, bald nach 3, bald nach 2 Jahren *) hinter dem lezten Monate, Februarius, einen vollen Mondmonat ein. Die Römer gebrauchten demnach unter den Königen gewiß ein gebundenes Mondjahr.

39.

Fortsezung.

III. Jahr der Decemvirn. Nachdem die römische Republik die Abfassung eines Gesezbuches beschlossen hatte, 455 v. Chr., sandte sie Abgeordnete nach Athen, um die Geseze Solon's abzuschreiben und von der Verfassung, den Sitten und Gebräuchen der griechischen Staaten Kunde einzuziehen; worauf die nach ihrer Rückkehr, 451, eingesezten Decemviri die zwölf Gesez-tafeln zusammen stellten.

Um diese Zeit war bei den Griechen, welche nach 354tägigen Mondjahren zählten, ein 8jähriger Schaltkreis mit 3 Schaltjahren, **) in denen sie bald nach 3, bald nach 2 Jahren einen 30tägigen Monat, also in Allem 90 Tage einschalteten, im Gebrauche. Von da an schalteten nun auch die Römer alle 8 Jahre 90 Tage ein, vertheilten diese aber, in der Absicht, jedes zweite Jahr zum Schaltjahre zu machen, auf 4 Schaltmonate abwechselnd zu 22 und 23 Tagen.

Diesen Schaltmonat (mensis mercedonius s. intercalaris) schob man gewöhnlich im Monate Februarius zwischen die Feste Terminalia und Regifugium, welche im Gemeinjahre am 23 und 24 Februarius gefeiert wurden. Im Schaltjahre war nemlich das Fest Terminalia der lezte Tag des Februars, der dann nur 23 Tage zählte; darauf folgte der Schaltmonat von 22 oder 23 Tagen, und diesen wurden endlich die 5 lezten Tage des Februars von Regifugium an, wie Ergänzungstage, angehängt, so daß man sie beim Datiren als zum Schaltmonat gehörig bezeichnete, der sonach dadurch 27 oder 28 Tage erhielt.

Bei der beschriebenen Schalteinrichtung rechneten die Römer in je 8 Jahren 8.355 + 90 = 2930 Tage, also ihr Jahr im Durchschnitt

*) Vergl. §. 22, I.

**) Vergl. §. 22, I.

zu 355 + 11$\frac{1}{4}$ = 366$\frac{1}{4}$ Tagen. Ihr mittleres Jahr war also um einen Tag zu lang, nemlich um jenen Tag, den Numa in seinem Mondjahre mehr als die Griechen zählte. Dadurch trat der Anfang des Jahres, folglich auch jedes ländliche Fest, alle 8 Jahre um 8 Täge zu spät ein. Um dieser Verspätung zu begegnen, ließ man, da die Schalteinrichtung im Wesentlichen beibehalten werden sollte, von Zeit zu Zeit einen Schaltmonat aus. Anfangs geschah dies ohne feste Regel und nach Willkür der Pontifices, denen das Anordnen der Zeitrechnung oblag. Später wurde — wenn Macrobius recht berichtet — eine 24jährige Schaltperiode eingeführt, die aus drei 8jährigen Schaltkreisen bestand, von denen die zwei ersten nach der Vorschrift 90, der lezte aber nur 66 Schalttage, also um die bis dahin zu viel gerechneten 24 Tage weniger enthielten. Diese Schaltperiode bekam demnach 24.355 + 3.90 — 24 = 8766 Tage, folglich betrug das mittlere Jahr der Römer 355 + 11$\frac{1}{4}$ — 1 = 365$\frac{1}{4}$ Tage. Allein wie zureichend genau auch diese Einschaltung bereits war, da sie, nach §. 19, erst in 128 Jahren einen Tag zu viel rechnet; so brachte doch theils Unwissenheit, theils Willkür oder Böswilligkeit der Pontifices, durch Mißachtung dieser Regeln, so viel Verwirrung in die römische Schaltrechnung, daß man in den Herbstmonaten die Sommerfrüchte erntete und in den Wintermonaten Weinlese hielt, und daß gegenwärtig an ihrer Aufklärung jeglicher Scharfsinn der Geschichtforscher scheitert.

40.

Fortsezung.

IV. Jahr des Julius Cäsar. Um so größeres Verdienst erwarb sich Julius Cäsar als **Pontifex maximus** dadurch, daß er nicht blos die römischen Monate zu den Jahrszeiten zurück führte, denen sie ursprünglich angehört hatten, sondern auch — zur Verhütung fernerer Verschiebungen — eine möglichst einfache Schaltregel aufstellte. Bei seinem Aufenthalte im Oriente, und durch den Peripatetiker Sosigenes, hatte er nemlich die Dauer des reinen Sonnenjahres kennen gelernt; daher führte er eine 4jährige Ausgleichung ein, indem er dreien ägyptischen Jahren zu 365 Tagen ein viertes von 366 Tagen beigesellte. (§. 19.) Diese von Julius Cäsar eingeführten Jahre wurden von den Römern **anni juliani** genannt. Das mittlere julianische Jahr hält demnach 365$\frac{1}{4}$ Tag; und ist also, vermöge §. 19, gegen das mittlere tropische Jahr von 365 T. 5 St. 48′ 48″ um 11′ 12″ zu lang; was in 128 Jahren einen vollen Tag ausmacht.

Den Anfang des ersten richtigen Jahres 45 vor Chr., 709 der Stadt Rom, sezte Cäsar auf die winterliche Sonnenwende (**bruma**), jedoch wahrscheinlich um seine Achtung vor den uralten, von ihm so viel möglich beibehal-

tenen Kalender-Einrichtungen des Numa an den Tag zu legen, auf den Neumond, der zunächst auf die Bruma folgte, und auf den er den ersten Januarius setzte.

Von den zehn Tagen, um welche Cäsar das 355tägige Jahr des Numa verlängerte, legte er je 2 dem Sextilis, December und Januarius, und je Einen den Monaten Aprilis, Junius, September und November bei, die früher sämmtlich nur 29 Tage gehabt hatten.

Den Schalttag setzte Cäsar an die Stelle des Schaltmonates zwischen Terminalia (23 Febr.) und Regifugium (24 Febr.), oder zwischen ante diem septimum und sextum Calendas Martias, folglich auf den 24 Februarius. Um nun im Schaltjahre an der Bezeichnung der Terminalia und der Tage rückwärts bis zu den Idus Februarii nichts zu ändern, gebot er, den Schalttag durch ante diem bissextum Cal. Martias anzudeuten; woher denn auch der Schalttag bissextum, so wie das Schaltjahr annus bissextus oder bissextilis genannt wurde.

Den Willen Cäsar's, welcher gleich im zweiten julianischen Jahre ermordet worden war, beobachteten die Pontifices entweder aus Unverstand oder Arglist nicht. In seinem Kalender-Edicte stand vermuthlich das zweideutige quarto quoque anno, daher sie, das jedesmalige Schaltjahr als das erste und das nächstkommende als das vierte zählend, eigentlich nach je 3 Jahren einschalteten. Dieser Fehler dauerte 36 Jahre lang, so daß man während derselben 12 Tage einschaltete, da doch nur 9 hätten eingeschaltet werden sollen. Darum befahl Cäsar's Nachfolger, der Imperator Augustus, nachdem er diese Abweichung entdeckt hatte, im J. 8 vor Chr., daß man in den nächsten 12 Jahren nicht einschalte, damit jene zu viel gerechneten 3 Tage wieder ausgestoßen würden. So wurde erst das Jahr 761 der Stadt Rom oder 8 nach Chr. wieder ein Schaltjahr, und von diesem Zeitpunkte an hat die julianische Einschaltung keine weitere Störung erlitten.

Die sehr zweckmäßigen Namen Quintilis und Sextilis verwandelte endlich noch die römische Servilität in Julius und Augustus. Ueberhaupt mußte der römische Kalender später bald von dem Hochmuthe der Kaiser, bald von dem Sclavensinne ihres Schattensenates mancherlei Abgeschmacktheit aufnehmen.

41.

Fortsetzung. Julianisch-römische Jahrform.

Das julianische Jahr hatte demnach, wenn allgemein i die Anzahl seiner Schalttage vorstellt, also in Gemeinjahren 0 und in Schaltjahren 1 ist, folgende Form:

Monat	Tage	Tagsumme	0. Tag
1) **Januarius**	31	31	0
2) **Februarius**	28 + i	59 + i	31
3) **Martius**	31	90 + i	59 + i
4) **Aprilis**	30	120 + i	90 + i
5) **Maius**	31	151 + i	120 + i
6) **Junius**	30	181 + i	151 + i
7) **Julius**	31	212 + i	181 + i
8) **Augustus**	81	243 + i	212 + i
9) **September**	30	273 + i	243 + i
10) **October**	31	304 + i	273 + i
11) **November**	30	334 + i	304 + i
12) **December**	31	365 + i	334 + i

Die jedem Monate beigesezte Tagsumme gibt an, wie viel Tage am Ende desselben verflossen sind; der ihm beigeschriebene nullte Tag aber, wie viel Tage bis zu seinem Anfange vergingen, nach dem wievielten Tage des Jahres der betreffende Monat anfängt, oder der wievielte Tag im Jahre der nullte Tag dieses Monates oder der lezte des vorhergehenden ist.

Mit Hilfe dieser zwei Columnen lassen sich, nach §. 25, leicht die Monats- und Jahrstage in einander verwandeln, die Zahl der einem gewissen Monatstage vorangehenden oder noch im Jahre nachfolgenden Tage, und der Abstand jeder zwei Monatstage von einander bestimmen.

1. Beispiel. Sei der Jahrstag des 24 **Februarius** zu suchen. Es ist

$$
\begin{array}{r}
0 \text{ Febr.} = 31 \\
\text{dazu } 24 \\
\hline
\text{gibt } 24 \text{ Febr.} = 55,
\end{array}
$$

d. h. der 24 Febr. ist der 55ste Tag des Jahres. Nach ihm kommen also noch $365 + i - 55 = 310 + i$ Tage im Jahre.

2. Beispiel. Der mittelste Tag eines Gemeinjahres ist, nach Vorbegr. IX, 1, β, der $\text{ɋ}\frac{365+1}{2} = 183^{\text{ste}}$ im Jahre. Es ist aber der 181ste Tag $= 0$ **Julius**, daher der 183ste Tag $= 2$ **Julius**. Die beiden mittleren Tage eines Schaltjahres sind, nach Vorbegr. IX, 1, α und 2, β, der $\text{ɋ}\frac{366}{2} = 183^{\text{ste}}$ und $\text{ɋ}\frac{366}{2} + 1 = 184^{\text{ste}}$ Tag; folglich weil 182. Tag $= 0$ **Julius** ist, der 1. und 2 **Julius**.

3. Beispiel. Der 1 September ist der $244 + i^{\text{te}}$ Tag des Jahres, also sind vor ihm $243 + i$ Tage, nach ihm $365 + i - (244 + i) = 365 - 244 = 121$ Tage. Hinter dem 24 **Februarius** ist er demnach der $244 + i - 55 = 189 + i^{\text{te}}$ Tag.

Anmerkung. Nach solchen julianischen Jahren rechnen die Chronologen, wegen der Einfachheit ihrer Form und Einschaltung, nicht blos vorwärts, sondern auch so tief in die Vorzeit zurück, als sie es bedürfen.

42.

Vergleichung der römischen Datirung mit der gewöhnlichen.

Nach dem, im Vorhergehenden, Erklärten läßt sich leicht die rückschreitende römische Zählung der Monatstage auf die natürlich fortlaufende, und umgekehrt diese auf jene zurück führen; indem man sich an die, von folgenden kurzen Gleichungen ausgesprochenen, Vorschriften hält. Es ist nemlich

$$\text{Calendae} = 1,$$

d. i. Calendae heißt jedesmal der 1. Tag des Monats.

In den vier Monaten:

Martius, Maius, Julius (s. Quintilis), October hat man

$$\text{Nonae} = 7, \qquad \text{Idus} = 15,$$

in allen anderen Monaten um 2 Tage früher, nemlich

$$\text{Nonae} = 5, \qquad \text{Idus} = 13;$$

allgemein ist

$$\text{Idus} = \text{Nonae} + 8$$
$$\text{Nonae} = \text{Idus} - 8.$$

Für die Tage vor den $\frac{\text{Nonae}}{\text{Idus}}$ benüzt man die Regeln:

$$n^{\text{tus}} \text{ ante } \frac{\text{Nonas}}{\text{Idus}} = \frac{\text{Nonae}}{\text{Idus}} + 1 - n = t,$$

und umgekehrt:

$$n = \frac{\text{Nonae}}{\text{Idus}} + 1 - t;$$

insbesondere für $n = 2$ ist der Vortag der $\frac{\text{Nonae}}{\text{Idus}}$

$$\text{pridie } \frac{\text{Nonas}}{\text{Idus}} = \frac{\text{Nonae}}{\text{Idus}} - 1.$$

Für die Tage vor den Calendae, welche jedoch immer nach dem kommenden Monate benannt werden, hat man, wenn μ die Anzahl der Tage des laufenden Monates ergibt,

$$n^{\text{tus}} \text{ ante Calendas} = \mu + 2 - n = t$$

und umgekehrt:

$$n = \mu + 2 - t;$$

insbesondere für $n = 2$ ist der lezte Tag des Monates

$$\text{pridie Calendas} = \mu.$$

Beispiele. Pridie Nonas Januarii $= 5 - 1 = 4^{to}$ Januarii, media hiems.
Nonas Julias $= 7^{mo}$ Julii, Corona occidit mane.
VII. Idus Majas $= 15 + 1 - 7 = 9^{no}$ Maji, aestatis initium.
Idibus Juliis, $= 15^{to}$ Julii, Procyon exoritur mane.
XIII. Cal. Augusti, $= 31 + 2 - 13 = 20^{mo}$ Julii, Sol in Leonem transitum facit.

Columella de re rustica.

43.

Nundinalbuchstaben.

Zur Bestimmung der Nundinae wurden, seit Julius Cäsar, in den römischen Kalendern (fasti) sämmtliche Tage des Jahres, wie sie nach einander kommen, mit den wiederkehrenden 8 ersten Buchstaben des Alphabetes bezeichnet, welche darnach Nundinalbuchstaben genannt werden. Nur im Schaltjahre bekam der Schalttag (das bissextum), der 24 Februarius, damit hinter dem Schalttage die sonstige Anordnung der Nundinalbuchstaben ungestört blieb, denselben Buchstaben G wie sonst der ihm nachfolgende VI. Calendas Martias, welcher im Schaltjahre der 25, im Gemeinjahre der 24 Februarius ist.

Deutet man, zum Behufe der Rechnung, die Nundinalbuchstaben durch Zahlen an, so erhalten

die Nundinalbuchst.	A	B	C	D	E	F	G	H
die Nummern	1	2	3	4	5	6	7	8.

Bei dieser periodischen Zählung der Jahrstage von 1 bis 8 mußte, vermöge XVIII, (80) der Vorbegriffe, dem d^{ten} Tage des Jahres, indem man auf den Schalttag keinen Bedacht nahm, oder lauter Gemeinjahre rechnete, der Nundinalbuchstabe

$$\nu = R\frac{d}{8} \equiv d, \text{ mod } 8$$ zukommen.

So ist der 24 Febr. $= 55$. Tag im Jahre $= d$,
also $\nu \equiv 55 \equiv 7$, mod $8 = G$; daher

im Gemeinjahre:	Febr.	23.	24.	25.	26.	27.	28.
	ante Cal. Mart.	VII.	VI.	V.	IV.	III.	pridie
	Nundinalbuchst.	F	G	H	A	B	C
im Schaltjahre:	Febr.	24.	25.	26.	27.	28.	29.
	ante Cal. Mart.	bissext.	VI.	V.	IV.	III.	pridie
	Nundinalbuchst.	G	G	H	A	B	C

Will man diese Ausnahme beseitigen, so kann man für alle Fälle giltig

$$(53) \qquad \nu \equiv d - i\,\mathfrak{E}\frac{d+255}{311}, \text{ mod } 8$$ setzen,

weil der hier vorkommende Quotus, nach XXII, 1 o. 2, dergestalt bestimmt ist, daß er = 0 für d < 56, und = 1 für d > 55 bis d = 366 wird. Dabei bedeutet immer i die Anzahl der Schalttage des betreffenden Jahres.

Die Nundinalbuchstaben werden den Datis zur genaueren Bestimmung und Controlle beigesezt.

44.

Jahrrechnung der Römer.

I. Consular-Jahre. Die Römer benannten ihre Jahre nach den Consuln, welche alljährlich gewählt wurden; sogar noch unter den Kaisern, welche sie, obwohl nur als Schattenmagistrate, der alten Form zu Liebe, bis zum Jahre 541 nach Chr. beibehielten.

II. Aere der Erbauung der Stadt Rom. Als aber unter den Römern Männer, wie M. Porcius Cato Censorinus, der etwa 600 Jahre nach der Gründung der Stadt Rom schrieb, aufstanden, welche die Geschichte des römischen Volkes mit einiger Kritik zu bearbeiten anfingen; kam es darauf an, die nach den Consuln bezeichneten Jahre, von einer den Römern denkwürdigen Begebenheit an, fortlaufend zu zählen. Am natürlichsten wählten sie hiezu die Gründung ihrer Hauptstadt, welche einer alten Sage nach am 21 Aprilis geschah; weswegen man zum Andenken an diesem Tage das Fest Parilia oder Palilia feierte. Cato sezt die Gründung der Stadt Rom in das 432. Jahr nach der Zerstörung Troja's. Nach Dionysius von Halicarnaß aber beträgt der Zeitraum zwischen der Zerstörung Troja's und der ersten Olympiade der Griechen, welche um die sommerliche Sonnenwende anfing, 408 Jahre; folglich sezt Cato's Rechnung die Gründung Roms in den Frühling des vierten Jahrs der sechsten Olympiade (§. 14, II.), welches nach ferneren Vergleichungen im Sommer des Jahres 752 vor Chr. endet. Nach einer anderen Rechnung, deren Gründe wir jedoch nicht kennen, nimmt M. Terentius Varro, einer der gelehrtesten Römer aus dem Zeitalter des Cicero, die Gründung der Stadt noch um ein Jahr früher an, nemlich im 3. Jahre der 6. Olympiade oder 753 vor Chr. Nach dieser, von den späteren Römern und den Chronologen am meisten gebilligten Varronischen Rechnung fällt demnach die Gründung der Stadt Rom auf den 21 Aprilis des Jahres 753 vor Chr.

Gewöhnlich vernachlässigt man den Abstand der Anfänge des julianischen Jahres am 1 Januarius, und des Jahres der Stadt am 21 Aprilis; weil die Data nach beiden in den Monatstagen übereinstimmen.

Um zu finden, welche Jahre d. St. julianische Schaltjahre waren, bemerken wir, daß nach August's Anordnung das Jahr 761 ein Schaltjahr

war, und da seither ununterbrochen alle vierte Jahre eingeschaltet wurde, muß, wenn a ein Jahr d. St. bezeichnet, vermöge Vorbegr. XVIII (81), $a \equiv 761 \equiv 1$, mod 4 sein. In der Aere der Erbauung Roms ist demnach, vom J. 761 an, jedes Jahr, welches durch 4 getheilt 1 zum Reste gibt, ein julianisches Schaltjahr.

III. Aere der julianischen Kalenderverbesserung; Anni juliani. Diese Aere beginnt mit dem 1 Januarius des Jahres 709 d. St., 45 vor Chr., des ersten in dem von Julius Cäsar verbesserten Kalender. Ihrer bedienten sich mehrere Chronologen, wie Censorinus (991 d. St.) und Kepler (1613 n. Chr.). Zu ihrer Reduction auf die Jahre d. St. dient nach Vorbegr. XVII (76), indem man $\pi = 1$, $\nu = 709$ sezt, oder nach §. 32, VI, die Gleichung

(54) Jahr d. St. = julianisches Jahr + 708.

So ist z. B. obiges Jahr 761 d. St. das jul. Jahr 761 — 708 = 53. Von diesem Jahre 53 an, waren demnach auch alle julianischen Jahre, die, so wie 53, durch 4 getheilt 1 zum Reste geben, Schaltjahre.

IV. Aere der römischen Kaiser; Anni Augustorum. Sie fängt mit dem 1 Januarius des Jahres 727 d. St., 27 v. Chr. an, in welchem Octavianus den Namen Augustus erhielt. Sie scheint wenig gebraucht zu sein. Um sie auf die Jahre d. St. zu bringen, sezt man in Vorbegr. XVII (76) $\pi = 1$, $\nu = 727$, und erhält die Gleichung

(55) Jahr d. St. = Jahr d. röm. Kaiser + 726.

So ist z. B. obiges Jahr 761 d. St. das Jahr 761 — 726 = 35 der röm. Kaiser. Von diesem Jahre 35 an sind demnach alle röm. Kaiserjahre Schaltjahre, die durch 4 getheilt 3 zum Reste geben, so wie 35.

Zweiter Abschnitt.

Zeitrechnung der christlichen Völker.

Erstes Hauptstück.

Eigentliche oder bürgerliche Zeitrechnung.

45.

Die Zeitrechnung, welche mit geringen Abweichungen von fast sämmtlichen Völkern der Christenheit gebraucht wird, ist, so weit sie Anfang, Dauer und Eintheilung des Jahres betrifft, wesentlich die durch Julius Cäsar verbesserte römische, von der im vorigen Abschnitte gehandelt wurde. Auch die Monatsnamen sind meistens die zum Theil entstellten römischen, selten den Völkern eigenthümliche.

46.

Die Woche.

Nur die von den Nundinis begrenzten achttägigen Zeitabschnitte wurden allmälig, und unter Kaiser Constantin (324 bis 337 n. Chr.) gänzlich, durch die siebentägige Woche verdrängt, die mit dem jüdischen Cultus seit jeher und nachher auch mit dem aus ihm hervorgegangenen christlichen verflochten war. Die einzelnen Tage derselben führen folgende Namen:

Wochentag	deutsche	lateinische	kirchliche Namen.
1er	Sonntag	Dies Solis	Feria 1ma v. Dominica
2	Montag	— Lunae	— 2da
3	Dinstag	— Martis	— 3tia
4	Mittwoch	— Mercurii	— 4ta
5	Donnerstag	— Jovis	— 5ta
6	Freitag	— Veneris	— 6ta
7	Samstag	— Saturni	— 7ma
	o. Sonnabend		v. Sabbatum.

Anfangs feierten, den Juden nachahmend, viele Römer — selbst Nichtchristen — den letzten Wochentag, im Jüdischen Sabbath genannt, durch Gebet und Enthaltung von der Arbeit. Später machten die Christen den Sonntag, als den Tag der Auferstehung Christi, also den ersten Tag der Woche, zum Feiertage.

Warum die christliche Kirche mit dem Worte **Feriae**, welches bei den Römern Feiertage bezeichnete, an denen keine Geschäfte, weder vor Gericht, noch sonst wo, vorgenommen wurden, allgemein die Wochentage benannte, weiß man nicht bestimmt.

47.

Jahrrechnung der Christen. Gewöhnliche fortlaufende.

I. Dionysische christliche Aere. Die gegenwärtig gebräuchliche, gemeine, europäische oder christliche Aere hat den Abt Dyonisius, mit dem Beinamen Exiguus, zum Urheber, der in seiner Ostertafel, d. i. in einem Verzeichnisse der Data des Osterfestes in mehreren nach einander folgenden Jahren, die Jahre ab **Incarnatione Domini**, von 532 an, zählte. Diese Ostertafel und damit die Aere, an die sie geknüpft war, kam bald nach der Mitte des 6. Jahrhunderts in kirchlichen Gebrauch. Im 8. Jahrhunderte wurde der Gebrauch dieser Aere allgemeiner verbreitet, hauptsächlich durch den angelsächsischen Gelehrten Beda, der sich ihrer in seinen chronologischen Schriften häufig bedient. Den Untersuchungen der Chronologen zu Folge sezte Dionysius die Geburt Christi an den Schluß des ersten Jahres seiner Aere, des 754sten Jahrs der Stadt Rom. Dabei ist längst und allgemein anerkannt, daß seine Aere mindestens um 4, ja wie Sanclemente ausführlich nachweist, sicher um 6 Jahre zu spät anfängt, so daß Christus eigentlich im Jahre 747 der Stadt Rom geboren wurde. Doch wird es Niemanden einfallen, eine Aenderung dieser in alle unsere Verhältnisse so innig verwebten Aere für wünschenswerth, ja auch nur für möglich zu halten.

Mit der christlichen Aere ist der julianische 4jährige Schaltkreis dergestalt verknüpft, daß alle durch 4 theilbare Jahre derselben Schaltjahre sind, oder daß immer im 4. Jahre jedes Schaltkreises eingeschaltet wird. Der Kreis der 7 Wochentage hängt mit ihr so zusammen, daß, wie die Zurückrechnung nachweist, der 0. Januar 1 nach Chr. ein Freitag gewesen wäre, oder, daß die Aere nach einem 6. Wochentage anfing. Wegen des allgemeinen Gebrauches dieser Aere ist es am angemessensten, alle Data nach anderen Aeren auf sie zurück zu führen, oder alle übrigen Aeren mit ihr zu vergleichen. Man kann sogar jede zwei Aeren vermittelst der christlichen mit einander vergleichen, indem man die Data der einen Aere in die christliche und aus dieser wieder in die zweite Aere überträgt.

Machen wir den Anfang mit der kurz vorher besprochenen Aere der Gründung Roms, so müssen, weil das 1. Jahr nach Christi Geburt das Jahr 754 d. St. ist, vermöge Vorbegr. (76), wo $\nu = 1$, $\pi = 754$ wird, allgemein die Gleichungen bestehen

(56) Jahr nach Chr. = Jahr d. St. Rom — 753.
Jahr d. St. = Jahr nach Chr. + 753.

Z. B. das Jahr 800 d. St., in welchem Claudius, nach Varronischer Rechnung, die Säcularfeier der Gründung Roms anordnete, war das Jahr 800 — 753 = 47 nach Chr. Seit dem Jahre 601 d. St. traten die Consuln ihr Amt am 1 Januar an, also seit 601 — 753 = —152 nach Chr. = 153 vor Chr.

Will man für die Jahre vor Chr. die Vergleichung besonders aufstellen, so erwäge man, daß vermöge Vorbegr. XVII, 2

— Jahr nach Chr. = Jahr vor Chr. — 1, also
= — Jahr d. St. + 753 ist; daher hat man

(57) Jahr vor Chr. = 754 — Jahr d. St.
Jahr d. St. = 754 — Jahr vor Chr.

Eben so findet man für die Aere der julianischen Kalenderverbesserung die Verwandlungsgleichungen

(58) Jahr nach Chr. = julianisches Jahr — 45
Julianisches Jahr = Jahr nach Chr. + 45;

und für die Aere der römischen Kaiser

(59) Jahr nach Chr. = röm. Kaiserjahr — 27
Röm. Kaiserjahr = Jahr nach Chr. + 27.

II. Neuer oder gregorianischer Styl der christlichen Aere. Wegen des der julianischen Schaltrechnung anklebenden Fehlers erfuhr die christliche Aere, gegen das Ende des 16. Jahrhunderts, eine Unterbrechung im Zuge ihrer Tage und eine Verbesserung ihrer Einschaltung. Die Verspätung des Anfangs des mittleren julianischen Jahres beträgt nemlich, vermöge §. 19, in je 128 Jahren einen vollen Tag; darum mußte die Frühlingsnachtgleiche, welche zur Zeit der nicänischen Kirchenversammlung (325 n. Chr.) am 21 März eingetreten war, gegen das Jahr 1580 bereits um (1580 — 325) : 128 = 1255 : 128 nahe = 10 Tage früher, also am 11 März eintreten. Um sie daher wieder auf den 21 März zurück zu führen, wie es die kirchliche Festrechnung wünschenswerth machte, ließ man, auf Papst Gregors XIII. Anordnung, im Jahre 1582 die bereits zu viel gerechneten 10 Tage weg, indem man nach Donnerstag den 4 October, ohne Unterbrechung des Laufes der Wochentage, sogleich Freitag den 15 October 1582 schrieb. Damit aber die Frühlingsnachtgleiche auch in Hinkunft am 21 März hafte, setzte der Papst fest, daß zwar auch ferner die durch 4 theilbaren Jahre, wie in der julianischen Zeitrechnung, Schaltjahre sein sollen, jedoch mit der einzigen Beschränkung, daß jedes Säcularjahr (d. i. das letzte oder hundertste eines Jahrhunderts, dessen Jahrzahl demnach rechts zwei Nullen führt), welches durch 400

nicht theilbar ist, wie 1700, 1800, 1900, 2100, ... ein Gemeinjahr sei, folglich in je 400 Jahren die zu viel gezählten 3 Tage wieder ausgestoßen werden.

Seit dieser Berichtigung unterscheidet man in der christlichen Aere die julianische und gregorianische Schaltrechnung oder den alten und neuen Styl oder Kalender. Nach dem neuen datiren gegenwärtig alle christlichen Völker außer denen, die sich, wie die Russen, zur griechischen Kirche bekennen.

Diesen neuen oder gregorianischen Styl kann man, wenn man will, völlig unabhängig von dem alten oder julianischen Style als eine eigenthümliche Zeit- und Jahrrechnung behandeln, indem man annimmt, man habe sie erst von Freitag dem 15 October 1582 an zum Datiren verwendet, aber in ihr schon vom Anfang herein die angeordnete Einschaltung befolgt. Da nun bis zu jenem Tage 12 durch 400 nicht theilbare Säcularjahre vorkamen, aber blos 10 Schalttage, folglich um 2 zu wenig ausgelassen wurden; so müßte man die Epoche des neuen Styls, nemlich den 1 Januar neuen St. des Jahres 1 nach Chr. auf Montag den 3 Januar alt. St. des Jahres 1 nach Chr. verlegen.

Natürlicher und einfacher ist es aber, die Voreilung des neuen Styles oder Kalenders, weil sie wenigstens durch viele Jahrhunderte noch nur wenige Tage beträgt und immer ein oder zwei Jahrhunderte dieselbe bleibt, zu bestimmen, und darnach die Data nach beiden Stylen auf einander zurück zu führen. Eilt nemlich das gregorianische Datum dem julianischen um k Tage vor, so hat man die Verwandlungsgleichungen:

(60) Gregorianisches Datum = julianisches Datum + k

Julianisches Datum = gregorianisches Datum — k.

Dabei muß jedoch beachtet werden, daß jede zwei übereinstimmende Tage des alten und neuen Styles auf denselben Wochentag treffen.

Um diese Voreilung k zu bestimmen, sei s die in einem Jahre a nach Chr. enthaltene Anzahl voller Jahrhunderte, nemlich die Zahl $\mathfrak{E}\frac{a}{100}$, welche sich ergibt, wenn man in der Jahrzahl die beiden lezten Ziffern rechts wegläßt. Dann ist, weil man erstlich 10 Tage ausstieß, und weil zweitens vom Anfange des Jahres 1600 bis zum Anfange des betreffenden Jahres $s-16$ Säcularjahre überhaupt vorkommen, unter denen jedes vierte, nemlich jene, bei denen $s-16=0, 4, 8, 12, \ldots$ ist, also in Allem $\mathfrak{E}\frac{s-16}{4}$, durch 400 theilbar sind,

$$k = 10 + (s-16) - \mathfrak{E}\frac{s-16}{4},$$

oder nach Vorbegr. XIV, Gl. (45)

$$(61) \qquad k = s - \mathfrak{E}\frac{s}{4} - 2,$$

oder endlich nach Vorbegr. XV, Gl. (59)

$$k = \mathfrak{q}\frac{4(s-2+1)-(s+1)}{4},$$

nemlich

$$(62) \qquad k = \mathfrak{q}\frac{3s-5}{4}.$$

Der lezte Ausdruck ergibt sich auch nach Art. XXII, 3 der Vorbegriffe. Denn bezeichnet man die Jahrhunderte hinter dem 16ten mit x, nemlich $s-16=x$, so kommen unter je $4=\varpi$ Jahrhunderten $3=\varepsilon$ vor, in denen ein Schalttag ausbleibt, nemlich nach dem 0ten, 1sten, 2ten Jahrhunderte, oder für $x \equiv 0, 1, 2, \bmod 4$. Dem gemäß ist

$$\Sigma\xi = 0+1+2 = 3, \quad \delta \equiv -2-3 \equiv 3, \bmod 4.$$

Es soll aber für $s=16$ oder $x=0$, $u=k=10$ sein, daher hat man $\mathfrak{q}\frac{\delta}{4} = 10$, und somit $\delta = 43$. Dies gibt demnach, vermöge Gl. (189) in den Vorbegr.,

$$u = k = \mathfrak{q}\frac{3x+43}{4} = \mathfrak{q}\frac{3(s-16)+43}{4} = \mathfrak{q}\frac{3s-5}{4}.$$

Bei der Berechnung der Voreilung des neuen Styles vor dem alten darf man jedoch nicht übersehen, daß, weil der Februar den Schalttag enthält, bei jedem durch 400 untheilbaren Säcularjahre, vom 1 Januar an bis zum lezten oder 29 Februar alten Styles einschließlich, noch die nächst frühere Anzahl, $s-1$, der Jahrhunderte beibehalten und erst vom 1 März alten Styles an die rechte Anzahl, s, der Jahrhunderte genommen werden muß. Man läßt also gleichsam das Jahr oder Jahrhundert mit dem 1 März alt. St. anfangen.

Zur schnelleren Uebersicht mag folgende Tafel der Voreilungen des gregorianischen Datums dienen, in welcher die Grenztage jederzeit einschließlich zu verstehen sind.

Während der Zeit alten Styles								eilt der neue Styl dem alten vor um
vom	5	Oct.	1582	bis	29	Februar	1700	10 Tage
»	1	März	1700	»	»	»	1800	11 —
»	»	»	1800	»	»	»	1900	12 —
»	»	»	1900	»	»	»	2100	13 —
»	»	»	2100	»	»	»	2200	14 —
»	»	»	2200	»	»	»	2300	15 —
»	»	»	2300	»	»	»	2500	16 —
»	»	»	2500	»	»	»	2600	17 —
»	»	»	2600	»	»	»	2700	18 —
»	»	»	2700	»	»	»	2900	19 —
»	»	»	2900	»	»	»	3000	20 —

Beträgt demnach die Voreilung des gregorianischen Kalenders in einem durch 400 untheilbaren Säcularjahre vor dem 1 März a. St. k und von diesem an $k' = k + 1$ Tage, so ist

t Februar alt. St. $= t + k$ Febr. $= t + k - 28$ März neu. St.
t März — $= t + k'$ März $= t + k' - 31$ April —
und umgekehrt
t Februar neu. St. $= t - k$ Febr. $= t - k + 31$ Jan. alt. St.
t März — $= t - k'$ März $= t - k' + 29$ Febr. —
$= t - k + 28$ Febr. —

Im gegenwärtigen 19. Jahrhunderte eilt der neue Kalender dem alten um 12 Tage vor. So ist jezt unser Neujahrstag der griechische $32 - 12 = 20$ December im alten Jahre, und der russische Neujahrstag an unserem 13 Januar.

Bei den Vergleichungen der christlichen Aere mit den anderen rechnen die Chronologen gewöhnlich nach dem alten Kalender, weil die Schaltregel desselben höchst einfach und gleichförmig ist.

Man kann sich umgekehrt die interessante Frage stellen: „Wann wird das julianische Datum um eine gewisse Anzahl Tage, um einen, zwei, drei Monate u. s. f. hinter dem gregorianischen zurück bleiben? wann um ein ganzes Jahr?"

Hier ist demnach mittels der Gleichung $\mathfrak{q}\frac{3s-5}{4} = k$ die Zahl s der Jahrhunderte durch die Voreilung k auszudrücken. Zu diesem Zwecke multiplicirt man die Gleichung durch 4, und erhält

$$4\,\mathfrak{q}\frac{3s-5}{4} = 3s - 5 - \mathfrak{r}\frac{3s-5}{4} = 4k,$$

daher
$$3s = 4k + 5 + \mathfrak{r}\frac{-(s+1)}{4}$$
$$= 4k + 5, \ldots\ldots 4k + 8.$$

Hieraus folgt

$$s = \mathfrak{Q}\frac{4k+5}{3} + 1, \quad \mathfrak{q}\frac{4k+8}{3}$$

oder

$$(63) \qquad s = k + \mathfrak{Q}\frac{k-1}{3} + 3, \quad k + \mathfrak{q}\frac{k-1}{3} + 3.$$

Beide Werthe von s fallen zusammen, so oft $k \equiv 2, 0, \bmod 3$; und unterscheiden sich um 1, sobald $k \equiv 1, \bmod 3$ ist.

Für $k = 1$ Monat oder 30 Tage ist $s = 30 + 9 + 3 = 42$,
$k = 2$ » » 61 » » $s = 61 + 19 + 3 = 83, 84$
$k = 3$ » » 91 » » $s = 91 + 29 + 3 = 123, 124$
$k = 1$ Jahr oder 365 » » $s = 365 + 121 + 3 = 489$.

Man wird daher nach dem julianischen Kalender im Jahre 4200 um einen Monat, im Jahre 8300 um zwei Monate, und im Jahre 12300 um ein

Vierteljahr, endlich im Jahre 48900 um ein volles Jahr später als nach dem gregorianischen Kalender datiren.

III. Die spanische Aere, vorzugsweise Aera oder Era genannt, fing mit dem 1 Januar 716 d. St. oder 38 vor Chr. an. Ihr Ursprung ist zweifelhaft. Sie wurde besonders seit dem Anfange des 5. Jahrhunderts n. Chr. auf der pyrenäischen Halbinsel, in Nord-Afrika, und im südlichen Frankreich gebraucht. In Spanien verließ man sie erst 1383, und in Portugal 1420. Zu ihrer Vergleichung mit der christlichen Aere gewinnt man, aus Vorbegr. (76), wenn man $\nu = -(38-1) = -37$, $\pi = 1$ setzt, die Gleichung

(64) Jahr nach Chr. = Jahr d. spanischen Aere — 38.

Für Schaltjahre ist Jahr nach Chr. $\equiv 0$, mod 4, daher Jahr d. span. Aere $\equiv 2$, mod 4. In der span. Aere sind demnach Schaltjahre diejenigen, welche durch 4 getheilt 2 zum Reste geben.

48.

Fortsetzung. Christliche Weltären.

Seit den ersten Jahrhunderten des Christenthums regte sich in den christlichen Geschichtforschern das Streben, die Jahre von der Schöpfung der Welt, oder eigentlich des ersten Menschen, zu zählen. So brauchbar auch diese Epoche für die Geschichte der Menschheit wäre, so läßt sie sich doch mit gar keiner Annäherung bestimmen, weil die Urzeit des Menschengeschlechtes nicht anders als in völlig finstere Nacht gehüllt sein kann, ja selbst noch eine geraume spätere Zeit, bis an's sechste Jahrhundert vor Christus, nur in mythischem Dunkel schwebt. Darin liegt es auch, warum die 200 Angaben, welche Des-Vignoles gesammelt, so bedeutend von einander abweichen, daß die größte 6984, die kleinste 3483 Jahre von Adam bis Christus zählt; und doch sind hiebei weder die Profanscribenten, noch die Geologen berücksichtigt. Höchst verwirrend ist darum der Gebrauch dieser sogenannten Weltären, zumal von den Geschichtschreibern der eine nach dieser, der andere nach jener, mancher sogar früher nach der einen und später wieder nach einer anderen rechnet; und es bleibt demnach fast noch das Beste, bei der alten Geschichte nach Jahren vor Christi Geburt zurück zu zählen; obschon selbst dies Zurücklaufen der Jahre bei dem Vorschreiten der Stunden, Tage und Monate, das Bezeichnen der frühen Begebenheiten mit großen, und der späten mit kleinen Jahrszahlen, nicht sonderlich bequem und klar ist. Von den Weltären der Christen heben wir folgende hervor:

I. Die byzantinische oder constantinoplische Weltäre. Sie setzt die Schöpfung der Erde auf Samstag den 1 September 5509 vor Chr. Ihre Entstehung liegt im Dunkeln. Gewöhnlich gibt man an, die orientalischen Theologen hätten auf dem sechsten ökumenischen Concilium, welches im

Jahre 681 nach Chr. zu Constantinopel abgehalten wurde, angenommen, die Welt sei Samstag den 1 September 5509 vor Chr. erschaffen worden. Die Aere kommt seit dem achten Jahrhunderte nach Chr. häufig vor. Nach ihr datirte man im byzantinischen oder oströmischen Reiche allgemein; so die Kaiser ihre Novellen, die Patriarchen ihre Hirtenbriefe; auch rechnen nach ihr die späteren byzantinischen Geschichtschreiber und Chronographen. Mit dem Ritus der griechischen Kirche überging sie zu den Russen, wo sie als kirchliche und bürgerliche Jahrrechnung bis auf Peter d. Gr. bestand, der seit 1700 die europäische Aere, jedoch nicht den gregorianischen Styl einführte. Noch jezt bedienen sich ihrer die Neugriechen, Serbier und Albaner.

Die mit dieser Aere verbundene Jahrform und Einschaltung ist ganz die julianische, nur fangen die Jahre am 1 September alt. St. an; daher für sie folgende Tafel gilt:

	Monat	Tage	0. Tag		Monat	Tage	0. Tag
1)	September	30	0	7)	März	31	181 + i.
2)	October	31	30	8)	April	30	212 + i
3)	November	30	61	9)	Mai	31	242 + i
4)	December	31	91	10)	Juni	30	273 + i
5)	Januar	31	122	11)	Juli	31	303 + i
6)	Februar	28 + i	153	12)	August	31	334 + i.

Nach Gleich. (49) der allg. Chron. beginnt nun, wenn man daselbst $A = 1$, $A' = -(5509 - 1) = -5508$ sezt, das byzantinische Jahr a im Jahre a — 5509 nach Chr. und endigt sich im Jahre a — 5508. Es ist daher ein Schaltjahr, wenn in dem lezteren eingeschaltet wird, folglich wenn diese Jahrzahl a — 5508, vermöge §. 47, I, durch 4 theilbar ist, also ganz wie in der gemeinen christlichen Aere alten Styles, so oft seine Jahrzahl a durch 4 theilbar ist. — Umgekehrt endet im Jahre a nach Chr. das Jahr a + 5508 und beginnt das Jahr a + 5509 der byzantinischen Weltäre. So z. B. zählten die Griechen in den ersten acht Monaten unseres Jahres 1813 ihr 1813 + 5508 = 7321stes, und in den übrigen vieren ihr 7322stes. Einem Monatstage alten Styles im Jahre a nach Chr. entspricht demnach derselbe Monatstag im byzantinischen Jahre a + 5508 oder a + 5509, und umgekehrt einem Monatstage im byzantinischen Jahre a entspricht derselbe Monatstag alten Styls im Jahre a — 5508 oder a — 5509 nach Chr., je nachdem dieser Monatstag vor den 1 September oder nach den 31 August fällt. (§. 32, IV.)

Weil diese Weltäre unter den von uns anzuführenden am weitesten in die Vorwelt zurück reicht, so dient sie zur Ermittlung der Abstände der Epochen der übrigen Aeren am besten, wenn man den Abstand der Epoche jeder einzelnen

Aere von der Epoche der byzantinischen Weltäre bestimmt. Für die bisher besprochenen Aeren findet man folgende Abstände:

Aere	Ihre Epoche ist d. 1 Jan. o. 123. Tag d. byzantin. Jahres,	daher hinter der Epoche d. byzant. Weltäre um Tage
der Erbauung Roms	4756	1736885
der julianischen Jahre	5464	1995482
der römischen Kaiser	5482	2002057
alten Styls nach Chr. Geb. . . .	5509	2011919
spanische	5471	1998039

Denn nach Gleich. (11) der allg. Chron. ist der d^{te} Tag des Jahres a in der byzantinischen Weltäre, wo man $l = 365$, $\Delta l = 1$, $\varepsilon = 1$, $\varpi = 4$, und nach dem Beisp. in §. 24, II, $\delta = -1$ hat, der Tag dieser Aere

(65) $n = 365(a-1) + \mathfrak{q}\frac{a-1}{4} + d = 365a + \mathfrak{q}\frac{a}{4} - (365-d).$

Folglich ist der 0 Januar des Jahres a, als der $122 = d^{te}$ Tag desselben, der Tag der byzantinischen Aere

(66) $g = 365(a-1) + \mathfrak{q}\frac{a-1}{4} + 122 = 365a + \mathfrak{q}\frac{a}{4} - 243;$

und diese Zahl g gibt auch den Abstand beider Epochen an. Weil ferner der erste Tag der byzantinischen Aere ein Samstag, also der nullte ein 6. Wochentag ist, so ist überhaupt dieser g^{te} Tag der Wochentag $\equiv g + 6 \equiv g - 1$, mod 7, und für obigen Ausdruck von g der Wochentag $\equiv a + \mathfrak{q}\frac{a}{4} + 1$, mod 7.

II. Die Weltäre des Panodorus, eines ägyptischen Mönchs, der um den Anfang des 5. Jahrhundertes lebte, von vielen Chronologen die antiochenische, von Ideler die alexandrinische Weltäre, und von Gatterer die Kirchenjahrrechnung genannt, setzt das 1. Jahr nach Chr. in ihr Jahr 5493. Diejenigen Chronographen, welche mit dieser Aere die julianische Jahrform verknüpfen, lassen das Jahr am 1 September anfangen. Panodorus selbst, als Alexandriner, verband damit ohne Zweifel die alexandrinische Jahrform, von der bei den Aegyptern gehandelt werden wird, und fing das Jahr am 29 August an. Diese Weltäre wurde lange, noch im 7. Jahrhunderte, bei der Berechnung des Osterfestes gebraucht.

Das Jahr a der Weltäre des Panodorus beginnt demnach im Jahre a — 5493 nach Chr. und stimmt in den beiden letzten Drittheilen mit dem folgenden Jahre a — 5492 überein. Umgekehrt im Jahre a nach Chr. zählt man in den ersten 8 Monaten das Jahr a + 5492 und in den 4 übrigen das Jahr a + 5493 des Panodorus.

Mit dieser Weltäre ist die des Anianus, eines anderen ägyptischen Mönches und Zeitgenossen des Panodorus, identisch; denn beide Chronographen setzten

den Anfang der christlichen Aere in das Jahr 5493; nur darin wichen sie von einander ab, daß Anianus die **Incarnatio Christi** nicht in 5493, sondern 8 Jahre später, in 5501 setzte.

III. Die griechisch-römische Periode, oder richtiger Aere, des Chronologen Pagi (1689) unterscheidet sich von der Weltäre des Panodorus nur in dem Jahresanfange, indem Pagi diesen, der Gewohnheit des Occidents gemäß, auf den 1 Januar, und zwar auf den zunächst vorhergehenden verlegte, so daß das Jahr a des Panodorus mit demjenigen Jahre a — 5493 unserer Aere, in welchem es nach obiger Reduction anfängt, ganz zusammenfällt. Sonach ist

Jahr nach Chr. = Jahr der Weltäre Pagi's — 5493.

Jahrform und Einschaltung ist julianisch, daher jedes Jahr ein Schaltjahr, das durch 4 getheilt 1 zum Reste gibt. Die Aere gewährt bei chronologischen Rechnungen einige kleine Vortheile, wurde aber von niemand als von ihrem Urheber benützt.

IV. Seit dem Mittelalter brachte fast jeder Chronolog eine neue Weltäre zur Welt. So fanden Scaliger und Calvisius, daß das erste Jahr unserer christlichen Aere seit der Schöpfung das 3950ste, Petavius, daß es das 3984ste, und Frank, daß es das 4182ste sei. Sonach ist

Jahr nach Chr. = Jahr der Welt nach Scaliger — 3949
» » » = » » » » Petavius — 3983
» » » = » » » » Frank — 4181.

Usher hatte den vernünftigen Gedanken, das Jahr der Geburt Christi gerade das 4000ste zu nennen; allein er verdarb ihn wieder dadurch, daß er diesen Zeitpunkt an das Ende des 5. Jahres vor dem Anfange der christlichen Aere setzte, folglich in seiner Weltäre immer um 4004 Jahre mehr als in dieser zählte. Klüger wäre es gewesen, das Jahr unmittelbar vor dem Anfange der christlichen Aere als das 4000ste zu rechnen, weil man in dieser Weltäre um die runde Zahl von 4000 Jahren mehr als in der christlichen zählen würde; mag man dann immerhin die Geburt Christi, als welthistorische Begebenheit, nicht aber als schwankende, sicher nie auf eine allgemein befriedigende Weise zu bestimmende, chronologische Jahrsepoche, nach Usher um 4 Jahre früher in's Jahr 3996, oder nach Sanclemente um 6 Jahre früher in's Jahr 3994 stellen.

49.

Fortsetzung. Periodische Jahrzählungen der Christen.

Die christlichen Völker benützten ehedem nicht blos fortlaufende, sondern auch periodische Zählungen der Jahre, unter diesen hauptsächlich folgende:

I. Die Indictionen. Als um die Mitte des 4. Jahrhundertes nach Chr. die Benennung der Jahre nach den römischen Consuln schwankend zu werden anfing, kamen die Indictionen in Gebrauch. So heißen die einzelnen, mit dem 1 September beginnenden Jahre eines 15jährigen Zeitkreises, die man in stets wiederkehrender Ordnung zählte, und bei deren Gebrauch man, ohne Rücksicht auf die Anzahl der seit irgend einem Zeitpunkte abgelaufenen Jahrkreise, ganz einfach angab, daß etwas in der oder jener Indiction geschehen sei. Diese Bezeichnungsweise ist, wie v. Savigny befriedigend nachgewiesen hat, aus der späteren Steuerverfassung des römischen Reiches hervorgegangen. Die Indictionen waren, nebst der constantinoplischen Weltäre, mit der sie zugleich am 1 September anfingen, und bei den Zeitangaben gewöhnlich verbunden vorkommen, die gesetzliche Jahrrechnung im byzantinischen Kaiserthume, und wurden seit Constantin d. Gr. über das ganze römische Reich — mit Ausnahme Spaniens — verbreitet, und durch das ganze Mittelalter, in Italien, Frankreich und Deutschland — hier unter der Benennung Römer-Zinszahl — fast durchgängig zur Bezeichnung der Jahre verwendet. Aus fünfzehn Jahren ließ man den Indictionskreis bestehen, weil man im römischen Reiche die Grundsteuer nach einem Cataster bestimmte, welcher alle 15 Jahre erneuert oder berichtiget wurde.

Die Epoche der Indictionen setzt der Verfasser des Chronicon paschale, vermuthlich ein Antiochener, auf den 1 September 705 d. St. 49 vor Chr., die Epoche der Aere der syrischen Stadt Antiochia, weswegen man sie auch die antiochenischen Indictionen nennt. Zugleich erklärt er den 1 September 1065 d. St., 312 nach Chr., für den Anfang der, von dem ersten christlichen römischen Kaiser Constantin gebrauchten, constantinischen Indictionen. Da nun beide Anfänge um 1065 — 705 = 360 Jahre, also um 24 volle 15jährige Kykel, von einander abstehen, so schließt sich der constantinische Indictionskreis ganz an den antiochenischen an. Diese Indictionen, auch die griechischen und constantinoplischen genannt, sind die ursprünglichen und eigentlichen. Andere Indictionen, wie die kaiserlichen und päpstlichen, ließ man verschieden, oft sehr unordentlich anfangen, und kamen nicht in allgemeinen Gebrauch.

Die Indictionen allein dienen nur, um zwei demselben Indictionskreise angehörige Jahre von einander zu unterscheiden, nicht aber um die Jahre einer Aere völlig zu bestimmen. Man muß daher das Jahr einer Begebenheit, wenigstens im Groben kennen; wenn es dann die übrigen Zeitmerkmale, deren sich in der Regel mehrere genannt finden, schwankend lassen, so kann man es mittels der Indiction genau ermitteln.

Sucht man nun die Indiction $\dot{I}$, in welche der Anfang des Jahres a nach Chr. fällt, oder die man am 1 Januar des Jahres a nach Chr. zählt; so erwäge man, daß am 1 September 312 nach Chr. ein Indictionskreis anhob, folglich am 1 Januar 313 die Indiction 1 gezählt wurde. Dann findet man nach Vorbegr. XVIII. (82)

$$\dot{I} - 1 \equiv a - 313, \text{ mod } 15.$$

daher

$$(67) \qquad \dot{I} \equiv a + 3, \text{ mod } 15 = R\frac{a+3}{15}.$$

Im Jahre a nach Chr. läuft also während der ersten acht Monate die Indiction $\dot{I} = R\frac{a+3}{15}$ und vom 1 September an

die Indiction $\equiv \dot{I} + 1, \text{ mod } 15 = R\frac{a+4}{15}$.

Z. B. Im Jahre 1 nach Chr. war die Indiction $1 + 3 = 4$, und im Jahre 1842 ist die Indiction $R\frac{1842+3}{15} = R\frac{1845}{15} = 15$, folglich läuft in diesem ein Indictionskreis ab.

Beispiel. Kaiser Karl's des Dicken Bestätigung der Besitzungen und Rechte des Klosters Honau ist datirt: **Data X kal. Jun. anno ab incarnatione Domini DCCCLXXXIIII, indictione II** *). In der That ist für das Jahr nach Chr. $a = 884 \equiv -1$, mod 15 die Indiction $\dot{I} \equiv -1 + 3 = 2$. Die Urkunde ist daher am 23 Mai 884 nach Chr. ausgestellt.

Auf gleiche Weise findet man nach der benützten Angabe und nach den Reductionsgleichungen in §. 47 und 48 für den Anfang (1 Januar) folgender Jahre die Indictionen:

mod 15
(68) Indiction ≡ Jahr d. St.
≡ Jahr d. jul. Kalenderverbess. + 3
≡ Jahr d. röm. Kaiser + 6
≡ Jahr d. span. Aere — 5
≡ Jahr d. Weltäre Pagi's;

und für die mit den Indictionen zugleich anfangenden Jahre die Indictionen:

mod 15
(69) Indiction ≡ Jahr d. byzantin. Weltäre
≡ Jahr d. Weltäre des Panodorus + 1.

Anmerkung. Zur leichteren Berechnung eines Restes nach dem Modul 15, beachte man, daß allgemein jede Zahl $d \equiv r\frac{d}{30}$, mod 30 ist, wenn r

*) Schönemann Codex für die praktische Diplomatik, Göttingen, 1800, 1. Th. S. 12.

jeden beliebigen Rest charakterisirt, folglich daß vermöge Vorbegr. III, 13, $d \equiv r\frac{d}{30}$, mod 15 und vermöge III, 2,

$$r\frac{d}{15} \equiv r\frac{d}{30}, \text{ mod } 15, \text{ also entweder } = r\frac{d}{30} \text{ oder } = r\frac{d}{30} - 15 \text{ ist.}$$

Um daher einen Rest einer Zahl nach dem Theiler oder Modul 15 zu finden, theilt man diese Zahl zuerst durch 30 und ihren Rest durch 15; dann ist dieser zweite Rest bereits der geforderte. So z. B. ist $884 \equiv 14$, mod $30 \equiv 14$, mod $15 \equiv -1$; $1845 \equiv 15$, mod $30 \equiv 15$, mod 15; $1017 \equiv 27$, mod $30 \equiv 12$, mod 15.

II. Der Sonnencirkel. Wenn nach der Weise des Julius Cäsar alle 4 Jahre ein Tag eingeschaltet wird, so müssen, weil die Woche 7 Tage hat, und keine der beiden Jahreslängen von 365 und 366 Tagen durch 7 theilbar ist, nach 7 vierjährigen Schaltkreisen oder 28 Jahren, die Wochentage immer wieder auf dieselben Monatstage zurück kehren. Ein solcher 28jähriger Kreis heißt in der christlichen Zeitrechnung ein Sonnencirkel (**cyclus solis v. solaris**); meistens aber begreift man unter dieser Benennung die Nummer jedes einzelnen oder des jedesmaligen Jahres in einem solchen Jahrkreise. Im Mittelalter war es sehr üblich, bei der Angabe des Jahres einer Begebenheit, nebst der Indiction auch den Sonnencirkel anzuführen; was erst im achtzehnten Jahrhunderte allmälig sich verlor, weil die Wiederkehr der Wochentage auf einerlei Monatstage im neuen oder gregorianischen Kalender, durch die säculären Ausmerzungen der Schalttage, Unterbrechungen erleidet.

Solche Jahrkreise kann man natürlich bei jedwedem Jahre einer jeden Aere anfangen lassen. Die christlichen Chronologen ließen ihren Sonnencirkel, versteht sich im alten oder julianischen Kalender, mit einem Schaltjahre anfangen, in welchem der erste Sonntag so spät als möglich, also am 7 Januar eintritt, und welches sonach mit einem Montage anhebt. Als solche Jahre zeigten sich ihnen in der christlichen Aere diejenigen, die durch 28 getheilt 20 zum Reste geben. Bezeichnet man daher mit S den Sonnencirkel des Jahres a nach Chr., so findet man aus Vorbegr. XVIII (84) und (85), wenn man $p = S$, $P = 1$, $n = a$, $N \equiv 20$, mod 28 setzt,

$$(70) \qquad S \equiv a + 9, \text{ mod } 28 = R\frac{a+9}{28}.$$

Z. B. das Jahr 1 nach Chr. hatte den Sonnencirkel $1 + 9 = 10$, und das Jahr 1842 hat den Sonnencirkel $R\frac{1842+9}{28} = R\frac{1851}{28} = 3$.

Für die übrigen Aeren findet man nach ihren Reductionsgleichungen auf die christliche Aere (§. 47 und 48).

$$\begin{aligned}(71)\quad \text{Julianischer Sonnencirkel} &\overset{\text{mod } 28}{\equiv} \text{Jahr d. St. Rom} + 12\\ &\equiv \text{Jahr d. jul. Kal. Verbess.} - 8\\ &\equiv \text{Jahr d. röm. Kaiser} + 10\\ &\equiv \text{Jahr d. span. Aere} - 1\\ &\equiv \text{Jahr d. Weltäre des Pagi} + 4.\end{aligned}$$

Anmerkung. Die Reste der Zahlen nach dem Theiler oder Modul 28 lassen sich leicht, nach Vorbegr. XIII, (40) berechnen, indem

$$\mathfrak{r}\frac{d}{28} = 4\,\mathfrak{r}\frac{\mathfrak{q}\frac{d}{4}}{7} + \mathfrak{r}\frac{d}{4} = 7\,\mathfrak{r}\frac{\mathfrak{q}\frac{d}{7}}{4} + \mathfrak{r}\frac{d}{7}$$

ist. Oder, weil $d = 30\,\mathfrak{q}\frac{d}{30} + \mathfrak{r}\frac{d}{30}$ ist, hat man $d \equiv 2\,\mathfrak{q}\frac{d}{30} + \mathfrak{r}\frac{d}{30}$, mod 28.

Wendet man die leztere Zurückführung der Zahl d auf eine kleinere nach dem Modul 28 congruente Zahl $2\,\mathfrak{q}\frac{d}{30} + \mathfrak{r}\frac{d}{30}$ wiederholt an, so bestimmt man mit Leichtigkeit den geforderten Rest. So ist z. B. $1851 = 30.\ 61 + 21 \equiv 61 + 61 + 21$, mod $28 \equiv 143 \equiv 30.\ 4 + 23 \equiv 2.\ 4 + 23 \equiv 31 \equiv 3$, mod 28.

III. Die Mondcirkel und die goldenen Zahlen. Vergleicht man die mittlere Dauer des tropischen Sonnenjahres mit jener des synodischen Mondmonates, so findet man (§. 23, I), daß 19 tropische Jahre nahe 235 synodische Monate enthalten, folglich daß nach 19 Sonnenjahren die Mondphasen nahe auf dieselben Jahrs- und Monatstage treffen. Diesen 19jährigen Zeitkreis nennen die Chronologen den Meton'schen Mondcirkel (cyclus lunae), aber auch das jedesmalige Jahr desselben nennen sie den Mondcirkel oder gewöhnlicher die güldene Zahl (numerus aureus). Ehevor, hauptsächlich im Mittelalter, pflegte man dem Jahre des Datums auch die güldene Zahl beizufügen. In der christlichen Aere erneuern sich die 19jährigen Mondcirkel immer unmittelbar nach den durch 19 theilbaren Jahren.

Bezeichnet man demnach mit N die goldene Zahl des Jahres a nach Chr., so erhält man, nach Vorbegr. XVIII (84) und (85), wenn man p in N, P in 1, n in a und N in o verwandelt,

$$(72)\qquad N \equiv a + 1,\ \text{mod } 19 = \Re\frac{a+1}{19} = 1 + \mathfrak{r}\frac{a}{19}.$$

Z. B. das Jahr 1 nach Chr. hatte die goldene Zahl $1 + 1 = 2$, und das Jahr 1842 hat die goldene Zahl $\Re\frac{1843}{19} = 19$. Für die anderen Aeren findet man

$$\text{mod } 19$$

$$\text{(73)}\quad \text{Goldene Zahl} \equiv \text{Jahr d. St.} - 8$$
$$\equiv \text{Julianisches Jahr} - 6$$
$$\equiv \text{Jahr d. röm. Kaiser} - 7$$
$$\equiv \text{Jahr d. span. Aere} + 1$$
$$\equiv \text{Jahr d. Pagi'schen Weltäre} - 1.$$

Die christlichen Chronologen stellen mit dem beschriebenen Mondcirkel der Christen sehr oft den der Juden zusammen, welcher um 3 Jahre später als der Mondcirkel der Christen anfängt, und unten in der Zeitrechnung der Juden besprochen werden wird. Dionysius Exiguus und Beda unterscheiden beide Zeitkreise dadurch, daß sie den eben abgehandelten christlichen cyclus decemnovalis, den jüdischen cyclus lunaris nennen, als wenn nicht beide 19jährig und nicht beide Mondkreise wären. Diesem gemäß ist der

$$\text{(74)}\quad \text{Cyclus lunaris} \equiv \text{cyclus decemnovalis} - 3, \text{ mod } 19$$
$$\equiv N - 3 \equiv a - 2, \text{ mod } 19.$$

Uebrigens fängt dieser Cyclus lunaris in den Rechnungen der Christen nicht mit dem Jahre der Juden im Herbste, sondern mit dem christlichen Jahre am nächst folgenden 1 Januar an.

Anmerkung. Das Berechnen des Restes einer Zahl d nach dem Theiler 19 erleichtert man sich namhaft, wenn man bedenkt, daß

$$d = 20\, q\frac{d}{20} + r\frac{d}{20},$$

also

$$d \equiv q\frac{d}{20} + r\frac{d}{20}, \text{ mod } 19$$

ist. So hat man z. B. $1843 = 20.\ 92 + 3 \equiv 92 + 3 \equiv 95, \text{ mod } 19 \equiv 20.\ 4 + 15 \equiv 4 + 15 \equiv 19.$

50.

Fortsetzung.

Berechnung der Jahre aus den Indictionen, Sonnencirkeln und goldenen Zahlen. Aus der Indiction, dem Sonnencirkel und der goldenen Zahl eines Jahres läßt sich jedesmal leicht der Rest bestimmen, welchen dieses Jahr, durch 15, 28 und 19 getheilt, gibt. Kennt man nun wenigstens zwei solche Reste, so kann man daraus die Jahre, denen sie zukommen, nach Vorbegr. XX berechnen, und weil zwei benachbarte solche Jahre immer um das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Theiler von einander abstehen, und gewöhnlich schon anderweitig das geforderte Jahr nicht mehr um zwei solche Vielfache zweifelhaft ist; so vermag man das Jahr selbst meistens völlig genau zu bestimmen. Sind demnach

1) der Sonnencirkel und die goldene Zahl eines Jahres gegeben, und findet man daraus, daß es durch 28 und 19 getheilt die

Reste r und r′ läßt, so erhält man das entsprechende Jahr x, vermöge Vorbegr. XX (113), aus

$$x \equiv 19\,\mathfrak{r}\frac{3r}{28} + 28\,\mathfrak{r}\frac{-2r'}{19} \equiv 57r - 56r', \text{ mod } 532.$$

Soll nun insbesondere ein Jahr a der christlichen Aere gesucht werden, dessen Sonnencirkel S und goldene Zahl N ist, so hat man, nach Gl. (70) und (72)

$$S \equiv a + 9, \text{ mod } 28, \quad N \equiv a + 1, \text{ mod } 19,$$

daher vermöge Vorbegr. XI, 1 die Reste

$$r \equiv a \equiv S - 9, \text{ mod } 28 = \mathfrak{r}\frac{S-9}{28}$$

$$r' \equiv a \equiv N - 1, \text{ mod } 19 = \mathfrak{r}\frac{N-1}{19};$$

folglich ist das geforderte Jahr nach Chr.

$$a \equiv 57\,(S - 9) - 56\,(N - 1), \text{ mod } 532$$

oder

$$(75) \qquad a \equiv 57S - 56N + 75, \text{ mod } 532$$

oder endlich

$$(76) \qquad a \equiv 19\,\mathfrak{r}\frac{3S}{28} - 28\,\mathfrak{r}\frac{2N}{19} + 75, \text{ mod } 532.$$

Beispiel. Verlangt man die Jahre der christlichen Aere, in denen der Sonnen- und Mondcirkel zugleich sich erneuern, so hat man $S = N = 1$, daher $a \equiv 76$, mod 532, also erfolgt dies in den Jahren nach Chr. 76, 608, 1140, 1672, 2204, u. s. f.

2. Ist die goldene Zahl und die Indiction eines Jahres gegeben, und findet man, daß selbes durch 19 und 15 getheilt zum Reste r′ und r″ gibt, so erhält man das zugehörige Jahr x, vermöge Vorbegr. XX, (112), wo $m = 19$, $m' = 15$, also $\xi = -5$, $\xi' = 4$ ist, aus

$$x \equiv 15\,\mathfrak{r}\frac{-5r'}{19} + 19\,\mathfrak{r}\frac{4r''}{15}, \text{ mod } 285 \equiv -75r' + 76r'', \text{ mod } 285.$$

Hat man insbesondere ein Jahr a der christlichen Aere zu berechnen, dessen goldene Zahl N und Indiction $\dot{I}$ ist, so hat man, nach Gl. (72) u. (67)

$$N \equiv a + 1, \text{ mod } 19, \quad \dot{I} \equiv a + 3, \text{ mod } 15,$$

daher, vermöge Vorbegr. XI, 1, die Reste

$$r' \equiv a \equiv N - 1, \text{ mod } 19; \quad r'' \equiv a \equiv \dot{I} - 3, \text{ mod } 15.$$

Mithin ist das gesuchte Jahr

$$a \equiv -75\,(N - 1) + 76\,(\dot{I} - 3), \text{ mod } 285$$

oder

$$(77) \qquad a \equiv -75N + 76\dot{I} + 132, \text{ mod } 285$$

oder endlich

$$(78) \qquad a \equiv 19\,\mathfrak{r}\frac{4\dot{I}}{15} - 15\,\mathfrak{r}\frac{5N}{19} + 132, \text{ mod } 285.$$

Beispiel. In einer Urkunde bei Mabillon *) ist die Zeit also bestimmt: **Acta sunt haec anno ab Incarnatione Domini MCIX, indictione II, epacta XVII, concurrentes IV, cyclus lunaris V, cyclus decennovalis VIII, regulares paschae IV, terminus paschalis XIII (XIIII) Cal. Maii, dies paschalis VII. Cal. Maii, luna ipsius XXI.** Suchen wir, mit Uebergehung aller weiteren Charaktere des angegebenen Jahres, welche wir erst bei späterer Gelegenheit vornehmen wollen, aus der Indiction $2 = \mathrm{I}$ und aus der goldenen Zahl $8 = \mathrm{N}$, die, wie es sein soll, um 3 größer als der cyclus lunaris ist; so finden wir die Jahre

$$\begin{aligned} a &\equiv 19\,\mathfrak{r}\frac{4.2}{15} - 15\,\mathfrak{r}\frac{5.8}{19} + 132, \text{ mod } 285 \\ &\equiv 152 - 30 + 132 \equiv 254, \text{ mod } 285. \\ &= 254,\ 539,\ 824,\ 1109,\ 1394,\ \ldots \end{aligned}$$

Sobald uns demnach nur bekannt wäre, daß das Jahr der Urkunde zwischen dem 9. und 13. Jahrhunderte liegt, so träfen wir sicher auf das in ihr ausdrücklich angeführte Jahr 1109.

3. Kennt man die Indiction und den Sonnencirkel eines Jahres und darnach die Reste r'' und r, welche die Jahrzahl durch 15 und 28 getheilt läßt, so findet man das entsprechende Jahr x, vermöge XX (112), wo $m = 28$, $m' = 15$, also $\xi = -13$, $\xi' = 7$ ist, aus

$$\begin{aligned} x &\equiv 15\,\mathfrak{r}\frac{-13r}{28} + 28\,\mathfrak{r}\frac{7r''}{15}, \text{ mod } 420 \\ &\equiv 196\,r'' - 195\,r, \text{ mod } 420. \end{aligned}$$

Soll insbesondere ein Jahr a der christlichen Aere berechnet werden, dessen Indiction $\dot{\mathrm{I}}$ und Sonnencirkel S ist, so findet man, wie früher, die Reste

$$r'' \equiv a \equiv \dot{\mathrm{I}} - 3, \text{ mod } 15, \quad r \equiv a \equiv \mathrm{S} - 9, \text{ mod } 28;$$

mithin das gesuchte Jahr

$$a \equiv 196\,(\dot{\mathrm{I}} - 3) - 195\,(\mathrm{S} - 9), \text{ mod } 420$$

oder

$$(79) \qquad a \equiv 196\,\dot{\mathrm{I}} - 195\,\mathrm{S} - 93, \text{ mod } 420$$

oder endlich

$$(80) \qquad a \equiv 28\,\mathfrak{r}\frac{7\dot{\mathrm{I}}}{15} - 15\,\mathfrak{r}\frac{13\mathrm{S}}{28} - 93, \text{ mod } 420.$$

Beispiel. In einer Urkunde bei Dom Morice **) heißt es: **Haec confirmatio facta est anno ab Incarnatione MCLII mense Septembri in exaltatione sanctae Crucis, luna XI, feria I, cyclus solaris XIII, epacta XXIII, concurrentes II, claves terminorum XIV,**

---

*) De re diplomatica l. VI. Nro. 171.

**) Mémoires pour servir de preuves à l'Histoire de Brétagne, tom. I, col. 612.

indictiones XV. Berechnet man aus der Indiction 15 $= \acute{I}$ und dem Sonnencirkel 13 $= S$ das Jahr, so findet man

$$a \equiv -15\,\mathfrak{r}\frac{169}{28} - 93, \text{ mod } 420 \equiv -108 \equiv 312, \text{ also}$$
$$= 312,\ 732,\ 1152,\ 1572,\ \ldots$$

Weiß man nun noch, daß das Jahr der Urkunde zwischen 750 und 1550 liegt, so findet man in der That das in ihr angesagte Jahr 1152.

4. Sind endlich alle 3 Zeitmerkmale, der **Sonnencirkel**, die **goldene Zahl** und die **Indiction** eines Jahres **gegeben**, und zeigt sich, daß es durch 28, 19 und 15 getheilt zum Reste r, r' und r'' gibt, so findet man das Jahr x, denen jene Charaktere zukommen, vermöge XX (109) der Vorbegriffe, aus

$$\text{mod } 7980$$
$$x \equiv 285\,\mathfrak{r}\frac{-11r}{28} + 420\,\mathfrak{r}\frac{-9r'}{19} + 532\,\mathfrak{r}\frac{-2r''}{15}$$
$$\equiv -(3135r + 3780r' + 1064r'')$$
$$\equiv 4845r + 4200r' + 6916r''.$$

Ist insbesondere das Jahr a der christlichen Aere zu berechnen, dessen Sonnencirkel S, goldene Zahl N und Indiction $\dot{I}$ ist, so findet man aus (70), (72) und (67) die Reste

$$r \equiv S - 9, \text{ mod } 28; \quad r' \equiv N - 1, \text{ mod } 19; \quad r'' \equiv \dot{I} - 3, \text{ mod } 15,$$

daher das gesuchte Jahr

$$\text{mod } 7980$$
$$(81) \qquad a \equiv 285\,\mathfrak{r}\frac{-11S}{28} + 420\,\mathfrak{r}\frac{-9N}{19} + 532\,\mathfrak{r}\frac{-2\dot{I}}{15} + 3267$$
$$\equiv -(3135S + 3780N + 1064\dot{I}) + 3267.$$

Da die ganze uns bekannte Zeit weder vor noch nach Christi Geburt auf 7980 Jahre sich erstreckt, so kann man hier den möglich kleinsten positiven oder negativen Rest für das Jahr a nehmen.

Beispiel. Sucht man jene Jahre der christlichen Aere, in denen die drei Zeitkreise, der Sonnen-, Mond- und Indictions-Kyklus zugleich anfangen, folglich $S = N = \acute{I} = 1$ wird, so findet man

$$a \equiv -(3135 + 3780 + 1064) + 3267 \equiv 3268, \equiv -4712, \text{ mod } 7980.$$

Diese drei Zeitkreise hoben demnach gleichzeitig an im Jahre 4713 vor Chr. und werden sich im Jahre 3268 nach Chr. wieder erneuern.

51.

Fortsetzung.

IV. **Die Osterperiode.** Nach 28 der 19jährigen Mondkreise oder nach 19 der 28jährigen Sonnencirkel, also nach 532 Jahren, müssen in dem julianischen Kalender dieselben Mondphasen nicht blos auf die nemlichen

Monatstage, sondern auch auf einerlei Wochentage fallen; daher muß auch das Datum des christlichen Osterfestes, welches, wie weiter unten gezeigt werden wird, an einem Sonntage nach einem Vollmonde im Frühling zu feiern ist, sich wiederholen. Darum nennt man diese 532jährige Periode, welche die 28 Jahre des Sonnencirkels mit den 19 Jahren des Mondcirkels combinirt, oder bestimmter ausgedrückt, variirt, die **Osterperiode**, den **Osterkreis** oder **annus magnus o. cyclus paschalis**.

Der Anfang dieser Periode ist beliebig und bei den Chronographen verschieden.

a. Der ägyptische Mönch **Anianus** (um 400 nach Chr.) zählt in seiner mit Adam anhebenden Chronographie sowohl fortlaufend nach Jahren der Welt, als auch periodisch nach dem 532jährigen Osterkreise, so daß der Anfang seines ersten Osterkreises mit seinem ersten Weltjahre zusammenfällt. Mit der dionysischen Aere nach Chr. hängt seine Jahrrechnung dergestalt zusammen, daß sein 5816. Weltjahr oder das 496. Jahr der 11. Periode, in welches er die Feier des zwanzigsten Regierungsjahres des Kaisers Constantin d. Gr. setzt, mit dem Jahre 324 nach Chr. übereinkommt *). Somit findet man, nach Vorbegr. XVII, 3, Gleich. (76), indem man $\nu = 324$, $\pi = 5816$ setzt,

Jahr nach Chr. = Weltjahr des Anianus — 5492,

woraus ersichtlich wird, daß diese Weltäre mit der des **Panodorus** (§. 48, II) identisch ist.

Weil ferner

Jahr d. Osterperiode des Anianus ≡ Weltjahr des Anianus, mod 532,

ist, oder weil in Vorbegr. XVIII (84) das Jahr nach Chr. 324 = N das 496 = P^te^ Jahr einer **anianischen Osterperiode** ist; so hat man

mod 532

Jahr nach Chr. ≡ Jahr der anian. Osterperiode + 360,

Jahr der anian. Osterperiode ≡ Jahr nach Chr. + 172.

Diese Osterperiode erneuerte sich also in den Jahren nach Chr. 361, 893 u. s. w.

b. **Victorius** aus Aquitanien stellte im J. 457 n. Chr. einen **Canon paschalis** zusammen, den er gleichfalls mit einer Weltäre in Verbindung bringt. In dieser zählt er in obigem Jahre 457 nach Chr. das Jahr 5658, folglich ist, nach Vorbegr. XVII, 3, Gl. (76), indem man $\nu = 457$, $\pi = 5658$ setzt,

Jahr nach Chr. = Weltjahr des Victorius — 5201.

Ferner macht er das Jahr 5229 seiner Weltäre, oder das Jahr 5229 — 5201 = 28 nach Chr., in das er Christi Leiden setzt, zum ersten seiner 532jährigen

*) Denn nur in diesem Jahre traf, wie Anianus angibt, nach den Alexandrinern der Ostervollmond auf den 25. und der Ostersonntag auf den 29 März.

Osterperiode, daher ist nach Vorbegr. XVIII (84), indem man $P = 1$ und $N = 28$ sezt,

$$\text{mod } 532$$

$$\text{Jahr d. victorianischen Osterper.} \equiv \text{Jahr nach Chr.} - 27$$

$$\text{Jahr nach Chr.} \equiv \text{Jahr d. victor. Osterper.} + 27.$$

Diese Osterperiode erneuerte sich demnach in den Jahren nach Chr. 28, 560, 1092, 1624 u. s. f., welche zugleich Schaltjahre sind; daher müssen jene Jahre der victorianischen Osterperiode Schaltjahre sein, die durch 4 getheilt 1 zum Reste lassen. Z. B. In der Grabschrift des heiligen Johann von Réome heißt es, er sei gestorben im J. 512 der victorianischen Osterperiode, also im J. $512 + 27 = 539$ nach Chr.

c. Dionysius Exiguus begann seine Ostertafel mit dem Jahre 532 nach Chr.; daher findet man für die 532jährige dionysische Osterperiode vermöge Vorbegr. XVIII (84), indem man $P = 1$ und $N = 532$ sezt

$$\text{mod } 532$$

$$\text{Jahr d. dionysischen Osterperiode} \equiv \text{Jahr nach Chr.} + 1$$

$$\text{Jahr nach Chr.} \equiv \text{Jahr d. dionysischen Osterp.} - 1.$$

Man sieht darum die im Jahre 0 nach Chr. oder 1 vor Chr. anfangende dionysische Osterperiode als die erste, und die im Jahre 532 nach Chr. beginnende als die zweite an; daher die dritte im Jahre 1064, und die vierte jezt noch laufende im Jahre 1596 anfing. Wenn sich demnach in dem Archive der Abtei Clugny ein Instrument mit folgender Zeitbestimmung *) befindet: **Actum publice Cabilonis civitate anno ab Incarnatione Domini MLXIII, indictione I, epacta XVIII, concurrente II . . . secundo magno anno ab Incarnatione Domini nostri Jesu Christi, qui constat DXXXII annis;** so ist die Urkunde wirklich im Schlußjahre 1063 der zweiten dionysischen Osterperiode ausgestellt worden.

V. Die julianische Periode. Zu den Vergleichungen der verschiedenen Zeit- und Jahrrechnungen, und zur Aneinanderreihung der Begebenheiten wie auf einer Leiter nach ihren Abständen von einander, hauptsächlich aber zur schnelleren Erkennung der jedem Jahre zukommenden mittelalterlichen Zeitmerkmale, als der Indiction, des Sonnencirkels, der güldenen Zahl u. a., variirte der berühmte Chronolog Jos. Scaliger, in seinem im Jahre 1583 herausgegebenen Werke de emendatione temporum die drei wichtigsten chronologischen Zeitkreise, den 15jährigen Indictionskreis, den 28jährigen Sonnencirkel und den 19jährigen Mondcirkel mit einander zu einer Periode, welche sonach aus $15 . 28 . 19 = 7980$ Jahren besteht, und die er mit jedem dieser drei Zeitkreise zugleich anfangen ließ, daher sie sich nur erst dann wieder

*) L'art de vérifier les dates. Tom. I, p. 61.

erneuert, wenn alle drei Kreise zugleich abgelaufen sind. Er nannte sie die julianische, weil sie nach julianischen Jahren zählt.

Es hat daher jedes Jahr der julianischen Periode zur Indiction, zum Sonnencirkel und zur goldenen Zahl den Rest, den es durch 15, 28, 19 getheilt übrig läßt. Bezeichnet nemlich S den Sonnencirkel, N die goldene Zahl und $\acute{I}$ die Indiction des Jahres A der julianischen Periode, so hat man

$$S = R\frac{A}{28}, \quad N = R\frac{A}{19}, \quad \acute{I} = R\frac{A}{15}.$$

Z. B. Das Jahr 6000 der julianischen Periode hat den Sonnencirkel $S \equiv 6000$, mod $28 \equiv 8$, die goldene Zahl $N \equiv 6000$, mod $19 \equiv 15$ und die Indiction $\acute{I} \equiv 6000$, mod $15 = 15$.

Umgekehrt wird auch jedes Jahr der julianischen Periode durch die genannten drei kyklischen Zahlen bestimmt. Dazu bedarf es nach unseren Vorbereitungen nichts weiter, als daß man in dem Ausdrucke von x in §. 50, 4. die Reste $r = S$, $r' = N$, $r'' = \acute{I}$, und das Jahr $x = A$ sezt, daher findet man

$$\text{mod } 7980$$

$$(82) \quad \begin{aligned} A &\equiv 285 r\frac{-11S}{28} + 420 r\frac{-9N}{19} + 532 r\frac{-2\acute{I}}{15} \\ &\equiv -(3135 S + 3780 N + 1064 \acute{I}) \\ &\equiv \quad 4845 S + 4200 N + 6916 \acute{I}. \end{aligned}$$

Z. B. Man suche jenes Jahr der julianischen Periode, dessen Sonnencirkel 6, goldene Zahl 10 und Indiction 1 ist. Hier hat man $S = 6$, $N = 10$, $\acute{I} = 1$, daher

$$\begin{aligned} A &\equiv 285 r\frac{-66}{28} + 420 r\frac{-90}{19} + 532 r\frac{-2}{15}, \text{ mod } 7980 \\ &\equiv -285.10 + 420.5 - 1064 \equiv 2100 - 3914 \\ &\equiv 6166. \end{aligned}$$

Dies Jahr ist daher 6166, welches durch die Eroberung Constantinopels unter Mohammed II. und den damit vereinten Sturz des morgenländischen römischen Reiches denkwürdig geworden ist.

Um den Zusammenhang der julianischen Periode mit einer bestimmten fortlaufenden Aere, am natürlichsten mit der christlichen, zu erkennen, bemerke man, daß jede zwei einander entsprechenden oder identischen Jahre einerlei Sonnencirkel, goldene Zahl und Indiction besitzen. Aus §. 50, (81) und aus (82) folgt demnach durch Subtraction, wofern man annimmt, daß die julianische Periode schon zu Anfang der christlichen Aere im Zuge war,

$$A - a \equiv 4713, \text{ mod } 7980$$

also das Jahr der jul. Per. $A \equiv a + 4713$, mod 7980

christl. Jahr $a \equiv A - 4713$, mod 7980.

10 *

So lange noch die erste julianische Periode läuft, ist

$$(83) \qquad A = a + 4713$$
$$a = A - 4713.$$

Für $a = 1$ ist $A = 4714$ und

für $A = 1$ ist $a = -4712$.

Die julianische Periode hob demnach im Jahre nach Chr. — 4712 oder vor Chr. 4713 an, daher das 1. Jahr nach Chr. das 4714. Jahr dieser Periode ist. Dasselbe weisen auch die Gleich. (109) und (110) in den Vorbegriffen und das Beispiel in §. 50, 4 aus.

Die Epoche der julianischen Periode ist demnach der 1 Januar 4713 vor Chr. oder vermöge §. 48, I. der 1 Januar des Jahres — 4712 + 5508 = 796 der byzantinischen Weltäre; folglich beginnt sie vermöge §. 48, Gl. (66), später als die byzantinische Weltäre um 290495 Tage, nach einem Sonntage oder 1. Wochentage. Ferner ist in ihr jedes Jahr ein Schaltjahr, welches durch 4 getheilt 1 zum Reste gibt.

Der Vortheil der julianischen Periode in der Zeitkunde ist jedoch keineswegs so hoch anzuschlagen, als ihn die Chronologen, freilich mehr durch Worte als durch Anwendung, preisen. Denn einmal übersteigt das mittlere julianische Jahr von 365 T. 6 St. das mittlere tropische von 365 T. 5 St. 48′ 48″ um 11′ 12″, folglich zählt eine 7980jährige julianische Periode bereits 62 Tage 1 St. 36′ zu viel. Dann enthalten 19 vierjährige julianische Schaltkreise von 1461 Tagen oder 76 julianische Jahre in Allem 27759 Tage; dagegen 4 neunzehnjährige Mondkreise von 235 synodischen Monaten zu 29 T. 12 St. 44′ 3″·4015 im Ganzen nur 27758 T. 18 St. 13′, daher um 5 St. 47′ weniger; folglich ist eine julianische Periode von 105 solchen 76jährigen Zeitkreisen um 25 Tage 7 St. 15′ länger als 420 metonische Mondkreise. Der 15jährige Indictionskreis endlich ist völlig conventionell. Somit entbehrt die julianische Periode jeder astronomischen Bedeutsamkeit. Daß man in ihr etwas leichter als in anderen Jahrrechnungen den Sonnencirkel, die goldene Zahl und Indiction berechnet, kann gar nicht in Betracht kommen; weil man dabei nur erspart, die Jahrzahl vor ihrer Theilung durch 28, 19 und 15 um eine kleine Zahl zu vermehren oder zu vermindern. Als blose Aere endlich kann sie bei der Feststellung der Zeitpunkte der geschichtlichen Begebenheiten auch weder mehr noch Besseres leisten, als die längst vor ihr bestandene und wirklich selbst jezt noch gebrauchte byzantinische Weltäre, von welcher Gibbon mit Recht bedauert, daß sie nicht in allgemeinen Gebrauch gekommen ist.

Ausführliche Untersuchung der christlichen Aere.

52.

Arithmetische Bestimmung des einem Monatstage zukommenden Jahrstages.

Sei der t^{te} Tag des m^{ten} Monates in der julianischen Jahrform angegeben, und der ihm entsprechende d^{te} Tag des Jahres zu suchen.

Hätten alle Monate 31 Tage, so würden bis zum Anfange des m^{ten} Monates $m - 1$ Mal 31 Tage, also $31\,(m - 1)$ Tage verfließen. Allein in der julianischen Anordnung des Jahres wird die Länge der 5 Monate, Februar, April, Juni, September und November, nemlich, da das Jahr mit dem Januar anfängt, die Länge des 2ten, 4ten, 6ten, 9ten und 11ten Monates um einen Tag verkürzt. Die Anzahl dieser bis zum Beginn des m^{ten} Monates weggelassenen Tage ist, vermöge Vorbegr. XXII, Gleich. (189), allgemein $= q\frac{\varepsilon m + \delta}{\varpi}$, und darin $\varpi = 12$, $\varepsilon = 5$, weil von 12 Monaten 5 verkürzt werden. Die Nummern dieser ausnahmsweisen Monate sind, vergl. (172), $\xi = 2, 4, 6, 9, 11$; daher ist, für den hier vorkommenden Modul $\varpi = 12$, ihre Summe

$$\Sigma\xi = 2 + 4 + 6 + 9 + 11 \equiv 2 + 4 + 6 - 3 - 1 \equiv -4;$$

ferner $\Sigma(\xi^2) \equiv 4 + 4 + 0 + 9 + 1 \equiv 6.$

Die Congruenz (185) übergeht also in

$$25\,(30 - 16) \equiv 25 . 2 \equiv \frac{5.5.6.4}{12} \equiv 25 . 2,$$

und besteht demnach wirklich. Daraus findet man, nach (177) und (180) $\delta \equiv -3 + 4 \equiv 1$. Um sich von der Richtigkeit dieses Werthes zu überzeugen, bemerke man, daß die Congruenz (164) in $5\chi \equiv 1$, mod 12 sich verwandelt, also $\chi = 5$ gibt; somit ist vermöge (171) der allgemeine Ausdruck der exemtilen Monatsnummern $x \equiv -5\,(2 + z) \equiv 2 - 5z$, nemlich für $z = 0, 1, 2, 3, 4$ sind sie $x = 2, 9, 4, 11, 6$. Da dies in der That die Nummern der 30tägigen Monate sind, so ist wirklich $\delta = 1$.

Bis zum m^{ten} Monate werden demnach $q\frac{5m+1}{12}$ der 31. Tage ausgelassen.

Allein der Monat Februar verliert von den ihm vorläufig zugewiesenen 30 Tagen, da er ihrer blos $28 + i$ enthält, noch weitere $2 - i$ Tage, wenn i die Schalttage des Jahres andeutet. Dieser Abzug tritt nur bei diesem 2. Monate ein, daher vermöge (202) bis zum m^{ten} Monate $q\frac{m+9}{12}$ Mal, weil hier $\varpi = 12$, $\xi = 2$ ist.

Somit vergehen bis zum m^{ten} Monate

$$31\,(m - 1) - q\frac{5m + 1}{12} - (2 - i)\,q\frac{m + 9}{12} \text{ Tage,}$$

und daher ist der t^{te} Tag des m^{ten} Monates im Jahre selbst der Tag

$$(84) \qquad d = 31(m-1) - \mathfrak{q}\frac{5m+1}{12} - (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12} + t.$$

Setzt man hierin, vermöge (59) der Vorbegr.

$$m - 1 - \mathfrak{q}\frac{5m+1}{12} = \mathfrak{q}\frac{7m-2}{12},$$

wodurch die Anzahl der dem m^{ten} Monate vorangehenden 31tägigen Monate ausgedrückt wird, so findet man

$$(85) \qquad d = 30(m-1) + \mathfrak{q}\frac{7m-2}{12} - (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12} + t.$$

Z. B. Für den 23 Juli ist $m = 7$, $t = 23$, daher

$$d = 31.6 - \mathfrak{q}\tfrac{36}{12} - (2-i) + 23 = 186 - 3 - 2 + i + 23 = 204 + i$$

oder $d = 30.6 + \mathfrak{q}\tfrac{47}{12} - 2 + i + 23 = 180 + 3 - 2 + i + 23 = 204 + i;$

folglich ist der 23 Juli der $204 + i^{te}$ Tag im Jahre, oder 23 Juli $= 204 + i$.

53.

Allgemeiner Ausdruck der Länge jedes Monates.

Bezeichnet μ die Länge, oder die Anzahl der Tage des m^{ten} Monates, so ist diese die Zunahme Δd der Nummer des Jahrstages, wenn die Monatsnummer m um 1 wächst und die Nummer t des Monatstages dieselbe bleibt, oder für $\Delta m = 1$ und $\Delta t = 0$. Nimmt man daher von den Ausdrücken des Jahrstages d die Differenzen, und beachtet, daß, vermöge Vorbegr. (115), (116) und (199)

$$\Delta\mathfrak{q}\frac{5m+1}{12} = \mathfrak{q}\frac{5 - \psi + \mathfrak{r}\frac{5m+1}{12}}{12 - \psi}, \quad \psi = 0, 1, \ldots 5,$$

$$\Delta\mathfrak{q}\frac{7m-2}{12} = \mathfrak{q}\frac{7 - \varphi + \mathfrak{r}\frac{7m-2}{12}}{12 - \varphi}, \quad \varphi = 0, 1, \ldots 5,$$

$$\Delta\mathfrak{q}\frac{m+9}{12} = \mathfrak{q}\frac{1 - \omega + \mathfrak{r}\frac{m-3}{12}}{12 - \omega}, \quad \omega = 0, 1.$$

ist, so findet man den sehr vielförmigen allgemeinen Ausdruck

$$\mu = \Delta d = 31 - \Delta\mathfrak{q}\frac{5m+1}{12} - (2-i)\,\Delta\mathfrak{q}\frac{m+9}{12}$$

$$= 30 + \Delta\mathfrak{q}\frac{7m-2}{12} - (2-i)\,\Delta\mathfrak{q}\frac{m+9}{12}.$$

Will man insbesondere den Theiler 12 durchgehends beibehalten, so hat man $\psi = 0$, $\varphi = 0$, $\omega = 0$, folglich

$$\mu = 31 - \mathfrak{q}\frac{5 + \mathfrak{r}\frac{5m+1}{12}}{12} - (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{m-2}{12}}{12}$$

$$= 30 + \mathfrak{q}\frac{7 + \mathfrak{r}\frac{7m-2}{12}}{12} - (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{m-2}{12}}{12}.$$

Sollen dagegen die möglich kleinsten Theiler verwendet werden, so kann man $\psi = 5$, $\varphi = 5$, $\omega = 1$ sezen, und erhält

$$\mu = 31 - \mathrm{q}\frac{\mathrm{r}\frac{5m+1}{12}}{7} - (2-i)\,\mathrm{q}\frac{\mathrm{r}\frac{m-3}{12}}{11}$$

$$= 30 + \mathrm{q}\frac{2+\mathrm{r}\frac{7m-2}{12}}{7} - (2-i)\,\mathrm{q}\frac{\mathrm{r}\frac{m-3}{12}}{11}.$$

Uebrigens haben jene Monate nur 30 oder weniger Tage, bei denen, vergleiche Vorbegr. (196), der Rest $\mathrm{r}\frac{5m+1}{12} \geqq 7$ ist, während bei den 31tägigen Monaten derselbe Rest < 7 ausfällt.

54.

Allgemeine Berechnung des mit einem Tage des Jahres übereinkommenden Monatstages.

Sei der d^te Tag eines Jahres, welches i Schalttage enthält, angegeben, und der Monat m, dann darin der Tag t zu suchen, mit dem jener Jahrstag übereinkommt.

Nimmt man erstlich die Gleichung (84)

$$31\,(m-1) - \mathrm{q}\frac{5m+1}{12} - (2-i)\,\mathrm{q}\frac{m+9}{12} + t = d,$$

so ist

$$\mathrm{q}\frac{5m+1}{12} = 0,\ 1,\ \ldots\ 5$$

$$(2-i)\,\mathrm{q}\frac{m+9}{12} = 0,\ 2-i,$$

daher

$$31\,(m-1) + t = d,\ d+1,\ \ldots\ d+7-i$$

$$\leqq d+7.$$

Daraus folgt nun, weil $t = 1,\ 2,\ \ldots\ 31$ sein kann,

$$m - 1 \leqq \mathrm{Q}\frac{d+7}{31},$$

nemlich entweder $\quad m = \mathrm{Q}\frac{d+7}{31} + 1 \quad$ oder $\quad m = \mathrm{Q}\frac{d+7}{31}$.

Im ersteren Falle ist

$$t = \mathrm{R}\frac{d+7}{31} - 7 + \mathrm{q}\frac{5m+1}{12} + (2-i)\,\mathrm{q}\frac{m+9}{12}$$

im anderen

$$t = \mathrm{R}\frac{d+7}{31} + 24 + \mathrm{q}\frac{5m+1}{12} + (2-i)\,\mathrm{q}\frac{m+9}{12}.$$

Man wird demnach die durch

$$d + 7 = 31\,\mathrm{Q}\frac{d+7}{31} + \mathrm{R}\frac{d+7}{31}$$

angedeutete außerordentliche Theilung ausführen, und nach dem entfallenden Reste

entweder
$$m = \mathfrak{Q}\frac{d+7}{31} + 1$$
$$t = \mathfrak{R}\frac{d+7}{31} - 7 + \mathfrak{q}\frac{5m+1}{12} + (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12}$$
oder
$$m = \mathfrak{Q}\frac{d+7}{31}$$
$$t = \mathfrak{R}\frac{d+7}{31} + 24 + \mathfrak{q}\frac{5m+1}{12} + (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12}$$
wählen, je nachdem dort oder hier t wenigstens 1 und höchstens so groß als die Länge μ des m^{ten} Monates wird.

Nimmt man dagegen zweitens die Gleichung (85)
$$30\,(m-1) + \mathfrak{q}\frac{7m-2}{12} - (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12} + t = d,$$
so ist
$$\mathfrak{q}\frac{7m-2}{12} = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ 6$$
$$(2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12} = 0,\ 2-i,$$
daher
$$30\,(m-1) + t = d,\ d-1,\ \ldots\ldots\ d-4-i$$
$$\overline{\overline{<}}\ d.$$

Hieraus ergibt sich, da $t = 1, 2, \ldots 31$ sein kann,
$$m - 1 \overline{\overline{<}}\ \mathfrak{Q}\frac{d}{30}$$
nemlich entweder $m = \mathfrak{Q}\frac{d}{30} + 1$ oder $m = \mathfrak{Q}\frac{d}{30}$.

In jenem Falle ist
$$t = \mathfrak{R}\frac{d}{30} - \mathfrak{q}\frac{7m-2}{12} + (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12}$$
und in diesem
$$t = \mathfrak{R}\frac{d}{30} + 30 - \mathfrak{q}\frac{7m-2}{12} + (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12}.$$

Man wird demnach d durch 30 außerordentlich theilen, und nach dem entfallenden Reste

entweder
$$m = \mathfrak{Q}\frac{d}{30} + 1$$
$$t = \mathfrak{R}\frac{d}{30} - \mathfrak{q}\frac{7m-2}{12} + (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12}$$
oder
$$m = \mathfrak{Q}\frac{d}{30}$$
$$t = \mathfrak{R}\frac{d}{30} + 30 - \mathfrak{q}\frac{7m-2}{12} + (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12}$$
nehmen, je nachdem dort oder hier t nicht unter 1 und nicht über die Tagezahl μ des m^{ten} Monates tritt.

Doch kann man auch jede dieser vier Formen nach Gefallen anwenden, indem man blos, wenn t Null oder negativ würde, zum nächst vorangehenden, oder wenn t zu groß ausfiele, zum nächst folgenden Monate überginge.

1. Beispiel. Sucht man für den $d = 56^{\text{sten}}$ Tag des Jahres den Monatstag, so hat man $d + 7 = 63 = 31.2 + 1$. Nimmt man $m = 2$ = Februar, weil der größere Werth t negativ geben würde, so wird $t = 1 + 24 + 0 + 0 = 25$. Auf eine andere Weise ist $d = 56 = 30.1 + 26$, folglich nimmt man $m = 1 + 1 = 2$ = Februar, weil die andere Rechnungsweise t zu groß liefern würde, und findet $t = 26 - 1 + 0 = 25$. Daher ist nach beiden Rechnungen 56. Jahrstag = 25 Februar. Wollte man im ersten Falle $m = 3$ = März annehmen, so fände man $t = 1 - 7 + 1 + 2 - i = -(3 + i)$, folglich $d = -(3 + i)$ März, d. i. $= 28 + i - 3 - i = 25$ Febr. Würde man dagegen im zweiten Falle $m = 1$ = Januar sezen, so ergäbe sich $t = 26 + 30 = 56$, also $d = 56$ Januar d. i. $= 56 - 31 = 25$ Februar.

2. Beispiel. Verlangt man zum $d = 336^{\text{sten}}$ Tage des Jahres den Monatstag, so findet man $d + 7 = 343 = 31.11 + 2$, also, wie man sogleich übersieht, $m = 11 + 1 = 12$ = December, und $t = 2 - 7 + 5 + 2 - i = 2 - i$. Oder man hat $d = 336 = 30.11 + 6$, und wieder $m = 11 + 1 = 12$ = December, und $t = 6 - 6 + 2 - i = 2 - i$. Somit ist jeden Falls 336. Jahrstag = $2 - i$ December, nemlich der 2 Dec. in Gemein- und der 1 Dec. in Schaltjahren.

55.

Berechnung des Tags der gemeinen Aere, welcher mit einem angegebenen Tage eines Jahres übereinkommt.

Seit der d^{te} Tag des Jahres a nach Chr. angegeben, und zu bestimmen, der wievielte Tag er nach dem Anfange dieser gemeinen Aere ist, oder welche Nummer n ihm zukommt. Die Jahre dieser Aere sind Sonnenjahre von 365 oder 366 Tagen, daher in §. 26 der allg. Chronol. $l = 365$ und $\Delta l = 1$. Nun wird

I. im julianischen oder alten Kalender fortwährend in jedem durch 4 theilbaren Jahre eingeschaltet, folglich geschehen bis zum Anfange des Jahres a, vermöge §. 24, II, Beisp. $e = \mathfrak{q}\frac{a-1}{4} = \mathfrak{Q}\frac{a}{4}$ Einschaltungen, das Jahr a selbst enthält

$$i = \mathfrak{q}\frac{a}{4} - \mathfrak{q}\frac{a-1}{4} = \mathfrak{q}\frac{a}{4} - \mathfrak{Q}\frac{a}{4} = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{a}{4}}{4} \text{ Schalttage,}$$

nemlich nur dann einen Schalttag, wenn a durch 4 theilbar ist; und man hat nach §. 26, Gl. (10) oder (11)

$$(86) \qquad n = 365\,(a-1) + \mathfrak{q}\frac{a-1}{4} + d.$$

$$= 365\,(a-1) + \mathfrak{Q}\frac{a}{4} + d.$$

Man erleichtert sich das Rechnen, wenn man die in den einziffrigen Anzahlen von Gemeinjahren enthaltenen Tage zusammenstellt.

Tafel 1.

Jahre	Tage	Jahre	Tage
1	365	6	2190
2	730	7	2555
3	1095	8	2920
4	1460	9	3285
5	1825		

Ferner enthält jeder 4jährige julianische Schaltkreis, nach Gleich. (12), $p = 4.\,365 + 1 = 1461$ Tage; daher ist vermöge Gleich. (13) und (14)

$$(87) \qquad n = 1461\, Q\frac{a}{4} + 365\left(R\frac{a}{4} - 1\right) + d$$

oder

$$(88) \qquad n = 1461\, q\frac{a-1}{4} + 365\, r\frac{a-1}{4} + d.$$

Zur Abkürzung der Rechnung dienen folgende Zusammenstellungen, von denen Taf. 2 die Vielfachen von 1461, und Taf. 3 für die Multiplicatoren $R\frac{a}{4} - 1 = r\frac{a-1}{4}$ die Vielfachen von 365 angibt.

Tafel 2.

Schaltkreise:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
enthalten Jahre:	4,	8,	12,	16,	20,	24,	28,	32,	36,
oder Tage:	1461,	2922,	4383,	5844,	7305,	8766,	10227,	11688,	13149.

Tafel 3.

Jahr eines Schaltkreises:	1,	2,	3,	4,
Tage des Schaltkreises bis zu des Jahres Anfange:	0,	365,	730,	1095,
bis zu des Jahres Schlusse:	365,	730,	1095,	1461.

1. Beispiel. Der wievielte Tag in der christlichen Aere ist der 14 März 1079 nach Chr.? Dies Jahr ist ein Gemeinjahr, daher $i = 0$, und 0 März $= 59$, folglich 14 März $= 59 + 14 = 73 = d$. Ferner hat man laufendes Jahr $a = 1079 = 4.\,269 + 3$, und die vergangenen Jahre $a - 1 = 1078 = 4.\,269 + 2$.

1000 Jahre	. . . .	365000 Tage
70 »	. . . .	25550
8 »	. . . .	2920
Schalttage	. . .	269
14 März	. . . .	73
		$n = 393812$

Oder:

200 Schaltkreise = 800 Jahre	. . . . . .	292200 Tage
60 » = 240 »	. . . . . .	87660
9 » = 36 »	. . . . . .	13149
3 »	. . . . . .	730
14 März	. .	73
	n =	393812

2. Beispiel. In welchem Abstande von der Epoche der christlichen Aere liegt die Epoche der byzantinischen Weltäre? oder der wie vielte Tag der christlichen Aere ist der 0 Sept. 5509 v. Chr.? Hier hat man $a = -5508 \equiv 0$, mod 4, also ist dies Jahr ein Schaltjahr oder $i = 1$; ferner ist $a - 1 = -5509 = 4.(-1378) + 3$, und 0 Sept. $= 244$.

Daraus folgt $-5509 . 365 = -1825000$

$$\begin{array}{rr} & 182500 \\ & 3285 \\ e = - & 1378 \\ \hline & -2012163 \\ d = + & 244 \\ \hline n = & -2011919; \end{array}$$ wie in §. 48, I.

II. Im gregorianischen oder neuen Kalender wird man am vortheilhaftesten das angegebene Datum nach §. 47, (60) auf das entsprechende julianische zurückführen, und zu diesem den zugehörigen Tag der gemeinen Aere berechnen. Will man jedoch für diesen Tag einen allgemeinen Ausdruck aufstellen, so erwäge man, daß am 0 Januar alten Styls im Jahre a n. Chr., oder am $365(a-1) + \mathrm{E}\frac{a-1}{4}$ten Tage der christlichen Aere, die Voreilung des neuen Kalenders noch nach dem nächst vorhergehenden Jahre a — 1 bemessen wird. Bezeichnet man daher diese Voreilung mit x, und die Hunderte der Jahrzahl $a - 1$ mit σ, so daß man hat

$$\sigma = \mathrm{E}\frac{a-1}{100} = \mathrm{E}\frac{a}{100},$$

und nach §. 47, II,

$$x = \sigma - \mathrm{E}\frac{\sigma}{4} - 2 = \mathrm{E}\frac{3\sigma-5}{4};$$

so vergehen bis zum 0 Januar neuen Styls um diese x Tage weniger, und folglich ist die Nummer des d^{ten} Tages neuen Styls im Jahre a

$$(89) \qquad n = 365(a-1) + \mathrm{E}\frac{a-1}{4} + d - x,$$

oder

$$n = 1461\,\mathrm{E}\frac{a}{4} + 365\left(\mathrm{R}\frac{a}{4} - 1\right) + d - x,$$

oder

$$n = 1461\,\mathrm{E}\frac{a-1}{4} + 365\,\mathrm{r}\frac{a-1}{4} + d - x.$$

56.

Bestimmung des Jahres und Tages, worauf ein Tag der gemeinen Aere trifft.

Ist umgekehrt zu berechnen, in welches Jahr a n. Chr. und auf welchen Tag d desselben der n^{te} Tag in der christlichen Aere fällt; so hat man die voranstehenden Ausdrücke von n in Bezug auf a und d aufzulösen, oder wenn man

I. nach dem alten Style rechnet, eine der in §. 27 bis 29 verzeichneten Auflösungen anzuwenden, indem man, nach §. 47, I, $l = 365$, $\Delta l = 1$, $\varpi = 4$, $\varepsilon = 1$, und in §. 24, II, $\xi = 4$, also $\delta = -1$ setzt.

α) Eine sehr bequeme Rechnung bietet §. 27, II dar, indem man, nach den Gleichungen (20) und (21), a und d aus

$$(90) \qquad a = \mathfrak{Q}\frac{n}{365} + 1 - \Delta a$$
$$d = \mathfrak{R}\frac{n}{365} - \mathfrak{q}\frac{a-1}{4} + 365\Delta a$$

auf folgende Weise bestimmt.

Man theilt n durch 365 außerordentlich, um $\mathfrak{Q}\frac{n}{365}$ und $\mathfrak{R}\frac{n}{365}$ zu erhalten, und nimmt vorläufig $\Delta a = 0$. Fällt dabei, weil a zu groß angenommen wurde, d negativ aus, so wird man den oberen Quotus seines absoluten Werthes durch 365 für Δa, oder $\Delta a = \mathfrak{Q}\frac{-d}{365} + 1$ setzen, und darnach a und d bestimmen. Bei dem Theilen durch 365 läßt sich Tafel 1 in §. 55 vortheilhaft benützen.

Z. B. Sei der 2000000ste Tag gegeben und für ihn Jahr und Tag zu suchen. Hier ist $n = 2000000 = 365 . 5479 + 165$; daher für $\Delta a = 0$, vorläufige Jahrzahl $a = 5480$, und Tag $d = 165 - 1369 = -1204$. Hieraus folgt $\Delta a = \mathfrak{Q}\frac{1204}{365} + 1 = 4$; daher richtige Jahrzahl $a = 5480 - 4 = 5476$ und $i = 1$, folglich Jahrstag $d = 165 - 1368 + 1460 = 257$. Es ist aber, vermöge der Tafel in §. 41, $244 = 0$ September, daher $d = 257 = 13$ September. Der 2000000ste Tag n. Chr. wird daher der 13 September alten Styls 5476 n. Chr. sein.

β) Die einfachste Auflösung bieten die Gleichungen (22) und (23) in §. 28, III; nemlich

$$(91) \qquad a = \mathfrak{Q}\frac{4n}{1461} + 1$$
$$d = \left(\mathfrak{r}\frac{a-1}{4} + \mathfrak{R}\frac{4n}{1461}\right) : 4.$$

Zum Theilen durch 1461 verwendet man mit Vortheil die Tafel 2 in §. 55.

Z. B. Im obigen Falle ist $n = 2000000$, $4n = 8000000 = 1461 . 5475 + 1025$, daher $a = 5476$, $i = 1$, und $d = (\mathfrak{r}\frac{5475}{4} + 1025) : 4 = 1028 : 4 = 257 = 13$ September, wie vorher.

γ) Die einleuchtendste Auflösung ergibt sich aus §. 28, IV. Ihr zu Folge erhält man, nach Gleich. (25), die Anzahl der verflossenen vollen 4jährigen Schaltkreise

$$\mathfrak{Q}\frac{a}{4} = \mathfrak{Q}\frac{n}{1461},$$

ferner nach (29) das Jahr der laufenden Periode

$$\mathfrak{R}\frac{a}{4} = \mathfrak{Q}\frac{\mathfrak{R}\frac{n}{1461}}{365} + 1,$$

folglich nach Gleich. (31) das geforderte Jahr selbst

$$a = 4\mathfrak{Q}\frac{a}{4} + \mathfrak{R}\frac{a}{4},$$

endlich findet man den Jahrstag, nach Gleichung (30),

$$d = \mathfrak{R}\frac{\mathfrak{R}\frac{n}{1461}}{365}.$$

Bei der Ausrechnung selbst mag man sich, nach Anleitung des §. 28, V, der Tafeln 2 und 3 auf Seite 154 bedienen.

Z. B. Behält man dieselbe Frage wie oben bei, so ist

$$n = 2000000 = 1461.\ 1368 + 1352,$$

$$\mathfrak{R}\frac{n}{1461} = 1352 = 365.\ 8 + 257,$$

daher $\quad a = 4.\ 1368 + 3 + 1 = 5476, \quad i = 1,$

$$d = 257 = (257 - 244) \text{ Sept.} = 13 \text{ Sept.}$$

Oder:

Tag		Jahre
2000000		
1461	Tage, nach Taf. 2, S. 154, . . .	4000
5390		
4383	» » » »	1200
10070		
8766	» » » »	240
13040		
11688	» » » »	32
1352		
1095	» nach Taf. 3, S. 154, . . .	4
257		5476 = a
244 = 0 Sept.		
13 Sept. = d.		

II. Soll nach dem gregorianischen Kalender gerechnet werden, so hat man vorerst das julianische Datum des angegebenen Tages der christlichen Aere zu bestimmen, dann für das Jahrhundert, in welchem das gefundene Jahr liegt, die Voreilung k des gregorianischen Datums; wornach

sich sofort durch Zusammenfügung beider das geforderte gregorianische Datum ergibt. Z. B. In dem oben gefundenen Jahre a = 5476 werden verflossen sein s = 54 Jahrhunderte, daher wird vermöge §. 47, II, Gleich. (61) o. (62), im 55. Jahrhunderte k = 54 — 13 — 2 = $\frac{157}{4}$ = 39. Daraus folgt, daß der oben berechnete 13 Sept. alt. St. 5476 der 13 + 39 — 30 = 22 October neuen St. sein werde.

57.

Allgemeine Reduction der Data auf die christliche Aere.

Gewöhnlich führt man die Data nach den verschiedenen Zeit- und Jahrrechnungen auf die dionysische christliche Aere zurück, indem man sich dabei fast immer nur des julianischen Styles bedient, weil er nach §. 47, Gleich. (60), leicht auf den gregorianischen übertragen werden kann, und sich durch weit größere Einfachheit der Rechnung empfiehlt. Im Folgenden sollen diese Vergleichungen, wie zum Theil bereits geschah, bei den einzelnen vorkommenden Aeren gezeigt werden. Hier genüge die Andeutung des allgemeinen Vorgangs.

Man berechne nach einer der in §. 26 gelehrten Weisen, der wievielte der im Datum angeführte Tag in der fremden Aere ist. Diesem Tage rechne man die zwischen der Epoche dieser Aere und der Epoche der christlichen Aere begriffenen Tage, je nachdem die fremde Aere später oder früher als die christliche beginnt, zu oder ab, damit man erfahre, der wievielte derselbe Tag in der gemeinen christlichen Aere ist. Zu diesem Tage nun bestimme man nach §. 56 Jahr und Tag, worauf er trifft.

Zweites Hauptstück.

Festrechnung der Christen.

58.

Allgemeines.

Die kirchlichen Fest- oder Feiertage der Christen wiederkehren theils wöchentlich, theils jährlich. Unter den wöchentlich wiederkehrenden sind am wichtigsten die Sonntage; ehedem aber, besonders in den ersten Jahrhunderten des Christenthums, feierte man in jeder Woche außer dem Sonntage, der feria prima, auch noch die feria quarta, den Mittwoch, und die feria sexta, den Freitag. Von den jährlich wiederkehrenden Festen fallen

einige, von einem Jahre zum anderen, immer auf verschiedene Monatstage, und heißen darum bewegliche; unter ihnen ist das feierlichste, nach dem sich alle übrigen richten, das Fest der Auferstehung des Herrn, das Osterfest. Andere Feste dagegen treffen entweder immer auf denselben Monatstag, oder höchstens auf einen ihm benachbarten Wochentag, und heißen darum unbewegliche. Die Berechnung der Data dieser religiösen Feste ist ein wichtiger Zweig der Zeitrechnung der christlichen Völker, und wird die Festrechnung der christlichen Kirche (computus ecclesiasticus) genannt.

A. Berechnung der christlichen Sonntage.

59.

Die Sonntage stehen mit den übrigen Tagen der Woche in so enger Verbindung, daß man eben so leicht jeden beliebigen Wochentag als den Sonntag bestimmt; daher ist es räthlich, sogleich die allgemeine Berechnung der Wochentage in der christlichen Zeitrechnung zu lehren. Die Hilfszahlen in dieser Rechnung sind theils die Wochen- und Sonntagsbuchstaben; theils die bald durch Buchstaben, bald durch Zahlen dargestellten Wochentage des 1 Januars, wofür man besser die Wochentage des 0 Januars setzen würde; theils die Wochentage des 1 Septembers oder 24 März, die so genannten Concurrenten; theils endlich die Sonnencirkel.

60.

Wochenbuchstaben. Der Sonntagsbuchstabe.

Nachdem die durch die Nundinae der Römer gebildeten wochenartigen Zeitkreise durch die siebentägigen Wochen verdrängt worden waren, fingen die occidentalen kirchlichen Computisten an, auf eine ähnliche Weise wie in den fastis der Römer (§. 43) sämmtliche Tage des Jahres mit den sich wiederholenden 7 ersten Buchstaben des Alphabetes zu bezeichnen, welche dadurch die christlichen Nundinalbuchstaben oder Wochenbuchstaben wurden, und noch heut zu Tage in manchen Kalendern aufgeführt werden. Von ihnen heißt jedesmal derjenige, der auf die Sonntage trifft, der Sonntagsbuchstabe. Die Einführung der Sonntagsbuchstaben schreibt man gewöhnlich dem Dionysius Exiguus bei; doch findet sich in seinen Schriften noch keine Spur davon, selbst noch nicht in Beda's chronologischen Abhandlungen.

Auch hier bekommt im Schaltjahre der Schalttag, bissextus dies ante Calendas Martias, der 24 Februar, denselben Buchstaben F, wie der ihm nachfolgende sextus dies ante Cal. Mart., der im Gemeinjahre der 24. und im Schaltjahre der 25 Februar ist.

Bezeichnet man wieder die Wochenbuchstaben durch ihre Nummern im Alphabete, so entsprechen

den Wochenbuchstaben	A	B	C	D	E	F	G
die Nummern	1	2	3	4	5	6	7;

und in den allgemeinen Ausdrücken von §. 43 hat man nun blos den Modul 8 mit 7 zu vertauschen. Demnach gehört dem d^{ten} Tage des Jahres, wenn man den Schalttag außer Betracht läßt, der Wochenbuchstabe

$$\nu \equiv d, \text{ mod } 7 = \mathfrak{R}\frac{d}{7}.$$

So ist der 24 Februar $= 55$. Tag im Jahre $= d$, also

$\nu \equiv 55, \text{ mod } 7 \equiv 6 = F$; daher

im Gemeinjahre:	Februar	23.	24.	25.	26.	27.	28.
	Wochenbuchst.	E	F	G	A	B	C;
im Schaltjahre:	Februar	24.	25.	26.	27.	28.	29.
	Wochenbuchst.	F	F	G	A	B	C.

Für alle Fälle gilt daher der allgemeine Ausdruck der Wochenbuchstaben

$$(92) \qquad \nu \equiv d - i\,\mathfrak{E}\frac{d+255}{311}, \text{ mod } 7,$$

wofern das Jahr i Schalttage enthält.

Da in der Woche, auf welche der Schalttag trifft, den man auch jezt noch, so wie es Julius Cäsar anordnete, auf den 24 Februar sezt, zwei Tage einerlei Wochenbuchstaben erhalten; so wird von dem vorhergehenden Sonntage bis zum nachfolgenden ein Buchstabe zu wenig gezählt, folglich trifft nach dem Schalttage der Sonntag nicht mehr auf denselben Buchstaben, wie vor und bis zum Schalttage, sondern auf den im Alphabete oder in der periodischen Wiederholung der Wochenbuchstaben unmittelbar vorangehenden, auf welchen früher die Samstage trafen. In jedem Schaltjahre gibt es demnach zwei Sonntagsbuchstaben, von denen der spätere im Alphabete oder in der siebenstelligen Periode den Sonntagen vor und bis zu dem Schalttage, und der frühere den Sonntagen nach dem Schalttage angehört. Ist z. B. bis zum Schalttage der Sonntagsbuchstabe A, so ist er nach demselben G.

Zur Abkürzung der Rede ist es gut, unter dem Sonntagsbuchstaben eines Jahres denjenigen zu verstehen, der im ganzen Gemeinjahre und im größten Theile des Schaltjahres, nemlich nach dem Schalttage (24 Febr.), auf die Sonntage trifft; und blos zu merken, daß derselbe im Schaltjahre vor und bis zum Schalttage nicht auf die Sonntage, sondern auf die Samstage fällt, daher eigentlich der Samstagsbuchstabe für diese Zeit ist; und daß sonach der in dieser Zeit wirklich bestehende Sonntagsbuchstabe, welchen man, zur Unterscheidung von jenem gewöhnlichen, den ausnahmsweisen nennen mag, der nächst folgende in der periodischen Wiederkehr der

7 Wochenbuchstaben ist. Um überdies in der Bestimmung der Wochentage unnöthige Schwierigkeiten zu beseitigen, thut man wohl, den Schalttag in allen solchen Bestimmungen oder Berechnungen auf den lezten, d. i. auf den 29 Februar zu verlegen, mag man ihn auch immerhin in den Kalendern am 24 Februar ansezen.

61.

Bestimmung der Wochentage mittels der Sonntagsbuchstaben.

Auf der periodischen Wiederholung der sieben Wochenbuchstaben im Kalender beruht die Einrichtung und der Gebrauch folgender Tafel, mittels deren man, sobald man den Sonntagsbuchstaben eines Jahres kennt, den Wochentag, auf den ein bezeichneter Monatstag trifft, höchst leicht bestimmen kann.

Januar in Gemeinj. (31) October (31)	Januar in Schaltj. (31) April (30) Juli (31)	Septemb. (30) December (31)	Juni (30)	Februar in Gemeinj. (28) März (31) November (30)	Februar in Schaltj. (29) August (31)	Mai (31)
0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			
A	B	C	D	E	F	G
Samstag	Freitag	Donnerst.	Mittwoch	Dinstag	Montag	Sonntag
6	5	4	3	2	1	0 oder 7

Alle in dieser Tafel aufgeführten Monatstage haben nemlich, wie man sich bald überzeugen kann, den Wochenbuchstaben G und treffen sonach auf einerlei Wochentag. Ist nun G der Sonntagsbuchstabe eines Jahrs, so müssen alle Tage der Tafel Sonntage sein, worauf das unter G stehende Wort »Sonntag« hinweist. Ist A der Sonntagsbuchstabe, so muß G zu den Samstagen gehören, daher sind alle Tage der Tafel Samstage, wie das unter A stehende Wort »Samstag« andeutet. Auf gleiche Weise steht unter jedem Sonntagsbuchstaben der Wochentag, auf den sämmtliche in der Tafel verzeichneten Monatstage treffen. Daraus läßt sich sofort, durch ein ganz kurzes vorwärts oder rückwärts Zählen, der Wochentag bestimmen, auf den irgend ein angegebener Monatstag trifft, der nicht in der Tafel sich findet.

Z. B. Auf welchen Wochentag fällt der 1 November in jenen Jahren, deren Sonntagsbuchstabe C ist? In einem solchen Falle ist jeder Tag der Tafel ein Donnerstag, also auch der 4 November. Zählt man nun von 4 zurück auf 1, entweder in der Zeile, wo der 4. Tag steht, oder in der vorlezten Zeile, so findet man, daß der 1 November ein Montag ist.

Anmerkung. In dieser Wochentafel rückt jeder spätere Monat um 2 oder 3 Stellen vor den nächst früheren, je nachdem dieser 30 oder 31 Tage, nemlich 2 oder 3 Tage mehr als 4 Wochen enthält.

62.

Bestimmung der Wochentage durch den Wochentag eines gewissen Monatstages. Concurrenten.

Auch kann man, wenn man nur den Wochentag irgend eines Monatstages in einem Jahre kennt, mag dieser in obiger Tafel stehen oder nicht, (weil man im lezteren Falle sehr leicht den Wochentag des ihm nächst vorangehenden oder nachfolgenden, in der Tafel vorkommenden, Monatstages zu bestimmen vermag), gleichfalls den Wochentag aller Tage der Tafel und den Sonntagsbuchstaben, folglich auch darnach wieder den Wochentag jedes anderen Monatstages finden.

Z. B. Weiß man von einem Schaltjahre, daß sein 18 Januar ein Samstag ist, so findet man sogleich, daß der in der Tafel stehende 22 Januar, folglich auch jeder andere Tag der Tafel, ein Mittwoch ist. Will man nun wissen, auf welchen Wochentag der 25 December trifft, so benüzt man das, daß nach der Tafel der 23 December ein Mittwoch ist, folglich muß der 25 December ein Freitag sein. Nebenbei kann man noch bemerken, daß der Sonntagsbuchstabe dieses Jahres D ist.

Zu dem angeführten Zwecke benüzten die ältesten lateinischen kirchlichen Computisten den Wochentag des ersten Januars, oder denjenigen, an welchem das Jahr anfing; dafür sezt man jedoch vortheilhafter den Wochentag des nullten Januars, nemlich denjenigen, nach welchem das Jahr anfängt. Die griechischen und insbesondere die alexandrinischen Kirchenrechner dagegen gebrauchten den Wochentag des ersten Septembers, an welchem Monatstage man im oströmischen Kaiserreiche das Jahr anfing. Diese Wochentage wurden gewöhnlich der Ordnung nach durch die 7 ersten Buchstaben des Alphabets bezeichnet. Später, als die lateinischen Kirchenrechner sich nach den griechischen richteten, nahmen sie gleichfalls den Wochentag des 1 Septembers zur Grundlage für die Berechnung der Wochentage aller anderen Tage des Jahres, jedoch um ihn in die Nähe der frühesten Osterfesttage zu bringen, als den Wochentag des

24 März *) auf, mit dem er jederzeit identisch ist, und nannten die mit jenem oder diesem Monatstage jeweilig zusammen treffenden Wochentage Concurrentes scil. dies hebdomadis. Die Concurrenten werden gewöhnlich mit den Zahlen von 1 bis 7 bezeichnet, und hängen mit dem jedesmaligen Sonntagsbuchstaben so zusammen, wie die Vergleichung der lezten und drittlezten Zeile der voranstehenden Tafel an die Hand gibt. Zugleich steht in derselben Tafel unmittelbar über jeder Concurrente der Wochentag, auf welchen sämmtliche in der Tafel aufgeführten Monatstage treffen.

63.
Allgemeine Berechnung des Wochentages, auf den ein angegebener Tag nach Chr. trifft.

Sei der Wochentag h zu berechnen, auf welchen der d^{te} Tag des Jahres a nach Chr. fällt.

Bezeichnet H_0 den Wochentag des 0 Januars des Jahres 1 nach Chr., so findet man

I. im julianischen Kalender nach allg. Chron. §. 30, Congr. (41)

$$h \equiv 365\,(a-1) + q\frac{a-1}{4} + d + H_0, \text{ mod } 7$$

oder

$$h \equiv a - 1 + q\frac{a-1}{4} + d + H_0, \text{ mod } 7.$$

Um H_0 zu berechnen, bedarf man blos den Wochentag eines bestimmten Datums zu kennen, z. B. nur zu wissen, daß der 4 Oct. 1582 ein Donnerstag war. Denn hier hat man $a = 1582$, $i = 0$, 4 Oct. $= 273 + 4 = 277 = d$, $h =$ Donnerst. $= 5$, also $a \equiv 0$, mod 7, $q\frac{a-1}{4} = q\frac{1581}{4} = 395 \equiv 3$. Somit ist $5 \equiv -1 + 3 + 4 + H_0$, mod 7 und $H_0 = 6 =$ Freitag, wie in §. 47, I angeführt wurde.

Sezt man diesen Werth, so findet man den geforderten Wochentag

$$(93) \qquad h \equiv a + q\frac{a}{4} + d - 2, \text{ mod } 7.$$

Beisp. Der 14 März 1079 n. Chr. gibt $a = 1079 = 4.\,269 + 3 \equiv 1$, mod 7, $i = 0$, $q\frac{a}{4} = 269 \equiv 3$, $d = 14$ März $= 14 + 59 = 73 \equiv 3$, also ist der jenem Tage entsprechende Wochentag $h \equiv 1 + 3 + 3 - 2 \equiv 5$ $=$ Donnerstag.

---

*) Der 24 März kam mit dem 28 Phamenoth der Alexandriner überein, und traf also auch auf denselben Wochentag wie der 0 Phamenoth oder 30 Mechir. Da nun in diesen Phamenoth die frühesten Osterfesttage fielen, so ließe sich auch muthmaßen, daß die Concurrenten ursprünglich die Wochentage des 0 Phamenoth, diejenigen nemlich, nach denen der Phamenoth jedesmal anfängt, andeuteten. Vergl. unten die Zeitrechnung der Alexandriner.

Sucht man, zur Einführung des Restes nach 4 statt des Quotus, vermöge §. 30, Congr. (42) ψ aus $4\psi \equiv 1$, mod 7, so findet man $\psi = 2$. Zugleich ist in (44) $l = 365 \equiv 1$, mod 7, $\Delta l = 1$, $\varpi = 4$, $\varepsilon = 1$, $\delta = -1$, $p = 1461 \equiv -2$, daher $p\psi \equiv -4 \equiv 3$. Sofort erfolgt

$$(94) \qquad h \equiv 3a - 2\mathfrak{r}\frac{a-1}{4} + d + 3, \text{ mod } 7,$$

oder auch

$$(95) \qquad h \equiv 3a - 2\mathfrak{R}\frac{a}{4} + d - 2, \text{ mod } 7.$$

Der letzte Ausdruck ergibt sich auch daraus, daß

$$a = 4\mathfrak{Q}\frac{a}{4} + \mathfrak{R}\frac{a}{4},$$

daher wenn man, weil $2 . 4 = 8 \equiv 1$, mod 7 ist, mit 2 multiplicirt,

$$2a = 8\mathfrak{Q}\frac{a}{4} + 2\mathfrak{R}\frac{a}{4} \equiv \mathfrak{Q}\frac{a}{4} + 2\mathfrak{R}\frac{a}{4}, \text{ mod } 7$$

und

$$(96) \qquad \mathfrak{Q}\frac{a}{4} \equiv 2a - 2\mathfrak{R}\frac{a}{4}, \text{ mod } 7$$

sein muß; wornach aus dem früheren Ausdrucke (93) von h der letztere (95) gewonnen wird.

Sind vor dem Jahre a bereits σ Jahrhunderte vergangen, und ist es im $\sigma + 1^{ten}$ Jahrhunderte das α^{te} Jahr,

nemlich $\qquad \sigma = \mathfrak{Q}\frac{a}{100}, \quad \alpha = \mathfrak{R}\frac{a}{100}$ und $a = 100\sigma + \alpha$;

so ist $a \equiv \alpha$, mod 4 und $a \equiv 2\sigma + \alpha$, mod 7; folglich findet man

$$h \equiv 3\alpha - 2\mathfrak{R}\frac{\alpha}{4} + d - \sigma - 2$$
$$\equiv \alpha + \mathfrak{Q}\frac{\alpha}{4} + d - \sigma - 2, \text{ mod } 7.$$

Beisp. 1. Welcher Wochentag fiel auf den 28 August 284 nach Chr.? Hier ist $a = 284 \equiv 4$, mod 4 und $\equiv 4$, mod 7, $i = 1$; $d = 28$ August $= 28 + 213 = 241 \equiv 3$, mod 7; daher ist der geforderte Wochentag $h \equiv 12 - 8 + 3 - 2 \equiv 5 =$ Donnerstag.

Beisp. 2. Auf welchen Wochentag traf der 1 September 5509 vor Chr. die Epoche der byzantinischen Weltäre? Hier hat man $a = -(5509 - 1) = -5508 \equiv 4$, mod $4 \equiv 1$, mod 7, $i = 1$; $d = 1$ Sept. $= 1 + 244 = 245 \equiv 0$, mod 7; folglich ist jener Wochentag $h \equiv 3 - 8 + 0 - 2 \equiv 7 =$ Samstag; wie in §. 48, I angeführt wurde.

II. Für den gregorianischen Kalender hat man vermöge §. 47, II, wenn k seine Voreilung vor dem julianischen bezeichnet, vorerst das gregorianische Datum um diese k Tage zurück zu schieben, um das damit übereinkommende julianische Datum zu bestimmen; wornach man zu diesem den Wochentag, nach den obigen Vorschriften, berechnet. Will man für diesen Wochentag h einen allgemeinen arithmetischen Ausdruck aufstellen, so sei der

angegebene Monatstag der d^{te} Tag des Jahres a n. Chr. Dann zeigt die Vergleichung der Ausdrücke der Tagesnummer n in Gleich. (86) und (89) des §. 55, daß dieser d^{te} Tag des neuen Kalenders im alten als der $d - x^{te}$ Tag desselben Jahres a gezählt wird; wofern man, wie in §. 55, II, unter x die Voreilung des neuen Styls im nächst vorhergehenden Jahre a — 1, und unter σ die Hunderte dieser Jahrzahl versteht, oder

$$(97)\qquad \sigma = \mathrm{q}\frac{a-1}{100} = \mathrm{Q}\frac{a}{100}$$

$$x = \sigma - \mathrm{q}\frac{\sigma}{4} - 2 = \mathrm{q}\frac{3\sigma-5}{4}$$ setzt.

Sonach hat man in obigen Ausdrücken von h blos d in d — x umzuwandeln; wonach man folgende Ausdrücke erhält

$$(98)\qquad h \equiv a + \mathrm{Q}\frac{a}{4} + d - x - 2, \text{ mod } 7$$
$$\equiv 3a - 2\mathrm{R}\frac{a}{4} + d - x - 2, \text{ mod } 7,$$

oder wenn man für x den Ausdruck (97) schreibt,

$$(99)\qquad h \equiv a + \mathrm{Q}\frac{a}{4} - \sigma + \mathrm{q}\frac{\sigma}{4} + d$$
$$\equiv 3a - 2\mathrm{R}\frac{a}{4} - \sigma + \mathrm{q}\frac{\sigma}{4} + d, \text{ mod } 7;$$

oder auch weil, wie oben in (96) $\mathrm{q}\frac{\sigma}{4} \equiv 2\sigma - 2\mathrm{r}\frac{\sigma}{4}$ ist,

$$(100)\qquad h \equiv 3a - 2\mathrm{R}\frac{a}{4} + \sigma - 2\mathrm{r}\frac{\sigma}{4} + d, \text{ mod } 7.$$

Ist das Jahr a nach Verlauf von σ Jahrhunderten oder im $\sigma + 1^{ten}$ Jahrhunderte das Jahr α, nemlich $\sigma = \mathrm{Q}\frac{a}{100}$, $\alpha = \mathrm{R}\frac{a}{100}$ und $a = 100\sigma + \alpha \equiv \alpha$, mod $4 \equiv 2\sigma + \alpha$, mod 7; so findet man

$$(101)\qquad h \equiv 3\alpha - 2\mathrm{R}\frac{\alpha}{4} + d - 2\mathrm{r}\frac{\sigma}{4}$$
$$\equiv \alpha + \mathrm{Q}\frac{\alpha}{4} + d - 2\mathrm{r}\frac{\sigma}{4}, \text{ mod } 7.$$

Beispiel 1. Auf welchen Wochentag fiel der 2 März 1835, der Sterbetag Kaisers Franz I.? Hier ist $a = 1835 \equiv 3$, mod $4 \equiv 1$, mod 7, $\sigma = 18 \equiv 2$, mod $4 \equiv 4$, mod 7; $i = 0$, $d = 2$ März $= 2 + 59 = 61 \equiv -2$, mod 7; daher nach (100) der fragliche Wochentag

$$h \equiv 3 - 6 + 4 - 4 - 2 \equiv 2 = \text{Montag}.$$

Beispiel 2. Im Jahre 1800 = a war $a \equiv 1$, $\mathrm{Q}\frac{a}{4} = 449 \equiv 1$, daher für (93) und (98) $a + \mathrm{Q}\frac{a}{4} - 2 \equiv 0$. Das Jahr war im alten Styl ein Schalt-, im neuen aber ein Gemeinjahr, darum anfangs $k = 11 = x$ bis 29 Februar alten Styls, oder 12 März neuen Styls; und nachher $k' = k + 1 = 12$, vom 1 März alten Styls, oder 13 März neuen Styls angefangen. Der 14 März neuen Styls — der Tag der Erwählung des Cardinals Chiaramonti zum Papste (Pius VII) — war demnach der 2 März alten Styls, und der mit ihm auf einerlei Wochentag fallende achte Tag vorher, der 7 März neuen Styls, war der $(28 + 7 - 11 =)$ 24 Febr. a. St.

Für diese zwei Tage hat man daher im neuen Styl $d - \varkappa = 62$ und $55 \equiv 6$, im alten aber $d = 62$ und $55 \equiv 6$; mithin trafen sie in beiden auf den Wochentag $h \equiv 6 =$ Freitag.

Zusaz. Durch obige Untersuchung, die mit jener des §. 55 in engster Verbindung steht, erfährt man auch noch, wie die Anzahl e der vor dem Jahre a im gregorianischen Kalender eingeschalteten Tage und die i gregorianischen Schalttage dieses Jahres selbst allgemein sich ausdrücken lassen.

Aus den Ausdrücken (86) und (89) der Tagesnummer n in §. 55 ersieht man, daß gemäß der gregorianischen Schaltrechnung vor einem Jahre a nach Chr., welches dem Jahre der Kalenderverbesserung (1582) nachfolgt, $\mathfrak{q}\frac{a-1}{4}$ T. eingeschaltet, dagegen wieder $\varkappa$ Tage ausgestoßen werden; mithin ist die Anzahl der gregorianischen Schalttage vor dem Jahre a

$$e = \mathfrak{q}\frac{a-1}{4} - \varkappa = \mathfrak{Q}\frac{a}{4} - \varkappa.$$

Vermöge der Gleichungen (97) ist $\varkappa$ unmittelbar durch a ausgedrückt

$$\varkappa = \mathfrak{Q}\frac{a}{100} - \mathfrak{Q}\frac{a}{400} - 2,$$

daher auch $e = \mathfrak{Q}\frac{a}{4} - \mathfrak{Q}\frac{a}{100} + \mathfrak{Q}\frac{a}{400} + 2,$

oder $$= \mathfrak{q}\frac{a + \mathfrak{r}\frac{-a}{4} - 3\mathfrak{Q}\frac{a}{100}}{4} + 1.$$

Bis zum nächst folgenden Jahre $a + 1$ werden $e + i$ Tage eingeschaltet. Ersezt man demnach in dem ursprünglichen Ausdrucke von e das Jahr a durch $a + 1$, so übergeht e in $e + i$,

$$\sigma = \mathfrak{q}\frac{a-1}{100} \text{ in } \mathfrak{q}\frac{a}{100} = s, \text{ also } \varkappa = \mathfrak{q}\frac{3\sigma-5}{4} \text{ in } \mathfrak{q}\frac{3s-5}{4} = k;$$

daher $e + i = \mathfrak{q}\frac{a}{4} - k.$

Zieht man hievon jenen anfänglichen Ausdruck von e ab, und berücksichtiget, daß wenn man die Anzahl der julianischen Schalttage im Jahre a mit j bezeichnet, vermöge §. 55, I,

$$j = \mathfrak{q}\frac{a}{4} - \mathfrak{q}\frac{a-1}{4} = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{a}{4}}{4} \text{ ist,}$$

so findet man für die Anzahl der gregorianischen Schalttage im Jahre a den Ausdruck $i = j - k + \varkappa = j - (k - \varkappa)$.

Um auch i unmittelbar durch a zu bestimmen, bedenke man, daß zu Folge der Gleichungen (61) und (62) in §. 47,

$$k = \mathfrak{q}\frac{a}{100} - \mathfrak{q}\frac{a}{400} - 2 \text{ ist;}$$

darnach erhält man, gemäß Vorb. (60) und nach dem obigen Ausdrucke von j,

$$i = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{a}{4}}{4} - \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{a}{100}}{100} + \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{a}{400}}{400}.$$

Auch kann man $\varkappa$ und k durch die leicht bestimmbaren Jahrhunderte σ und s, vor Beginn und nach Ablauf des Jahres a, ausdrücken, und erhält

also
$$i = \mathfrak{q}\frac{a}{4} - \mathfrak{Q}\frac{a}{4} + \mathfrak{q}\frac{3\sigma-5}{4} - \mathfrak{q}\frac{3s-5}{4}$$
$$= \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{a}{4}}{4} - \mathfrak{q}\frac{3(s-\sigma) + \mathfrak{r}\frac{-(\sigma+1)}{4}}{4}.$$
Zugleich findet sich $x - i = k - j$.

64.

Berechnung und Verwendung des Wochentags des 0. Tages eines Jahres.

Zur Berechnung der Wochentage h der einzelnen Tage d eines Jahres a nach Chr. ist die Kenntniß des Wochentages H, auf den der nullte Tag des Jahres trifft, oder nach welchem das Jahr anfängt, sehr ersprießlich. Er geht aus den voranstehenden Ausdrücken von h hervor, wenn $d = 0$ gesezt wird. Somit ist

1. im julianischen Kalender

mod 7

$$(102) \qquad H \equiv a + \mathfrak{Q}\frac{a}{4} - 2 \equiv a + \mathfrak{q}\frac{a-1}{4} - 2$$
$$\equiv 3a - 2\mathfrak{R}\frac{a}{4} - 2 \equiv 3a - 2\mathfrak{r}\frac{a-1}{4} + 3,$$

2. im gregorianischen Kalender, für $\sigma = \mathfrak{Q}\frac{a}{100}$,

mod 7

$$(103) \qquad H \equiv a + \mathfrak{Q}\frac{a}{4} - x - 2 \equiv a + \mathfrak{Q}\frac{a}{4} - \sigma + \mathfrak{q}\frac{\sigma}{4}$$
$$\equiv 3a - 2\mathfrak{R}\frac{a}{4} - x - 2 \equiv 3a - 2\mathfrak{R}\frac{a}{4} + \sigma - 2\mathfrak{r}\frac{\sigma}{4}$$

Benüzt man diese Hilfszahl H, so findet man, wie in §. 30, (39), in beiden Kalendern für den d^{ten} Tag des Jahres den Wochentag

$$h \equiv d + H, \text{ mod } 7.$$

Will man in dieser allgemeinen Darstellung des Wochentages h noch einen Schritt weiter gehen, und den d^{ten} Tag des Jahres als den t^{ten} Tag des m^{ten} Monates in Rechnung bringen; so kann man für d einen der Ausdrücke (84) oder (85) in §. 52 sezen, indem man für die Factoren 31 und 30 ihre Reste 3 und 2 nach dem Modul 7 einführt. Auf diese Weise erhält man, wofern i die Schalttage überhaupt andeutet,

mod 7

$$(104) \qquad h \equiv t + 3(m-1) - \mathfrak{q}\frac{5m+1}{12} - (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12} + H$$
$$\equiv t + 2(m-1) + \mathfrak{q}\frac{7m-2}{12} - (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12} + H.$$

Beisp. 1. Im Jahre 1843 ist $a = 1843 \equiv 3$, mod 4, $\equiv 2$, mod 7, und die Voreilung des gregor. Kalenders k oder $x = 12 \equiv -2$, mod 7,

daher fällt sein 0. Tag oder 0 Januar auf den Wochentag $H \equiv 6 - 6 + 2 - 2 \equiv 0$, mod 7, = Samstag. Das Jahr 1843 beginnt demnach im gregorianischen Kalender nach einem Samstage, folglich an einem Sonntage. In jedem solchen Jahre fällt, ohne Unterschied des Kalenders, der 0 August, wegen $t = 0$ und $m = 8$, auf den Wochentag $\equiv 2.7 + 4 - 2 + i \equiv 2 + i$, mod 7, also im Gemeinjahre auf einen Montag, und im Schaltjahre auf einen Dinstag. Somit trifft der 24 August auf den Wochentag $\equiv 24 + 2 + i \equiv 5 + i$ = Donnerstag im Gemeinjahre und Freitag im Schaltjahre.

Beisp. 2. Im Jahre 1800 = a war $a \equiv 1$, mod 7, $\mathrm{R}\frac{a}{4} = 4$, $\sigma = 17 \equiv 3$, $\mathrm{r}\frac{\sigma}{4} = 1$, also $H \equiv 3 - 8 + 3 - 2 \equiv 3$ = Dinstag. Dagegen wird im Jahre 1900 = a sein $a \equiv 3$, $\mathrm{R}\frac{a}{4} = 4$, $\sigma = 18 \equiv 4$, $\mathrm{r}\frac{\sigma}{4} = 2$, und $H \equiv 9 - 8 + 4 - 4 \equiv 1$ = Sonntag. Das Jahr 1800 fing also nach einem Dinstage, folglich am Mittwoch an, und das Jahr 1900 wird nach einem Sonntage, daher am Montage anfangen.

65.

Berechnung der Concurrenten.

Die Concurrente eines Jahres ist der Wochentag des 1 Septembers oder 24 März (§. 62). Bezeichnet man sie mit C, so hat man

1. im julianischen Kalender zu ihrer Bestimmung blos nöthig, in den Congruenzen (93), (94) und (95) $h = C$ und $d = 1$ September $= 244 + j \equiv -1 + j$, mod 7, oder $d = 24$ März $= 83 + j \equiv -1 + j$ zu sezen; und zu bedenken, daß nach der julianischen Einschaltung $j = \mathrm{q}\frac{a}{4} - \mathrm{Q}\frac{a}{4}$ ist. Man erhält dann aus (93)

$$C \equiv a + \mathrm{Q}\frac{a}{4} - 1 + \mathrm{q}\frac{a}{4} - \mathrm{Q}\frac{a}{4} - 2, \text{ mod } 7$$

oder

$$(105) \qquad C \equiv a + \mathrm{q}\frac{a}{4} - 3, \text{ mod } 7.$$

Z. B. Für das in dem Beispiele zu §. 50, 3. urkundlich angeführte Jahr 1152 findet man $a = 1152 \equiv 4$, mod 7, $\mathrm{q}\frac{a}{4} = 288 \equiv 1$, mod 7, daher $C \equiv 4 + 1 - 3 \equiv 2$, mod 7. Dies Jahr hat also in der That die Concurrentes II, wie die Urkunde anführt. Eben so richtig sind die Concurrentes in dem Beispiele zu §. 50, 2.

2. Im gregorianischen Kalender ist der 1 September neuen Styls der $1 - k$ September $= 32 - k$ August alten Styls, also $d = 1 - k$ Sept. $= (1 - k) + 243 + j \equiv -1 + j - k$; wo, was hier wichtig ist, j nach dem julianischen Kalender bestimmt

werden, folglich $j = \mathfrak{q}\frac{a}{4} - \mathfrak{Q}\frac{a}{4}$ sein muß. Oder auch der 1 Sept. ist im neuen Style der $d = 244 + i$ Tag, daher hat man für §. 63, II,

$$d - x \equiv -1 + i - x \equiv -1 + j - k.$$

Man findet dann die Concurrente eines Jahres nach dem neuen Styl

$$(106) \qquad C \equiv a + \mathfrak{q}\frac{a}{4} - k - 3, \text{ mod } 7,$$

worin $k = s - \mathfrak{q}\frac{s}{4} - 2 \equiv 2\mathfrak{r}\frac{s}{4} - s - 2$, mod 7 ist.

Vergleicht man die Concurrente C mit dem Wochentage H des nullten Januars, und beachtet sowohl obigen Ausdruck von j, als auch die Gleichung $i = j + x - k$; so findet man, nach den Ausdrücken (102) und (103), ohne Unterschied des Styls, durch Subtraction

$$H - C \equiv -i + 1, \text{ mod } 7;$$

wofern jeden Falls i die Anzahl der Schalttage des Jahres a vorstellt, nemlich das Jahr a im betreffenden Kalender i Schalttage enthält. Dann ist

$$(107) \qquad C \equiv H + i - 1, \text{ mod } 7$$

$$H \equiv C - i + 1, \text{ mod } 7.$$

Von der Richtigkeit dieser Ausdrücke überzeugt eine einfache Betrachtung der Tafel in §. 61, S. 161.

In Schaltjahren ist demnach $C = H$, nemlich der 1 September fällt auf denselben Wochentag wie der 0 Januar; in Gemeinjahren dagegen ist $C \equiv H - 1$, folglich fällt der 1 September auf den Wochentag, der vor jenem des 0 Januars unmittelbar hergeht.

66.

Berechnung des Sonntagsbuchstaben.

Sei L der Sonntagsbuchstabe des Jahres a nach Chr., nemlich derjenige Wochenbuchstabe, auf den im Gemeinjahre immer und im Schaltjahre nach dem Schalttage (24 Februar), also kurz nach dem 24 Februar oder 55. Tage des Jahres, die Sonntage treffen. Setzt man demnach in §. 60, (92) $d > 55$ voraus, so übergeht ν in L, daher ist allgemein

$$L \equiv d - i, \text{ mod } 7,$$

wofern nur auf den d^{ten} Tag des Jahres ein Sonntag fällt, und i die Schalttage desselben Jahres zählt.

Bezeichnet dagegen L_0 den nur im Schaltjahre bis zu dem Schalttage bestehenden ausnahmsweisen Sonntagsbuchstaben, auf welchen die Sonntage bis zu dem Schalttage treffen, so übergeht für $d \overline{\overline{<}} 55$ der Wochenbuchstabe ν in L_0, daher ist

$$L_0 \equiv d, \text{ mod } 7, \text{ für } d \overline{\overline{<}} 55,$$

wenn auf den d^{ten} Tag des Jahres ein Sonntag fällt [§. 60, (92)].

I. Im julianischen Kalender ist der Wochentag h des d^{ten} Tages im Jahre a, vermöge (93)

$$h \equiv a + Q\frac{a}{4} + d - 2, \text{ mod } 7.$$

Setzt man hierin h = Sonntag = 1, so erhält man alle jene Tage im Jahre, welche Sonntage sind,

$$d \equiv -\left(a + Q\frac{a}{4}\right) + 3, \text{ mod } 7.$$

Denkt man sich nun d > 55, so findet man

$$L \equiv -\left(a + Q\frac{a}{4}\right) - j + 3, \text{ mod } 7$$

und daher, weil $j = q\frac{a}{4} - Q\frac{a}{4}$ ist, den julianischen Sonntagsbuchstaben

$$(108) \qquad L \equiv -a - q\frac{a}{4} + 3, \text{ mod } 7.$$

Denkt man sich dagegen $d \leqq 55$, so erhält man den ausnahmsweisen Sonntagsbuchstaben

$$L_0 \equiv -a - Q\frac{a}{4} + 3, \text{ mod } 7.$$

Die Vergleichung beider gibt

$$L_0 - L \equiv q\frac{a}{4} - Q\frac{a}{4} \equiv j,$$

daher $\qquad L_0 \equiv L + j, \text{ mod } 7 \equiv L + q\frac{R\frac{a}{4}}{4};$

nemlich in Gemeinj. $L_0 = L$

und blos in Schaltj. $L_0 \equiv L + 1, \text{ mod } 7,$

wie es vermöge §. 60 sein muß.

Zur ferneren Verwandlung des Ausdruckes des Sonntagsbuchstaben bemerke man, daß wie in §. 63, (96)

$$q\frac{a}{4} \equiv 2a - 2r\frac{a}{4}, \text{ mod } 7$$

sein muß; daher ergibt sich

$$(109) \qquad L \equiv 2r\frac{a}{4} - 3a + 3, \text{ mod } 7.$$

Enthält die Jahrzahl a nebst s Hunderten noch α Einer, ist nemlich das Jahr a nach dem Schlusse des s^{ten} Jahrhunderts das α^{te} Jahr, oder $s = q\frac{a}{100}$ und $\alpha = r\frac{a}{100}$, so ist

$$a = 100s + \alpha,$$

daher $\qquad q\frac{a}{4} = 25s + q\frac{\alpha}{4}$

$$r\frac{a}{4} = r\frac{\alpha}{4}$$

und $\qquad a \equiv 2s + \alpha, \text{ mod } 7.$

Substituirt man diese Ausdrücke, so erscheint

$$(110)\qquad L \equiv -\alpha - q\frac{\alpha}{4} + s + 3, \text{ mod } 7$$

$$\equiv 2r\frac{\alpha}{4} - 3\alpha + s + 3, \text{ mod } 7.$$

Beisp. In einer Urkunde bei Pommeraye *) findet sich folgendes Datum: Actum est hoc Rodomo civitate anno ab Incarnatione D. N. I. C. MXI, indictione IX, littera VII, luna (epacta) XIV, XVII Calend. Octobrium. Nun ist für $a = 1011 \equiv 3$, mod 7, $q\frac{a}{4} = 252 \equiv 0$, $r\frac{a}{4} = 3$, also der Sonntagsbuchstabe $L \equiv -3 + 3$ oder $\equiv 6 - 9 + 3 \equiv 7 = G$, genau wie in der Urkunde.

II. Im gregorianischen Kalender ist in gleicher Weise der Sonntagsbuchstabe

$$L \equiv d - i, \text{ mod } 7,$$

wofern $d > 55$ ist und das betreffende Jahr a im gregorianischen Kalender i Schalttage zählt. Soll dieser Tag d ein Sonntag, also $h = 1$ sein, so muß man nach (98)

$$1 \equiv a + Q\frac{a}{4} + d - x - 2, \text{ mod } 7$$

folglich

$$d \equiv -a - Q\frac{a}{4} + x + 3, \text{ mod } 7$$

haben; dann ist

$$L \equiv -a - Q\frac{a}{4} + x - i + 3.$$

Nun fand sich aber in §. 63, II, $x - i = k - j$

und

$$j = q\frac{a}{4} - Q\frac{a}{4};$$

folglich ist der gregorianische Sonntagsbuchstabe

$$(111)\qquad L \equiv -a - q\frac{a}{4} + k + 3, \text{ mod } 7,$$

wobei k in den durch 400 untheilbaren Säcularjahren immer den vom 1 März a. St. an giltigen größeren Werth erhält; und nach den obigen Umstaltungen ist auch

$$(112)\qquad L \equiv 2r\frac{a}{4} - 3a + s - q\frac{s}{4} + 1, \text{ mod } 7$$

$$\equiv 2r\frac{a}{4} - 3a + 2r\frac{s}{4} - s + 1,$$

$$\equiv 2r\frac{\alpha}{4} - 3\alpha + 2r\frac{s}{4} + 1.$$

Ueberhaupt ist sofort

$$\text{gregor. Sonntagsbuchst.} \overset{\text{mod } 7}{\equiv} \text{julian. Sonntagsbuchst.} + k.$$

*) Histoire de l'Abbaye de Saint-Ouen de Rouen. P. I. p. 422.

Im gegenwärtigen Jahrhunderte ist $s = 18$, $k = 12$, also

$$L \equiv -a - q\tfrac{a}{4} + 1 \equiv 2r\tfrac{a}{4} - 3a + 1$$
$$\equiv 2r\tfrac{\alpha}{4} - 3\alpha - 2, \text{ mod } 7.$$
$$\equiv \text{jul. Sonntagsbuchst.} - 2.$$

Auf gleiche Art erfolgt auch der ausnahmsweise Sonntagsbuchstabe

$$L_0 \equiv d, \text{ mod } 7, \text{ für } d \stackrel{=}{<} 55;$$

daher wegen obigen Ausdrucks von d

$$L_0 \equiv -a - q\tfrac{a}{4} + x + 3, \text{ mod } 7.$$

Es ist demnach auch hier, übereinstimmig mit §. 60,

$$L_0 \equiv L + i, \text{ mod } 7.$$

Beisp. Welchen Sonntagsbuchstaben hatte das Jahr 1800 im n. St.? Hier ist $a = 1800 \equiv 1$, $q\tfrac{a}{4} = 450 \equiv 2$, $r\tfrac{a}{4} = 0$, $k = 12 \equiv -2$ $s = 18 \equiv 4$, $\alpha = 0$, $q\tfrac{s}{4} = 4$; daher $L \equiv -1 - 2 - 2 + 3$ oder $\equiv 0 - 3 + 4 - 4 + 1$ oder $\equiv 4 + 1$, also $\equiv 5 = E$.

Die Ausdrücke der gregorianischen Sonntagsbuchstaben

$$(113) \quad L \equiv -a - q\tfrac{a}{4} + k + 3, \text{ mod } 7$$
$$\equiv 2r\tfrac{a}{4} - 3a + s - q\tfrac{s}{4} + 1, \text{ mod } 7$$
$$\equiv 2r\tfrac{a}{4} - 3a + 2r\tfrac{s}{4} - s + 1$$

und
$$L_0 \equiv L + i$$

können ganz allgemein für beide Kalender, nemlich insbesondere auch für die julianischen Sonntagsbuchstaben gelten, wenn man $k = 0$ oder $s = 2$ und i die Zahl der Schalttage des Jahres a überhaupt sein läßt.

Endlich kann man noch allgemein

$$(114) \quad L \equiv 2r\tfrac{\alpha}{4} - 3\alpha + s + k + 3 \equiv -\alpha - q\tfrac{\alpha}{4} + s + k + 3, \text{ mod } 7$$

setzen, wenn wie immer

im neuen Style $\quad k \equiv 2r\tfrac{s}{4} - s - 2$, mod 7

und im alten Style $\quad k = 0$ gedacht wird.

67.

Zusammenhang des Sonntagsbuchstaben mit dem Wochentage des 0 Januars und mit der Concurrente.

Im julianischen Kalender fanden wir

$$H \equiv a + q\tfrac{a}{4} - 2, \text{ mod } 7$$
$$C \equiv a + q\tfrac{a}{4} - 3$$
$$L \equiv -a - q\tfrac{a}{4} + 3.$$

Addirt man die beiden ersten Congruenzen einzeln zur lezten und merkt, daß

$$q\frac{a}{4} - Q\frac{a}{4} = j$$

, so erscheint $H + L \equiv -j + 1, \bmod 7$
$C + L \equiv 0.$

Im gregorianischen Kalender dagegen zeigte sich

$$H \equiv a + Q\frac{a}{4} - x - 2, \bmod 7$$

$$C \equiv a + q\frac{a}{4} - k - 3,$$

$$L \equiv -a - q\frac{a}{4} + k + 3.$$

Addirt man auch hier die zwei ersten Congruenzen einzeln zur dritten und achtet nicht nur obigen Ausdruck von j, sondern auch noch die Gleichung

$$i = j + x - k,$$

erfolgt

$$(115)\qquad H + L \equiv -i + 1, \bmod 7$$
$$C + L \equiv 0.$$

Bezeichnet demnach i allgemein die Anzahl der Schalttage des Jahres a ich Chr., so ist ohne Unterschied des Kalenders

$$H + L \equiv -i + 1,\quad C + L \equiv 0, \bmod 7,$$

iher $H \equiv -L - i + 1,\quad C \equiv -L, \bmod 7$

ıd $L \equiv -H - i + 1,\quad L \equiv -C, \bmod 7.$

Sonach ergänzen der Sonntagsbuchstabe und der Wochentag des 0 Ja- ıars einander im Schaltjahre zu 7 oder ausnahmsweise, wenn jeder von ihnen ist, zu 14, im Gemeinjahre aber immer zu 8. Dagegen ergänzen sich der Sonntagsbuchstabe und die Concurrente in jedem Jahre zu dem nächst größeren lielfachen von 7, also gewöhnlich zu 7, oder zu 14, sobald jedes aus ihnen 7 ist.

Man kann demnach immer höchst leicht vom Sonntagsbuchstaben auf den Jochentag des 0 Januars oder auf die Concurrente, und umgekehrt von diesen ıf jenen übergehen; deswegen soll im Folgenden, so wie dies in der christ- hen Festrechnung üblich ist, nur der Sonntagsbuchstabe ausführlich betrachtet erden.

68.

Aenderung und periodische Wiederkehr der Sonntags- buchstaben.

nwendung derselben auf die Bestimmung der Sonntagsbuchstaben.

Da ein Gemeinjahr von 365 Tagen um einen Tag länger als 52 Wochen ;, so muß der lezte Tag desselben gerade so wie der erste mit dem Buch- ıben A bezeichnet werden. Dasselbe geschieht aber auch im Schaltjahre, weil

darin vom 1 März an alle Monatstage dieselben Buchstaben wie im Gemeinjahre erhalten. Bei einem jeden Jahrswechsel wiederholt sich demnach der Buchstabe A, nemlich am lezten Tage des endigenden und am ersten des anfangenden Jahres. Desgleichen wiederholt sich auch nach jedem Schalttage der Buchstabe F, nemlich am Schalttage, dem 24 Februar, und am nächst folgenden Tage, dem 25 Februar.

Nach einer jeden solchen Verdopplung des Wochenbuchstaben, mithin sowohl nach jedem Jahrswechsel, als auch nach jedem Schalttage, trifft daher auf jeden Wochentag, also auch insbesondere auf den Sonntag, nicht mehr derselbe Buchstabe wie vorher, sondern der ihm in der periodischen Wiederkehr zunächst vorangehende; oder der Sonntagsbuchstabe rückt in jedem solchen Falle um einen Buchstaben zurück, z. B. von C auf B, von B auf A, von A auf G, u. s. f. Der vom 1 März giltige, im engeren Sinne so genannte, Sonntagsbuchstabe tritt demnach von einem Jahre zum nächst folgenden um einen oder um zwei Buchstaben zurück, je nachdem dieses spätere ein Gemeinjahr oder Schaltjahr ist; z. B. von D im ersten Falle auf C, oder im zweiten Falle auf B.

Der Sonntagsbuchstabe würde alle 7 Jahre den Kreis der 7 Wochenbuchstaben durchwandern, wenn es keine Schalttage gäbe, die ihn um einen Buchstaben zurück schieben. Da aber

I. im julianischen Kalender

alle 4 Jahre ein Tag eingeschaltet wird, so können die Sonntagsbuchstaben nicht früher in der nemlichen Folge sich wiederholen, mithin die Wochentage in der nemlichen Ordnung wieder auf einerlei Monatstage treffen, als nach je 7 solchen 4jährigen Schaltperioden, also nach je 28 Jahren. Einen derartigen Zeitkreis nennt man aber, vermöge §. 49, II, einen Sonnenzyklus, und das jedesmalige Jahr desselben den Sonnencirkel. In diesem Kyklus hat man nun die Sonntagsbuchstaben so nach einander gereiht, daß das erste Jahr ein Schaltjahr ist, in welchem der erste Sonntag möglichst spät, also am 7 Januar eintritt, und daher der erste oder ausnahmsweise Sonntagsbuchstabe G, folglich der zweite oder eigentliche Sonntagsbuchstabe F ist. Die vollständige Anordnung des Sonnenkyklus zeigt nachfolgende Tafel, in der man die Zehner des Sonnencirkels aus der ersten Vertical-Columne mit seinen Einern aus der obersten Zeile zusammen zu lesen hat, und Schaltjahre an ihren zwei Sonntagsbuchstaben erkennt.

Julianischer Sonnenkyklus.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.	.	GF	E	D	C	BA	G	F	E	DC
10	B	A	G	FE	D	C	B	AG	F	E
20	D	CB	A	G	F	ED	C	B	A	.

Der so angeordnete Kyklus läßt sich höchst bequem zur **Bestimmung der Sonntagsbuchstaben** der Jahre **einer jeden Aere** gebrauchen, in der man die julianische vierjährige Einschaltung ununterbrochen anwendet; sobald man nur den Sonnencirkel des betreffenden Jahres zu bestimmen weiß, folglich die Jahre kennt, in denen der Sonnenkyklus sich erneuert und welche sonach Schaltjahre mit den Sonntagsbuchstaben GF sind. Soll in der gemeinen Aere a ein Schaltjahr sein, in welchem $L = F = 6$ ist, so hat man $r\frac{a}{4} = 0$, daher vermöge §. 66, (109) $6 \equiv -3a + 3$, mod 7, $-3a \equiv 3$ und $a \equiv -1$, mod 7. Die Jahrzahl a muß also durch 4 theilbar sein, und durch 7 getheilt -1 zum Reste geben. Nun ist, nach XX, (102), (104) der Vorbegr., $4\xi \equiv 1$, mod 7, folglich $\xi = 2$ und $a \equiv 4 . r\frac{-1.2}{7} \equiv 4 . 5 \equiv 20$, mod 28. Die Jahre nach Chr., in denen der Sonnenkyklus sich erneuert, geben demnach durch 28 getheilt 20 zum Reste, wie in §. 49, II angeführt und der Berechnung des Sonnencirkels zu Grunde gelegt wurde.

Um demnach zu einem Jahre n. Chr. den **julianischen Sonntagsbuchstaben** zu bestimmen, berechnet man vorerst nach §. 49, (70) den Sonnencirkel und entnimmt zu diesem aus der voranstehenden Tafel des julianischen Sonnenkyklus den Sonntagsbuchstaben.

Z. B. Das Jahr 1011 = a der Urkunde, in dem Beispiele zu §. 66, I, hat den Sonnencirkel $S \equiv 1011 + 9 \equiv 1020$, mod 28, also $S = 12$; mithin gibt die Tafel des julianischen Sonnenkyklus den Sonntagsbuchstaben G oder 7.

II. **Im gregorianischen Kalender**

stieß man während des Octobers 1582, ohne Unterbrechung des Zuges der Wochentage, 10 Monatstage sammt den ihnen alljährlich zukommenden Wochenbuchstaben aus; dadurch rückte auf jeden Wochentag, folglich auch auf den Sonntag, ein um 10 oder $r\frac{10}{7} = 3$ Stellen späterer Buchstabe. Der 4 October 1582, dem der Wochenbuchstabe D zukommt, war ein Donnerstag, und der 15te, dem der Wochenbuchstabe A zugehört, wurde nun ein Freitag; dadurch verwandelte sich der Sonntagsbuchstabe G dieses Jahres in C. Ferner merzt man in jedem durch 400 untheilbaren Säcularjahre den sonst gewöhnlichen Schalttag aus; dadurch unterbleibt die, sonst im julianischen Kalender bestehende, Zurückweichung des Sonntagsbuchstaben, folglich eilt der gregorianische Sonntagsbuchstabe dem julianischen jedesmal um eine Stelle vor. So wie demnach im Jahre a das gregorianische Datum dem julianischen um k Tage voreilt, eben so eilt auch der gregorianische Sonntagsbuchstabe dem julianischen um k oder $r\frac{k}{7}$ Stellen vor; es ist nemlich, wie bereits §. 66, II gefunden wurde,

gregor. Sonntagsbuchst. $\equiv$ julian. Sonntagsbuchst. $+ k$, mod 7.

Um demnach den gregorianischen Sonntagsbuchstaben zu finden, sucht man wie gewöhnlich den Sonnencirkel, dazu nach obiger Tafel den julianischen Sonntagsbuchstaben, addirt zu diesem (oder vielmehr zu seiner Nummer) die Voreilung des gregorianischen Kalenders und nimmt von der Summe den außerordentlichen Rest nach 7.

Z. B. Im Jahre 1700 war der Sonnencirkel $S \equiv 1709, \bmod 28 \equiv 1$, und sonach der julianische Sonntagsbuchstabe GF; da nun die Kalender-Differenz $k = 11 \equiv 4, \bmod 7$ war, so war der gregorianische Sonntagsbuchstabe $\equiv 6 + 4 \equiv 3, \bmod 7 = C$.

69.

Fortsezung. Rechnende Darstellung derselben Ergebnisse.

Zu den vorigen Ergebnissen gelangt man auch durch Betrachtung der allgemeinen arithmetischen Ausdrücke der Sonntagsbuchstaben (113) in §. 66. Denn ihre vollständigen Aenderungen sind, verm. Vorb. XVI, (70),

$$(116) \quad \Delta L = -\Delta a - \mathrm{q}\frac{\Delta a + \mathrm{r}\frac{a}{4}}{4} + \Delta k - 7\,\mathrm{Q}\frac{-\Delta a - \mathrm{q}\frac{\Delta a + \mathrm{r}\frac{a}{4}}{4} + \Delta k + L}{7}$$

$$= \pm\,\mathrm{r}\frac{\pm\left(2\Delta\mathrm{r}\frac{a}{4} - 3\Delta a + \Delta k\right)}{7} \equiv \Delta k + 2\Delta\mathrm{r}\frac{a}{4} - 3\Delta a, \bmod 7$$

und zugleich ist $\quad L \equiv L_0 - i,$

nemlich $\quad L = L_0$ für $i = 0$

und $\quad L \equiv L_0 - 1,$

also $\quad L = L_0 - 1$, oder $= L_0 + 6$ für $i = 1$.

Läßt man oben k ungeändert, also $\Delta k = 0$, was im julianischen Kalender immer, im gregorianischen dagegen blos während eines oder zweier Jahrhunderte Statt findet, so hat man

$$\Delta L \equiv -\Delta a - \mathrm{q}\frac{\Delta a + \mathrm{r}\frac{a}{4}}{4} \equiv 2\Delta\mathrm{r}\frac{a}{4} - 3\Delta a, \bmod 7.$$

Von einem Jahre zum andern ist $\Delta a = 1$, also

$$\Delta L = \Delta k - 1 - \mathrm{q}\frac{\mathrm{R}\frac{a+1}{4}}{4} - 7\,\mathrm{Q}\frac{L + \Delta k - 1 - \mathrm{q}\frac{\mathrm{R}\frac{a+1}{4}}{4}}{4} \equiv \Delta k - 1 - \mathrm{q}\frac{\mathrm{R}\frac{a+1}{4}}{4}, \bmod 7.$$

Für $\Delta k = 0$ und $\mathrm{r}\frac{a+1}{4} > 0$ ist $\Delta L = -1 - 7\,\mathrm{Q}\frac{L-1}{7} \equiv -1$, also $\Delta L = -1$, wenn $L > 1$, und $\Delta L = 6$, wenn $L = 1$; ist aber $\mathrm{r}\frac{a+1}{4} = 0$, so ist $\Delta L = -2 - 7\,\mathrm{Q}\frac{L-2}{4} \equiv -2$, daher $\Delta L = -2$, wenn $L > 2$, und $\Delta L = 5$ wenn $L = 2$ oder 1. Für $\Delta k = 1$ kann blos

$r\frac{a+1}{4} = 0$ sein, daher ist $\Delta L = -1 - 7q\frac{L-1}{4} \equiv -1$, namentlich $\Delta L = -1$, wenn $L > 1$ und $\Delta L = 6$, wenn $L = 1$.

So oft demnach $a + 1 \equiv 0$, mod 4 wird, ist $\Delta L \equiv 2$, sonst aber immer $\Delta L \equiv -1$, mod 7. Bei dem Uebergange auf ein Schaltjahr rückt also der Sonntagsbuchstabe um 2, sonst immer nur um einen Buchstaben zurück. Mithin ist allgemein, so lange $\Delta k = 0$ bleibt,

$$\Delta L \equiv -(1 + i), \text{ mod } 7,$$

wofern i die Zahl der Schalttage im späteren Jahre bedeutet. (§. 55.)

Sollen für $\Delta k = 0$ die Sonntagsbuchstaben periodisch wiederkehren, folglich $\Delta L = 0$ und $2\Delta r\frac{a}{4} - 3\Delta a \equiv 0$, mod 7 sein, so muß diese Congruenz unbedingt, d. h. ohne eine zwischen $\Delta r\frac{a}{4}$ und Δa bestehende Beziehung gelten, folglich eben so wohl $\Delta r\frac{a}{4} \equiv 0$, mod 7, als $\Delta a \equiv 0$, mod 7 sein. Die erste Bedingung reducirt sich, weil $r\frac{a}{4} < 4 < 7$ ist, auf $\Delta r\frac{a}{4} = 0$, also auch auf $\Delta r\frac{a}{4} \equiv 0$, mod $4 \equiv \Delta a$. Soll aber nicht blos $\Delta a \equiv 0$, mod 4, sondern auch $\Delta a \equiv 0$, mod 7, folglich die Aenderung der Jahrzahl a nicht blos durch 4, sondern auch durch 7 theilbar sein, so muß sie auch durch $4 . 7 = 28$ theilbar sein. So lange also k ungeändert bleibt — mithin bei der julianischen Einschaltung immer, bei der gregorianischen aber blos von einem Säcularjahre zum nächst folgenden, oder falls dieses durch 400 theilbar wäre, bis zum zweitfolgenden — wiederkehren die Sonntagsbuchstaben in 28jährigen Zeitkreisen oder Sonnenkykeln.

Kann man nun zu jedem Jahre a einer Aere das damit übereinstimmende S des Sonnenkyklus oder den Sonnencirkel allgemein angeben, so läßt sich auch der Sonntagsbuchstabe L durch diesen Sonnencirkel S bestimmen. In der gemeinen Aere z. B. ist vermöge §. 49, II,

(70) $S \equiv a + 9$, mod 28,

also $a \equiv S - 9$, mod 28;

daraus folgt $a \equiv S - 9, \text{ mod } 4 \equiv S - 1 \equiv R\frac{S}{4} - 1$

$a \equiv S - 9$, mod $7 \equiv S - 2$

und $a = 28\omega + S - 9$

daher $q\frac{a}{4} = 7\omega - 2 + q\frac{S-1}{4}$

$\equiv q\frac{S}{4} - 2$, mod 7.

Bringt man diese Ausdrücke in die Congruenzen §. 66, (118)

mod 7

$$L \equiv -a - q\frac{a}{4} + k + 3 \equiv 2r\frac{a}{4} - 3a + k + 3;$$

so erhält man

$$L \equiv -S + 2 - \not{Q}\frac{S}{4} + 2 + k + 3 \equiv 2\not{R}\frac{S}{4} - 2 - 3S + 6 + k + 3,$$

mithin den *Ausdruck des Sonntagsbuchstaben durch den Sonnencirkel*

$$(117)\quad L \equiv -S - \not{Q}\frac{S}{4} + k \equiv 2\not{R}\frac{S}{4} - 3S + k, \text{ mod } 7.$$

Insbesondere ist im *julianischen Kalender*, wegen $k = 0$,

$$(118)\quad L \equiv -S - \not{Q}\frac{S}{4} \equiv 2\not{R}\frac{S}{4} - 3S, \text{ mod } 7$$

und im *gregorianischen Kalender während des gegenwärtigen Jahrhunderts*, in welchem $k = 12 \equiv -2$, mod 7 ist,

$$L \equiv -\left(S + \not{Q}\frac{S}{4} + 2\right) \equiv 2\left(\not{R}\frac{S}{4} - 1\right) - 3S$$

$$\equiv 2\not{r}\frac{S-1}{4} - 3S, \text{ mod } 7.$$

Z. B. Im Jahre 1842 ist, vermöge §. 49, II, Beisp., der Sonnencirkel $S = 3$, daher der julianische Sonntagsbuchstabe $\equiv -3 \equiv 6 - 9 \equiv 4 = D$, und der gregorianische $\equiv -(3 + 2) \equiv 2(3 - 1) - 9 \equiv 4 - 9 \equiv 2 = B$.

70.

Fortsezung. Sprungweise Wiederkehr der Sonntagsbuchstaben.

Eine in analytischer Beziehung höchst interessante Untersuchung ist die Erforschung der zeitweisen Wiederkehr der Sonntagsbuchstaben, oder die *allgemeine arithmetische Bestimmung derjenigen Jahre, welche einen gewissen Sonntagsbuchstaben haben*, oder in denen überhaupt *auf einen bestimmten Monatstag ein gewisser Wochentag trifft.*

In den Congruenzen, welche bisher über den Zusammenhang der Wochentage mit den Jahren und ihren Tagen aufgestellt wurden, erscheint die Jahrzahl a nur in einer der Functionen

$$a + \not{q}\frac{a}{4}, \quad 3a - 2\not{r}\frac{a}{4} \quad \text{oder} \quad a + \not{Q}\frac{a}{4}, \quad 3a - 2\not{R}\frac{a}{4},$$

von denen die beiden lezteren, durch einfache Verwandlung der gewöhnlichen Theilungs-Charaktere in die außerordentlichen, aus den zwei ersteren hervorgehen. Sei nun U eine mit jenen Functionen nach dem Modul 7 congruente bekannte Zahl oder der, nach den Congruenzen ausgedrückte bekannte Werth jener Functionen, so ist

I. zuvörderst allgemein aus den einander gleich geltenden Congruenzen

$$a + \not{q}\frac{a}{4} \equiv 3a - 2\not{r}\frac{a}{4} \equiv U, \text{ mod } 7$$

die Zahl a zu suchen.

Nimmt man die erste Congruenz $a + q\frac{a}{4} \equiv U$, mod 7 und multiplicirt, indem man erwägt, daß diese Congruenz eigentlich nur den Zusammenhang zwischen den Resten der zu suchenden Zahl a nach den Theilern 4 und 7 ausdrückt, aus denen sie bestimmt werden soll, die beiden congruenten Zahlen und den Modul mit 4; so wird, vermöge Vorbegr. III, 12,

$$4a + 4q\frac{a}{4} \equiv 4U, \text{ mod } 28,$$

also wenn man hiezu

$$a = 4q\frac{a}{4} + r\frac{a}{4}$$

addirt,

$$5a \equiv 4U + r\frac{a}{4}, \text{ mod } 28.$$

Nun findet man
$$\begin{array}{ccccccccc} & 5 & & 1 & & 1 & & 2 & \\ 28 & : & 5 & : & 3 & : & 2 & : & 1, \\ -11 & + & 2 & - & 1 & + & 1 & & \end{array}$$
also $5. -11 \equiv 1$, mod 28;

daher ist, wenn man die vorige Congruenz mit -11 multiplicirt,

$$a \equiv -44U - 11r\frac{a}{4}, \text{ mod } 28$$

oder

$$(119) \qquad a \equiv 12U - 11r\frac{a}{4} \equiv 4r\frac{3U}{7} - 11r\frac{a}{4}, \text{ mod } 28.$$

Nimmt man dagegen die zweite Congruenz

$$3a - 2r\frac{a}{4} \equiv U, \text{ mod } 7,$$

so findet sich $3a \equiv U + 2r\frac{a}{4}$, mod 7

und $3. -2 \equiv 1$, mod 7,

folglich $a \equiv -2U + 3r\frac{a}{4}$, mod 7,

oder vielmehr $r\frac{a}{7} = r\dfrac{-2U + 3r\frac{a}{4}}{7}$,

welche Gleichung die Abhängigkeit des Restes der Zahl a nach 7 von ihrem Reste nach 4 ausspricht.

Soll aber eine Zahl x durch 4 getheilt ρ, und durch 7 getheilt ρ' zum Reste geben, so sucht man, vermöge Vorbegr. XX, (111) und (112), zuerst ξ und ξ' aus

$$7\xi \equiv 1, \text{ mod } 4 \quad \text{und} \quad 4\xi' \equiv 1, \text{ mod } 7$$

und setzt ihre Werthe $\xi = -1$ und $\xi' = 2$ in die Congruenz

$$x \equiv 7r\frac{\xi\rho}{4} + 4r\frac{\xi'\rho'}{7}, \text{ mod } 28;$$

wornach man $x \equiv 7r\frac{-\rho}{4} + 4r\frac{2\rho'}{7}$, mod 28 erhält.

Im gegenwärtigen Falle ist $x = a$, $\rho = r\frac{a}{4}$

und $$\rho' = r\frac{a}{7} = r\frac{-2U + 3r\frac{a}{4}}{7},$$

folglich $$a \equiv 7r\frac{-a}{4} + 4r\frac{-4U + 6r\frac{a}{4}}{7}, \text{ mod } 28,$$

$$\equiv 7r\frac{-a}{4} + 4r\frac{3U - r\frac{a}{4}}{7}, \text{ mod } 28,$$

und sonach gerade wie oben

(119) $$a \equiv 12U - 11r\frac{a}{4} \equiv 4r\frac{3U}{7} - 11r\frac{a}{4}, \text{ mod } 28.$$

Setzt man noch zur Abkürzung

(120) $$-11r\frac{a}{4} \equiv 17r\frac{a}{4} \equiv \mathfrak{a}, \text{ mod } 28,$$

so erhält man für $r\frac{a}{4} = 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3$

die Werthe $\mathfrak{a} \equiv 0$ oder 28, 17 o. -11, 6 o. -22, 23 o. -5,

und die Jahrzahl

(121) $$a \equiv 12U + \mathfrak{a} \equiv 4r\frac{3U}{7} + \mathfrak{a}, \text{ mod } 28.$$

Aus den Congruenzen

$$a + r\frac{a}{4} \equiv 3a - 2r\frac{a}{4} \equiv U, \text{ mod } 7$$

findet man demnach die Zahl a

(119) $a \equiv 12U - 11r\frac{a}{4} \equiv 4r\frac{3U}{7} - 11r\frac{a}{4}$, mod 28, für $r\frac{a}{4} = 0, 1, 2, 3$

oder

(121) $a \equiv 12U + \mathfrak{a} \equiv 4r\frac{3U}{7} + \mathfrak{a}$, mod 28, für $\mathfrak{a} \equiv 0, -11, -22, -5$,

oder $\mathfrak{a} \equiv 0,\quad 17,\quad 6,\quad 23.$

Sucht man noch den Abstand zweier in der natürlichen Reihe möglichst nahe nach einander folgenden Jahre, bei denen die Zahl U die nemliche ist, so hat man $\Delta U = 0$, daher

$$\Delta a \equiv \Delta\mathfrak{a} \equiv -11\,\Delta r\frac{a}{4}, \text{ mod } 28.$$

Nun ist $$\Delta r\frac{a}{4} = \mp 3, \mp 2, \mp 1, 0,$$

folglich $$\Delta a \equiv \Delta\mathfrak{a} \equiv \pm 5, \mp 6, \pm 11, 0, \text{ mod } 28,$$

weil hier die möglich kleinsten Reste zu nehmen sind, damit die Jahre möglichst bald nach einander kommen können. Es kann demnach blos um 5, oder 6, oder $5 + 6 = 11$ Jahre später zum ersten Male wieder derselbe Werth von U, also auch derselbe Sonntagsbuchstabe, die nemliche Concurrente, oder der nemliche Wochentag an einem bestimmten Monatstage eintreffen.

Man erleichtert sich die Rechnung ungemein, wenn man sich folgen
Tafel bedient, welche bis zunächst über 100 oder in einem Jahrhunderte j
Jahre a in einerlei Vertical-Columne zusammen stellt, denen in obigen C
gruenzen der nemliche Werth von U zukommt.

Tafel 1.

Werthe von U						
0	1	2	3	4	5	6
Jahre a						
0	1	2	3	9	4	5
6	7	13	8	15	10	11
17	12	19	14	20	21	16
23	18	24	25	26	27	22
28	29	30	31	37	32	33
34	35	41	36	43	38	39
45	40	47	42	48	49	44
51	46	52	53	54	55	50
56	57	58	59	65	60	61
62	63	69	64	71	66	67
73	68	75	70	76	77	72
79	74	80	81	82	83	78
84	85	86	87	93	88	89
90	91	97	92	99	94	95
101	96	103	98	104	105	100
107	102	108	109	110	111	106
112	113	114	115	121	116	117

Berechnet man demnach für einen gewählten Werth von $R\frac{a}{4}$ oder a
zugehörige Jahr a, so haben alle mit diesem in einerlei verticaler Spa
befindlichen Jahre desselben Jahrhunderts den nemlichen Werth von U. Ble
dieser Werth auch im nachfolgenden Jahrhunderte giltig, so gibt das Ende
nemlichen Spalte der Tafel auch noch die ersten Jahre dieses nächsten Ja
hunderts an; zu denen dann leicht aus derjenigen Spalte, in der sie am A
fange vorkommen, die übrigen Jahre entnommen werden können.

II. Nun läßt sich die Auflösung der Congruenzen

$$a + Q\frac{a}{4} \equiv 3a - 2R\frac{a}{4} \equiv U, \text{ mod } 7$$

höchst leicht angeben. Man hat nemlich blos in den Auflösungen der beid
früheren Congruenzen $r\frac{a}{4}$ in $R\frac{a}{4}$ zu verwandeln, und erhält sofort

(122) $a \equiv 12U - 11R\frac{a}{4} \equiv 4r\frac{3U}{7} - 11R\frac{a}{4}$, mod 28, für $R\frac{a}{4} = 1, 2, 3$

oder

(123) $a \equiv 12U + \mathfrak{A} \equiv 4r\frac{3U}{7} + \mathfrak{A}$, mod 28, für $\mathfrak{A} \equiv 17, \quad 6, \quad 23, \quad 1$

oder $\equiv -11, -22, -5, -$

Da auch $\Delta R\frac{a}{4} = \mp 3, \mp 2, \mp 1, 0$ ist, so wiederkehrt auch hi
frühestens nach 5, 6 oder 11 Jahren jeder bestimmte Werth von U.

Zur Vereinfachung der Rechnung kann man auch hier in folgender Ta
die Jahre eines Jahrhunderts oder nur wenig darüber in Vertical-Column
zusammen stellen, denen in obigen Congruenzen einerlei Werth von U zukomm

Tafel 2.

Werthe von U						
0	1	2	3	4	5	6
Jahre a						
6	1	2	3	4	10	0
12	7	8	14	9	16	5
17	18	13	20	15	21	11
23	24	19	25	26	27	22
34	29	30	31	32	38	28
40	35	36	42	37	44	33
45	46	41	48	43	49	39
51	52	47	53	54	55	50
62	57	58	59	60	66	56
68	63	64	70	65	72	61
73	74	69	76	71	77	67
79	80	75	81	82	83	78
90	85	86	87	88	94	84
96	91	92	98	93	100	89
101	102	97	104	99	105	95
107	108	103	109	110	111	106
118	113	114	115	116	122	112

Der Gebrauch dieser Tafel stimmt mit jenem der früheren ganz überei

71.

Fortsezung. Betrachtung besonderer Fälle.

Wendet man das gefundene Rechnungsverfahren auf die im Früheren behandelten Bestimmungen an, und sucht man

I. diejenigen Jahre a, in denen ein bezeichneter Tag d auf einen angegebenen Wochentag h trifft, so hat man vermöge §. 68, (98) und (99)

im gregorianischen Kalender

$$a + \mathfrak{Q}\frac{a}{4} \equiv h - d + x + 2$$

$$\equiv h - d + \sigma - \mathfrak{q}\frac{\sigma}{4} \equiv h - d - \sigma + 2\mathfrak{r}\frac{\sigma}{4} \equiv U, \bmod 7,$$

daher nach (123)

$$(124) \quad a \equiv 4\mathfrak{r}\frac{3(h-d+x)-1}{7} + \mathfrak{A} \equiv 4\mathfrak{r}\frac{3\left(h-d+\sigma-\mathfrak{q}\frac{\sigma}{4}\right)}{7} + \mathfrak{A}$$

$$\equiv 4\mathfrak{r}\frac{3\left(h-d-\sigma+2\mathfrak{r}\frac{\sigma}{4}\right)}{7} + \mathfrak{A}, \bmod 28$$

$$\mathfrak{A} \equiv 17, \quad 6, \quad 23, \quad 12, \bmod 28$$

$$\equiv -11, -22, -5, -16$$

für $a \equiv 1, \quad 2, \quad 3, \quad 0, \bmod 4.$

Doch ist hiebei a blos in demjenigen Jahrhunderte oder für jenen Werth von $\sigma = \mathfrak{Q}\frac{a}{100}$ zu nehmen, in welchem die gegebene Kalender-Differenz x besteht. Dabei dient es, in jedem Jahrhunderte ein durch 28 theilbares Jahr, am besten das früheste zu kennen, als:

1568; 1624, 1708, 1820, 1904, 2016, 2100, 2212, 2324,

und so immer um 700 später. Man hat dann dazu nur noch die sich ergebenden 4 Reste von a nach dem Modul 28 zu addiren.

Im julianischen Kalender ist nur $x = 0$ oder $\sigma = 2$ zu sezen, daher erhält man, ohne weitere Rücksicht auf das Jahrhundert,

$$(125) \quad a \equiv 4\mathfrak{r}\frac{3(h-d)-1}{7} + \mathfrak{A}, \bmod 28.$$

Soll das Jahr einem gewissen Jahrhunderte angehören, so bemerke man, daß in den nach einander folgenden Jahrhunderten die frühesten durch 28 theilbaren Jahre nachstehende sind:

112, 224, 308, 420, 504, 616, 700,
812, 924, 1008, 1120, 1204, 1316, 1400,
1512, 1624, 1708, 1820, 1904, 2016, 2100,

und so immer um 700 weiter.

Sucht man das Jahr $\alpha = R\frac{a}{100}$ nach verflossenen $\sigma = Q\frac{a}{100}$ Jahrhunderten oder im $\sigma + 1^{\text{ten}}$ Jahrhunderte, so hat man im gregorianischen Kalender, nach §. 63, (101),

$$\alpha + Q\frac{\alpha}{4} \equiv h - d + 2r\frac{\sigma}{4} \equiv U, \text{ mod } 7,$$

folglich vermöge (123),

$$(126) \qquad \alpha \equiv 4r\frac{3(h-d) - r\frac{\sigma}{4}}{7} + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28,$$

im julianischen Kalender dagegen, gemäß §. 63, I.,

$$\alpha + Q\frac{\alpha}{4} \equiv h - d + \sigma + 2 \equiv U, \text{ mod } 7,$$

mithin

$$(127) \qquad \alpha \equiv 4r\frac{3(h-d+\sigma)-1}{7} + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28$$

und jeden Falls $\qquad a = 100\sigma + \alpha.$

Beisp. In welchen Jahren ist der 15 October ein Sonntag?

Hier ist 15 Oct. $= d = 288 + i \equiv 1 + i$, mod 7 und $h =$ Sonntag $= 1$, also $h - d \equiv -i$, mod 7. Demnach ist

im julianischen Kalender

$$a \equiv 4r\frac{-(3i+1)}{7} + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28.$$

Für Gemeinjahre ist $i = 0$, $\mathfrak{A} = 17, 6, 23$, also $a \equiv 13, 2, 19$, mod 28 und für Schaltjahre $i = 1$, $\mathfrak{A} = 12$, also $a \equiv 24$, mod 28.

Verlangt man die Jahre des gegenwärtigen 19. Jahrhunderts, so sind diese Werthe von a, vermöge des eben Gefundenen, zu 1820 zu addiren, nemlich es ist

$$a \equiv 1820 + (13, 2, 19, 24), \text{ mod } 28, \text{ oder}$$

$$a \equiv 1805, 1822, 1811, 1816 \text{ u. s. f., mod } 28,$$

wie in §. 70, Taf. 1, Spalte $U \equiv 6$.

Im letzteren Falle kann man auch $\sigma = 18 \equiv -3$, mod 7 sezen und erhält

$$\alpha \equiv 4r\frac{-3(i+1)}{7} + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28.$$

Für $i = 0$ ist $\mathfrak{A} = 17, 6, 23$, mithin $\alpha \equiv 16 + \mathfrak{A} \equiv 5, 22, 11$;
für $i = 1$ aber $\mathfrak{A} = 12$, folglich $\alpha \equiv 4 + 12 \equiv 16$.

Im alten Style fällt demnach ein Sonntag auf den 15 October, während des jezigen Jahrhunderts in den Jahren 1805, 1811, 1816, 1822, 1833, 1839, 1844, 1850, u. s. f. in §. 70, Taf. 1, Spalte $U \equiv 6$.

Im gregorianischen Kalender dagegen ist, für das laufende Jahrhundert, $\sigma = 18 \equiv -3$, mod $7 \equiv 2$, mod 4, also

$$a \equiv 4r\frac{-3i}{7} + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28.$$

Wenn $i = 0$, ist $\mathfrak{A} = 17, 6, 23$, also $a \equiv \mathfrak{A} \equiv 17, 6, 23$; wenn aber $i = 1$, wird $\mathfrak{A} = 12$, daher $a \equiv -12 + 12 \equiv 0$. Das früheste durch 28 theilbare Jahr dieses Jahrhunderts ist 1820, daher

$$a \equiv 1820 + (0, 6, 17, 23), \text{ mod } 28, \text{ oder}$$

$$a \equiv 1809, 1815, 1820, 1826, \text{ u. s. f., mod } 28,$$

wie in §. 70, Taf. 1, Spalte $U \equiv 4$.

Berechnet man das Jahr α, so hat man

$$\alpha \equiv 4\,r\frac{-(3i+2)}{7} + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28,$$

daher für $i = 0$, ist $\mathfrak{A} = 6, 17, 23$, also $\alpha \equiv 20 + \mathfrak{A} \equiv 26, 9, 15$
und für $i = 1$, ist $\mathfrak{A} = 12$, folglich $\alpha \equiv 8 + 12 = 20$.

Im neuen Kalender trifft demnach der 15 October auf einen Sonntag, während des 19. Jahrhunderts, in den Jahren 1809, 1815, 1820, 1826, 1837, 1843, 1848, u. s. f. in §. 70, Taf. 1, Spalte $U \equiv 4$.

II. Verlangt man diejenigen Jahre, in denen der 0 Januar auf einen bezeichneten Wochentag H fällt; so hat man, in dem eben Gefundenen, $d = 0$ und $h = H$ zu setzen. Somit ist im gregorianischen Kalender

$$(128) \quad a \equiv 4\,r\frac{3(H+x)-1}{7} + \mathfrak{A} \equiv 4\,r\frac{3\left(H-\sigma+2\,r\frac{\sigma}{4}\right)}{7} + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28$$

$$\alpha \equiv 4\,r\frac{3H - r\frac{\sigma}{4}}{7} + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28;\ a = 100\sigma + \alpha;$$

dagegen im julianischen Kalender

$$(129) \quad a \equiv 4\,r\frac{3H-1}{7} + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28$$

$$\alpha \equiv 4\,r\frac{3(H+\sigma)-1}{7} + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28;\ a = 100\sigma + \alpha,$$

jeden Falls aber $\mathfrak{A} \equiv 17, 6, 23, 12 \equiv -11, -22, -5, -16$.

III. Sucht man die Jahre, denen eine gewisse Concurrente C zukommt, oder in denen der 24 März und 1 September auf den Wochentag C fällt; so ist im gregorianischen Kalender, vermöge §. 65, (106),

$$a + r\frac{a}{4} \equiv C + k + 3, \text{ mod } 7 \equiv U,$$

daher nach (121)

$$(130) \quad a \equiv 4\,r\frac{3(C+k)+2}{7} + \mathfrak{a}, \text{ mod } 28;\ \mathfrak{a} \equiv 0, 17, 6, 23;$$

dagegen ist im julianischen Kalender $k = 0$, folglich

$$(131) \quad a \equiv 4\,r\frac{3C+2}{7} + \mathfrak{a}, \text{ mod } 28;\ \mathfrak{a} \equiv 0, 17, 6, 23.$$

IV. Werden jene Jahre gesucht, denen ein gewisser Sonntagsbuchstabe L angehört, so findet man aus (113) im gregorianischen Kalender

$$a + \mathrm{q}\frac{a}{4} \equiv -L + k + 3 \equiv -L + s - \mathrm{q}\frac{s}{4} + 1$$

$$\equiv -L + 2\mathrm{r}\frac{s}{4} - s + 1 \equiv U, \bmod 7,$$

daher das Jahr

$$(132) \quad a \equiv 4\mathrm{r}\frac{3(k-L)+2}{7} + \mathfrak{a} \equiv 4\mathrm{r}\frac{3(-L+s-\mathrm{q}\frac{s}{4}+1)}{7} + \mathfrak{a}$$

$$\equiv 4\mathrm{r}\frac{3(-L+2\mathrm{r}\frac{s}{4}-s+1)}{7} + \mathfrak{a}, \bmod 28;$$

oder zu Folge (114)

$$\alpha + \mathrm{q}\frac{\alpha}{4} \equiv -L + s + k + 3 \equiv -L + 2\mathrm{r}\frac{s}{4} + 1 \equiv U, \bmod 7,$$

folglich das Jahr

$$(133) \quad \alpha \equiv 4\mathrm{r}\frac{3(-L+s+k+3)}{7} + \mathfrak{a} \equiv 4\mathrm{r}\frac{-\mathrm{r}\frac{s}{4} - 3(L-1)}{7} + \mathfrak{a}, \bmod 28;$$

$$\mathfrak{a} = 0, 17, 6, 23;$$

$$a = 100s + \alpha.$$

Im julianischen Kalender dagegen ist $k = 0$, $s = 2$ in den Ausdrücken von a oder blos $k = 0$ in dem Ausdrucke von α zu sezen, daher ist das geforderte Jahr

$$(134) \quad a \equiv 4\mathrm{r}\frac{-3L+2}{7} + \mathfrak{a}, \bmod 28, \text{ oder}$$

$$\alpha \equiv 4\mathrm{r}\frac{3(-L+s)+2}{7} + \mathfrak{a}, \bmod 28; \ \mathfrak{a} \equiv 0, \ 17, \ 6, \ 23.$$
$$-11, -22, -5.$$

$$a = 100s + \alpha.$$

Beispiel. Man suche die Jahre des 19. Jahrhunderts n. Chr., die den Sonntagsbuchstaben $B = 2$ haben. Hier ist $L = 2$, $s = 18 \equiv -3$, mod $7 \equiv 2$, mod 4; folglich im gregorianischen Kalender

$$a \equiv 1820 + 4\mathrm{r}\frac{3(-2+4+3+1)}{7} + \mathfrak{a} \equiv 1820 - 12 + \mathfrak{a}$$

$$\equiv 1808 + \mathfrak{a}, \bmod 28; \ \mathfrak{a} = 0, 17, 6, 23,$$

nemlich $a = 1803, 1808, 1814, 1825$ u. s. f.,

in §. 70, Taf. 1, Spalte $U \equiv 3$,

oder auch $\alpha \equiv 4\mathrm{r}\frac{-2-3.1}{7} + \mathfrak{a} \equiv 8 + (0, 17, 6, 23), \bmod 28$

$$\equiv 8, 25, 14, 3, \text{ und}$$

$a = 1803, 1808, 1814, 1825$ u. s. f. wie früher.

Im julianischen Kalender aber ist

$$a \equiv 4r\frac{-6+2}{7} + \mathfrak{a} \equiv 12 + \mathfrak{a} \equiv (12, 1, 18, 7) + 1820$$
$$\equiv 1804, 1821, 1810, 1827 \text{ u. s. f.},$$

in §. 70, Taf. 1, Spalte $U \equiv 5$,

oder $$\alpha \equiv 4r\frac{3(-2-3)+2}{7} + \mathfrak{a} \equiv 4 + \mathfrak{a} \equiv 4, 21, 10, 27, \text{ und}$$
$$a = 1804, 1810, 1821, 1827 \text{ u. s. f. wie vorher.}$$

Ist das Jahrhundert gegeben, und will man sich der Tafel 1 in §. 70 bedienen, so genügt es $\mathfrak{a} = 0$ zu setzen, und sonach das früheste durch 4 theilbare Jahr α dieses Jahrhunderts zu suchen, dem der angegebene Sonntagsbuchstabe zukommt. Man findet im neuen Style

$$(185) \qquad \alpha = 4r\frac{3(-L+1)-r\frac{s}{4}}{7}$$

und im alten Style

$$(186) \qquad \alpha = 4r\frac{3(-L+s)+2}{7}.$$

Zu diesem Jahre gibt dann diejenige Spalte der Tafel 1 des §. 70, in welcher es vorkommt, noch alle übrigen Jahre des angegebenen Jahrhunderts, denen gleichfalls derselbe Sonntagsbuchstabe zukommt.

Um ohne alle Rechnung zu einem Jahre n. Chr. den (nach dem Schalttage geltenden) Sonntagsbuchstaben, oder umgekehrt zu einem Sonntagsbuchstaben die Jahre, denen er zukommt, zu bestimmen, dient die nunmehr leicht verständliche Tafel 1 im Anhange, welche sich auch noch für spätere Jahrhunderte, als in ihr eingetragen sind, benützen läßt, wenn man die gegebene Zahl der Jahrhunderte im julianischen Kalender, so lange um 7, im gregorianischen um 4 verringert, bis man den Rest in der Tafel findet.

Anmerkung. Die allgemeine Berechnung der Jahre, die einen gewissen Sonntagsbuchstaben besitzen, lieferte der Verfasser der erste in Crelle's Journal für die Mathematik, Berlin 1828, 3. B., S. 338 — 342.

V. Frägt man um jene Sonnencirkel, denen ein gewisser Sonntagsbuchstabe entspricht, so findet man aus (117)

$$S + Q\frac{S}{4} \equiv -L + k, \text{ mod } 7 \equiv U,$$

im gregorianischen Kalender

$$(137) \qquad S \equiv 4r\frac{3(-L+k)}{7} + , \mathfrak{A} \text{ mod } 28$$

und im julianischen Kalender, für $k = 0$,

$$(138) \qquad S \equiv 4r\frac{-3L}{7} + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28; \quad \mathfrak{A} \equiv 17, 6, 23, 12.$$

72.

Verwendung der Sonntagsbuchstaben zur Berechnung der Wochentage, auf welche die Jahrs- oder Monatstage treffen.

Der Sonntagsbuchstabe ist eine jedem Jahre eigenthümlich zukommende Hilfszahl, welche, vermöge §. 60, das Datum des ersten Sonntags, oder in Schaltjahren des ersten Samstages im Jahre angibt. Sobald aber der Wochentag, welcher auf einen gewissen Monatstag, oder ein Monatstag, auf den ein bezeichneter Wochentag trifft, festgestellt ist; kann auf jeden Tag des Jahres nur ein bestimmter Wochentag treffen. Mithin bestimmt der jedesmalige Sonntagsbuchstabe auch den Wochentag jedes Jahrs- und Monatstages. Soll dies allgemein durch Rechnung geschehen, so hat man aus den Congruenzen

$$(98) \qquad h \equiv a + Q\frac{a}{4} + d - x - 2, \text{ mod } 7$$

$$(111) \qquad L \equiv - a - q\frac{a}{4} + k + 3, \text{ mod } 7$$

das Jahr a zu eliminiren, folglich diese Congruenzen sammt der Gleichung

$$j = q\frac{a}{4} - Q\frac{a}{4}$$

zusammen zu fassen, wornach man

$$L + h + j \equiv b + k - x + 1, \text{ mod } 7$$

erhält. Addirt man dazu noch (§. 63, II) die Gleichung

$$i = j + x - k,$$

welche die Zahl i der gregorianischen Schalttage ausdrückt, so gewinnt man die Congruenz

$$(139) \qquad L + h + i \equiv d + 1, \text{ mod } 7.$$

Diese einfache und höchst wichtige Congruenz drückt den Zusammenhang aus, in welchem überhaupt in beiden Kalendern der Sonntagsbuchstabe L, die Nummer d eines Jahrstages, die Anzahl i der ihm vorangehenden Schalttage und der auf ihn treffende Wochentag h stehen. Sie ergibt sich leichter, wenn man, erwägend daß gemäß §. 60 und 66 auf den $L_0 = L + i^{ten}$ Tag im Jahre der erste Sonntag fällt, in Vorbegr. XVIII, (83) setzt $t = 7$, $N = L + i$, $P =$ Sonntag $= 1$, $n = d$, $p = h$. Aus ihr läßt sich zunächst jede der vorkommenden Zahlen außer i durch die beiden übrigen bestimmen; was zu dreierlei Fragen oder Aufgaben Anlaß gibt.

Zuvörderst soll der Wochentag h berechnet werden. Dafür liefert obige Congruenz den Ausdruck

$$(140) \qquad h \equiv d - i - L + 1, \text{ mod } 7.$$

Ist der Tag d, dessen Wochentag man sucht, der t^{te} Tag im m^{ten} Monate, so kann man für d den Ausdruck aus §. 52, (84) einführen und erhält

$$(141) \qquad h \equiv t + 3(m - 1) - q\frac{5m + 1}{12} - (2 - i)\,q\frac{m + 9}{12} - i - L + 1.$$

Für die einzelnen Monate ergeben sich folgende Ausdrücke der Wochentage, oder vielmehr der mit dem Wochentage nach dem Modul 7 congruenten Zahlen, von denen daher nach dem Theiler 7 der außerordentliche Rest zu nehmen ist, um den Wochentag selbst zu erhalten.

	Monat	Wochentag des t^{ten} Monatstages.
1)	Januar	$t-L+1-i$
2)	Februar	$t-L-3-i$
3)	März	$t-L-3$
4)	April	$t-L$
5)	Mai	$t-L+2$
6)	Juni	$t-L-2$
7)	Juli	$t-L$
8)	August	$t-L+3$
9)	September	$t-L-1$
10)	October	$t-L+1$
11)	November	$t-L-3$
12)	December	$t-L-1$.

Beispiel 1. Karl IX, König von Frankreich, befahl auf Anstiftung seiner Mutter, Katharina von Medicis, die heimliche Ermordung sämmtlicher Hugenotten seines Reiches. Diese schreckliche, unter dem Namen »Pariser Bluthochzeit" berüchtigte Gräuelthat wurde in der Nacht nach dem Bartholomäustage, also vom 24 auf den 25 August 1572 an dem größten Theile dieser Glaubenssecte verübt. Auf was für einen Wochentag fiel dieses Bartholomäusfest?

Hier ist $a = 1572 \equiv 0$, mod 4, $i = 1$, $d = 24$ Aug. $= 213 + 24 = 237 \equiv -1$, mod 7, ferner $a \equiv 4$, mod 7, folglich vermöge §. 66, (109) der Sonntagsbuchstabe des Jahres $L \equiv 0 - 12 + 3 \equiv 5 = E$. Daraus folgt $h \equiv -1 - 1 - 5 + 1 \equiv 1 =$ Sonntag. Der Bartholomäustag (24 Aug.) 1572 fiel demnach auf einen Sonntag.

Beispiel 2. In J. Chr. Lünig's teutschem Reichsarchiv, Leipzig, 1713, 24 Thle, Fol., 7. Band, Anhang, S. 233, LI, heißt es am Schlusse des im Jahre 1549 von König Heinrich II von Frankreich mit den Kantonen der Schweiz geschlossenen Allianz-Tractates: Fait par nous le vendredi septième jour de mois de juin. Eben daselbst, S. 238, LIII, findet sich der erneuerte Bund König Karl's IX, welcher Donnerstags den 7 December 1564 von den Schweizern und Samstags den 12 Juli 1565 von dem Könige unterzeichnet wurde. Sind diese Wochentage und Monatstage richtig angegeben?

Für a = 1549 ist a ≡ 1, mod 4, i = 0, a ≡ 2, mod 7, also L ≡ 2 — 6 + 3 ≡ 6 = F. Ferner ist d = 7 Juni = 7 + 151 = 158 ≡ 4, mod 7, also h ≡ 4 — 6 + 1 ≡ 6 = Freitag, nemlich der 7 Juni 1549 wirklich ein Freitag, wie angeführt wird. Zu a = 1564 gehört i = 1, L ≡ 2. 0 — 3. 3 + 3 ≡ 1 = A, daher nach der voran stehenden Tafel der 7 December 1564 der Wochentag 7 — 1 — 1 = 5, nemlich ein Donnerstag, wie angegeben wird. Zu a = 1565 endlich gehört L ≡ 2. 1 + 3. 3 + 3 ≡ 7 = G, mithin ist nach derselben Tafel der 12 Juli 1565 der Wochentag 5 oder ein Donnerstag, nicht aber ein Samstag, wie Lünig's Urkunde angibt. Mit demselben Fehler erscheint das Datum der Urkunde auch in dem **Corps universel diplomatique du droit des gens par J. Du Mont; à Amsterdam, 1726 — 31, 8 Tomes, Fol., tome 5e, part. 1, pag. 131.** Allein in dem **Recueil des traitéz de paix, de trève etc., faits par les rois de France avec tous les princes de l'Europe par Fréd. Leonard; à Paris, 1693, tome 4e**, findet sich das Datum also angeführt: **le samedy 21. jour de juillet l'an 1565**; und in der That ist der 21 Juli, weil der 12 Juli ein 5ter Wochentag ist, ein 5 + 21 — 12 ≡ 7ter Wochentag oder Samstag. Die königliche Ratification hatte demnach am 21 Juli 1565 Statt.

Beispiel 3. In demselben Werke von Lünig, 7. Band, Artikel: Oesterreich, Seite 38, ist der Heirats-Contract zwischen Ludwig, nachmaligem König von Ungarn und Böhmen, und der Prinzessin Maria, Tochter König Philipp's I. von Spanien, dann zwischen dem Erzherzoge Ferdinand I. von Oesterreich und der Prinzessin Anna, Tochter König Wladislaw's von Ungarn und Böhmen, abgedruckt und datirt: **in Civitate Vienna, dominica die festi St. Mariae Magdalenae 22 Julii anno 1515.**

Hier ist a = 1515, also L ≡ 2. 3 — 3. 3 + 3 ≡ 7 = G, daher der 22 Juli 1515 nach der obigen Tafel ein Wochentag h ≡ 1 — 0 ≡ 1 = Sonntag.

Beispiel 4. Mehrere Schriftsteller erzählen einstimmig *), daß im Jahre 944 eine schreckliche Sonnenfinsterniß an einem Freitage um die dritte Tagsstunde Statt fand. Ist dies so richtig? — Es gab wohl, nach **l'art de vérifier les dates, Paris, 1818, tome 1e, pag. 329**, Freitags am 20 September 944 eine Sonnenfinsterniß; allein sie war ihrer Unbedeutenheit wegen gar nicht erschrecklich, fand ferner bei dem Aufgange der Sonne Statt, und war überdies in dem ganzen damals bekannten Europa nicht sichtbar. Allein am 19 Juli 939 trat eine Sonnenfinsterniß und zwar wirklich um die dritte Tagsstunde, d. i. um 8 Uhr Morgens ein, welche sehr groß war,

---

*) **Correspondance astronomique, par le Baron de Zach, vol. 10, pag. 426.**

da in Paris die Sonne 10 Zoll und in Italien noch mehr verfinstert wurde. Wir wollen sehen, ob dieser Tag ein Freitag war. — Hier ist $a = 939$, daher $L \equiv 2.3 - 3.1 + 3 \equiv 6 = F$; ferner der 19 Juli $= d = 19 + 181 = 200 \equiv 4$, folglich $h \equiv 4 - 6 + 1 \equiv 6 =$ Freitag. — Es war demnach in der That der 19 Juli 939 ein Freitag, und sofort ist es wahrscheinlich, daß jene Schriftsteller von der an diesem Tage eingetretenen Finsterniß, nicht aber von jener des Jahres 944 sprechen.

Beispiel 5. Der Freundschaftsbund, welchen Herzog Albrecht von Oesterreich mit Georg König von Böhmen schloß, und der in »Kurz, Oesterreich unter Friedrich dem Vierten, Wien, 1812, 2. Theil, S. 214« abgedruckt ist, wurde zu Prag am Freitag, den Tag der unschuldigen Kinder (28 December), im Jahre 1459 schriftlich bekräftiget. War dieser Tag wirklich ein Freitag? — Hier hat man $a = 1459$, $i = 0$, $L \equiv 2.3 - 3.3 + 3 \equiv 7 = G$, daher nach der Tafel dieses Paragraphs $h \equiv 0 - 0 - 1 \equiv 6 =$ Freitag; mithin ist der Wochentag richtig angegeben.

73.

Fortsezung. Wechsel der Wochentage des nemlichen Monatstages.

Verlangt man zu wissen, wie die Wochentage wechseln, auf welche einerlei Monatstag in zwei verschiedenen Jahren trifft, so wird man von der Congruenz (141) die Differenz oder Aenderung nehmen, in so fern m und t unverändert bleiben. Man erhält so

$$\Delta h \equiv \left(q\frac{m+9}{12} - 1\right)\Delta i - \Delta L \equiv q\frac{m-3}{12}\Delta i - \Delta L, \text{ mod } 7.$$

In den beiden ersten Monaten, Januar und Februar, ist

$$\Delta h \equiv - \Delta i - \Delta L, \text{ mod } 7,$$

in den übrigen aber $\Delta h \equiv - \Delta L$, mod 7.

Uebergeht man von einem Jahre auf das unmittelbar folgende, und zwar

1. von einem Schaltjahre auf ein Gemeinjahr, so ist, vermöge §. 69, $\Delta L \equiv -1$, und $\Delta i = 0 - 1 = -1$, daher für $m = 1$ u. 2 ist $\Delta h \equiv 2$, und für $m > 2$ ist $\Delta h \equiv 1$; d. h. vor dem 1 März rückt jedes Datum auf den zweiten nachfolgenden, z. B. vom Sonntag auf den Dinstag, vom Samstag auf den Montag, u. dgl., vom 1 März an aber auf den nächst folgenden Wochentag, z. B. vom Sonntag auf den Montag, vom Samstag auf den Sonntag u. dgl.

2. Geht man von einem Gemeinjahre auf's nächst kommende Gemeinjahr über, so ist $\Delta i = 0$, $\Delta L \equiv -1$, also immer

$\Delta h \equiv 1$; d. i. hier rückt jedes Datum um einen Wochentag weiter vor, vom Sonntag auf den Montag, vom Montag auf den Dinstag u. s. f.

3. Schreitet man von einem Gemeinjahre auf ein Schaltjahr vor, so ist $\Delta i = 1 - 0 = 1$, $\Delta L \equiv -2$, also für $m = 1$ u. 2 ist $\Delta h \equiv 1$ und für $m > 2$ ist $\Delta h \equiv 2$, d. h. vor dem 1 März rückt jedes Datum um einen Wochentag vor, vom 1 März an aber um zwei Wochentage.

74.

Berechnung des Sonntagsbuchstaben, bei welchem auf einen Monatstag ein gewisser Wochentag trifft.

Dazu liefert die Congruenz (139) in §. 72 den Ausdruck

$$(142) \qquad L \equiv d - i - h + 1, \text{ mod } 7.$$

Zu diesem Sonntagsbuchstaben kann man sofort noch, nach §. 71, IV, diejenigen Jahre berechnen, in denen er besteht.

Beispiel 1. Bei welchem Sonntagsbuchstaben fällt das Fest Mariä Lichtmeß (2 Februar) auf einen Sonntag? — Hier ist $h =$ Sonntag $= 1$, $d = 2$ Februar $= 2 + 31 = 33 \equiv -2$, mod 7, also der Sonntagsbuchstabe $L \equiv -2 - i - 1 + 1 \equiv 5 - i$, mod 7; nemlich in Gemeinjahren $L = 5 = E$ und in Schaltjahren $L = 4 = D$, da ist aber $L_0 = 5 = E$. — Lichtmeß trifft demnach auf einen Sonntag, wenn der vor dem März bestehende Sonntagsbuchstabe E ist.

Will man wissen, in welchen Jahren unseres Jahrhunderts dies eintritt, so hat man $s = 18 \equiv 2$, mod 4, daher in §. 71, (135), für $i = 0$, $L = 5$,

$$\alpha = 4 r \frac{3(-5+1)-2}{7} = 0;$$

darnach gibt die erste Spalte der Tafel 1 in §. 70

die Gemeinjahre 1800, 1806, 1817, 1823,
1834, 1845, 1851,
1862, 1873, 1879,
1890.

Ist dagegen $i = 1$, folglich $L = 4$, so findet man

$$\alpha = 4 r \frac{3(-4+1)-2}{7} = 4.3 = 12,$$

daher noch die Schaltjahre 1812, 1840, 1868, 1896.

Beispiel 2. Zu San Jago di Compostella in der spanischen Provinz Galicien feiert man das Fest des heiligen Apostels Jakob des Jüngeren, Schutzpatrones und Bekehrers der Spanier, (1 Mai), in den Jahren, wo es mit einem Sonntage zusammen trifft, mit besonderer Solennität; indem eine sehr große Menge von Wallfahrtern jenen Aufbewahrungsort des Leichnams

dieses Heiligen besucht.*) In welchen Jahren dieses Jahrhunderts tritt dieses Jubiläum ein?

Da hier $h =$ Sonntag $= 1$, $d = 1$ Mai $= 1 + 120 + i = 121 + i \equiv 2 + i$ ist, so findet man $L \equiv 2 + i - 1 - i + 1 \equiv 2 = B$. Mithin fällt, nach dem Beispiele in §. 71, IV, dies Fest (1 Mai) in den Jahren 1803, 1808, 1814, 1825; 1831, 1836, 1842, 1853; 1859, 1864, 1870, 1881; 1887, 1892, 1898 auf einen Sonntag.

Beispiel 3. Cedrenus berichtet in seinem Compendium historiarum ab orbe condito ad Isacum Comnenum; gr. et lat. cum notis Jac. Goar et C. Annib. Fabroti glossariorum, Parisiis, 1647, 2 vol. in fol., pag. 730, daß man Sonntags den 13 August 1033 in Griechenland ein großes Erdbeben erlebt habe, und daß man auch noch Dinstags den 6 März (also 1034) ähnliche Erderschütterungen wahrnahm.

Aus $d = 13$ Aug. $= 13 + 212 + i = 225 + i \equiv 1 + i$, mod 7 und $h =$ Sonntag $= 1$ folgt $L \equiv 1 + i - 1 - i + 1 \equiv 1 = A$; und aus $d = 6$ März $= 6 + 59 + i = 65 + i \equiv 2 + i$, $h =$ Dinstag $= 3$ ergibt sich $L \equiv 2 + i - 3 - i + 1 \equiv 7 = G$. Diese Sonntagsbuchstaben A und G können demnach zweien nach einander folgenden Jahren angehören, von denen das spätere ein Gemeinjahr ist. Sucht man nun die Jahre des 11. Jahrhunderts, nemlich für $s = 10 \equiv 3$, mod 7, denen die Sonntagsbuchstaben A und G zukommen; so findet man erstlich in §. 71, (136) für $L = A = 1$, $\alpha = 4 \mathrm{r}\frac{3(-1+3)+2}{7} = 4.1 = 4$, mithin nach der Tafel 1 in §. 70 die Jahre 1004, 1010, 1021, 1027, 1032, 1038, 1049, u. s. f.; zweitens aber für $L = G = 7 \equiv 0$, mod 7 erhält man $\alpha = 4 \mathrm{r}\frac{3.3+2}{7} = 16$, folglich die Jahre 1005, 1011, 1016, 1022, 1033, 1039, 1044, u. s. f. Die Erzählung gibt demnach beide Jahre um eines zu spät an, so daß die erwähnten Erdbeben an den angegebenen Monats- und Wochentagen der Jahre 1032 und 1033 verspürt wurden.

75.

Berechnung der Tage, auf welche in einem Jahre, bei einem bestimmten Sonntagsbuchstaben, ein gewisser Wochentag trifft.

Ist der Sonntagsbuchstabe L eines Jahres angegeben, und verlangt man diejenigen Tage d dieses Jahres, auf welche ein gewisser Wochentag h trifft, so bietet die Congruenz (139) in §. 72 den Ausdruck

$$(143) \qquad d \equiv L + h + i - 1, \text{ mod } 7.$$

*) Vergl. Baron de Zach Correspond. astron. vol. 10, pag. 448, wo jedoch irrig St. Jaques le majeur und ce qui arrive tous les sept ans steht.

Da diese Aufgabe noch sehr unbestimmt ist, indem sämmtliche Werthe von d eine arithmetische Progression bilden, deren beständiger Unterschied 7 ist, so gestattet sie noch mancherlei nähere Bestimmungen.

I. Die nächste und gewöhnliche solche Bestimmung besteht in der Einschränkung des ursprünglich auf ein volles Jahr ausgedehnten Zeitintervalles, gewöhnlich auf einen bestimmten Monat.

II. Dazu kann sich nun die Angabe gesellen, der wie vielte dieser Wochentag in dem angenommenen Intervalle, im Jahre oder in dem angedeuteten Monate sein soll.

α) Um zuvörderst zu finden, wann der erste Wochentag h im Jahre eintrete, erwäge man, daß dafür die Nummer d des Jahrstages eine der Zahlen 1 bis 7, folglich

$$(144) \qquad d = \mathfrak{R}\frac{L+h+i-1}{7}$$

sein muß. Der erste Wochentag h eines Jahres fällt demnach auf den Tag $\mathfrak{R}\frac{L+h+i-1}{7}$ des Jahres oder auf den $\mathfrak{R}\frac{L+h+i-1}{7}$ Januar.

Z. B. Der erste Sonntag trifft, weil hier h = 1 ist, auf den $\mathfrak{R}\frac{L+i}{7}$, oder wegen §. 66, auf den L_0ten Tag des Jahres oder des Januars; übereinstimmend mit §. 60.

Demnach fällt der n^{te} Wochentag h im Jahre auf den Jahrstag

$$(145) \qquad d = \mathfrak{R}\frac{L+h+i-1}{7} + 7\,(n-1),$$

zu dem sich nach §. 41 oder §. 54 leicht der entsprechende Monat und Tag bestimmen läßt.

Z. B. Der 30. Sonntag des Jahres trifft, weil hier n = 30 und h = 1 ist, auf den $d = \mathfrak{R}\frac{L+i}{7} + 203 = L_0 + 203^{ten}$ Tag im Jahre, oder weil der $181 + i^{te}$ Tag der 0 Juli ist, auf den $\mathfrak{R}\frac{L+i}{7} - i + 22^{sten}$ Juli; mithin in einem Gemeinjahre auf den L + 22 Juli und in einem Schaltjahre auf den $\mathfrak{R}\frac{L+1}{7} - 1 + 22 = \mathfrak{r}\frac{L}{7} + 22$ Juli; daher frühestens im Schaltjahre und wenn L = 7 = G ist, auf den 22 Juli, und spätestens in einem Gemeinjahre, dessen L = 7 = G ist, auf den 29 Juli.

Soll der Tag d des Jahres berechnet werden, auf den der lezte Wochentag h im Jahre trifft, so erwäge man, daß der lezte Tag des Jahres der $365 + i^{te}$ ist, vor dem also der gesuchte um

$$365 + i - d \equiv 365 + i - (L + h + i - 1), \text{ mod } 7$$
$$\equiv -L - h + 2$$

Tage liegt. Da nun solcher Tage nur höchstens 6 und sogar auch keiner sein

können, so ist der geforderte Tag, vom Ende des Jahres gezählt, der

$$365 + i - d = \mathfrak{r}\frac{-L-h+2}{7}\text{te},$$

folglich vom Anfange des Jahres, der

$$d = 365 + i - \mathfrak{r}\frac{-L-h+2}{7}\text{te Tag},$$

oder, vermöge Vorbegr. VII, (20),

$$d = 358 + i + \mathfrak{R}\frac{L+h-2}{7};$$

mithin trifft der letzte Wochentag h auf den

$$31 - \mathfrak{r}\frac{-L-h+2}{7} = 24 + \mathfrak{R}\frac{L+h-2}{7} \text{ December.}$$

β) Frägt man ferner, auf welche Tage im m^{ten} Monate ein Wochentag h trifft, so sei der 0. Tag dieses Monates der d_0^{te} Jahrstag, nemlich in §. 52, (84),

$$d_0 = 31(m-1) - \mathfrak{q}\frac{5m+1}{7} - (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m+9}{12},$$

und sei der gesuchte Tag der t^{te} desselben Monates. Dann ist der ihm entsprechende Jahrstag

$$d = d_0 + t \equiv L + h + i - 1, \text{ mod } 7,$$

folglich trifft überhaupt der Wochentag h auf den Tag

$$t \equiv L + h - d_0 + i - 1$$

des m^{ten} Monates; wobei, wenn dieser Monat μ Tage enthält, t nicht größer als μ genommen wird.

Der erste Wochentag h in diesem m^{ten} Monate muß demnach, weil er nur vom 1sten bis 7ten eintreten kann, auf den

$$t = \mathfrak{R}\frac{L+h-d_0+i-1}{7}\text{ten Tag kommen.}$$

Sofort trifft der n^{te} Wochentag h im m^{ten} Monate auf den

$$(146)\qquad t = \mathfrak{R}\frac{L+h-d_0+i-1}{7} + 7(n-1)\text{ten Tag.}$$

Der letzte Wochentag h im m^{ten} Monate, muß dem letzten, folglich da dieser Monat μ Tage zählen soll, dem μ^{ten} Tage, um

$$\mu - t \equiv \mu - (L + h - d_0 + i - 1), \text{ mod } 7$$

Tage vorhergehen; mithin ist diese Zahl der Tage, weil sie geringer als 7 sein muß,

$$\mu - t = \mathfrak{r}\frac{\mu-L-h+d_0-i+1}{7},$$

folglich trifft auf den Tag

$$(147)\qquad t = \mu - \mathfrak{r}\frac{-L-h+d_0+\mu-i+1}{7}$$
$$= \mu - 7 + \mathfrak{R}\frac{L+h-d_0-\mu+i-1}{7}$$

des m^{ten} Monates der letzte Wochentag h.

Man konnte diesen Ausdruck auch finden, indem man bedachte, daß der lezte Wochentag h des m^{ten} Monates dem ersten Wochentage des nächst kommenden $m + 1^{ten}$ Monates, der nach dem Obigen auf den $\mathfrak{R}\frac{L+h-(d_0+\mu)+i-1}{7}$ten Tag des $m + 1^{ten}$, also auf den $\mu + \mathfrak{R}\frac{L+h-d_0-\mu+i-1}{7}$ten Tag des m^{ten} Monates trifft, um 7 Tage vorgeht.

Z. B. Im Juli ist $d_0 = 181 + i \equiv -1 + i$, daher trifft der erste Wochentag h auf den $\mathfrak{R}\frac{L+h}{7}$ Juli; ferner ist $\mu = 31$, folglich kommt der lezte Wochentag h auf den $31 - \mathfrak{r}\frac{-L-h+3}{7} = 24 + \mathfrak{R}\frac{L+h-3}{7}$ Juli. So trifft der erste Sonntag im Juli auf den $\mathfrak{R}\frac{L+1}{7}$ten und der lezte auf den $24 + \mathfrak{R}\frac{L-2}{7}$ten Tag.

76.

Fortsezung.

III. Eine sehr gewöhnliche nähere Bestimmung eines zu suchenden Wochentages ist die Angabe eines Tages im Jahre oder in einem gewissen Monate, dem er zunächst folgen oder vorangehen soll.

a) Ist nun derjenige Tag d des Jahres zu suchen, worauf der nächste Wochentag h nach oder vor dem D^{ten} Tage des Jahres trifft, so geht er, wegen

$$(143) \qquad d \equiv L + h + i - 1, \bmod 7,$$

dem D^{ten} Tage im ersten Falle nach um

$$d - D \equiv L + h - D + i - 1,$$

im zweiten Falle vor um

$$D - d \equiv -L - h + D - i + 1$$

Tage. Jeden Falls ist dieser Abstand positiv und reicht von einem bis sieben Tage; daher ist dort

$$d - D = \mathfrak{R}\frac{L+h-D+i-1}{7}$$

und hier $\quad D - d = \mathfrak{R}\frac{-L-h+D-i+1}{7}$,

folglich trifft der nächste Wochentag h hinter dem D^{ten} Jahrstage auf den Jahrstag

$$(148) \qquad d = D + \mathfrak{R}\frac{L+h-D+i-1}{7} = D + 7 - \mathfrak{r}\frac{-L-h+D-i+1}{7}$$

und der nächste Wochentag h vor dem D^{ten} Jahrstage auf den Jahrstag

$$(149) \qquad d = D - \mathfrak{R}\frac{-L-h+D-i+1}{7} = D - 7 + \mathfrak{r}\frac{L+h-D+i-1}{7}.$$

Oder: Bezeichnet H den Wochentag des D^{ten} Tages im Jahre, so ist, vermöge XVIII, (82) der Vorbegr., eben so wohl der Abstand des Jahrstages D von dem nächsten Wochentage h nach ihm

$$d - D \equiv h - H, \bmod 7 = R\frac{h-H}{7}$$

als von dem nächsten Tage vor ihm

$$D - d \equiv H - h, \bmod 7 = R\frac{H-h}{7}.$$

Setzt man hierin, vermöge §. 72, (140), $H \equiv D - i - L + 1$, mod 7, so erhält man die vorigen Ausdrücke.

Darf der Wochentag h auf den D^{ten} Jahrstag selbst fallen, also nicht erst auf den späteren oder früheren siebenten Tag verlegt werden; so können beide Tage überhaupt um 0 bis 6 Tage von einander abstehen, folglich hat man in den gefundenen Ausdrücken die außerordentlichen und gewöhnlichen Reste mit einander zu vertauschen.

Z. B. Soll der erste Sonntag vor und nach dem mittelsten Tage eines Gemeinjahres, (2 Juli), nemlich nach dem 183. Tage gesucht werden, so ist $h =$ Sonntag $= 1$, $i = 0$, $D = 183 \equiv 1$, also im ersten Falle

$$d = 183 - R\frac{-L+1}{7} = 176 + r\frac{L-1}{7} = 25 + r\frac{L-1}{7} \text{ Juni} = r\frac{L-1}{7} - 5 \text{ Juli},$$

und im anderen $d = 183 + R\frac{L-1}{7} = 190 - r\frac{-L+1}{7} = R\frac{L-1}{7} + 2$ Juli.

Ist nun der Sonntagsbuchstabe $L = 4 = D$, so ist der Sonntag unmittelbar vor dem mittelsten Tage, der $183 - 4 = 176 + 3 = 179^{ste}$ Tag im Jahre $= 28$ Juni und der Sonntag nach dem mittelsten Tage der $183 + 3 = 190 - 4 = 186^{ste}$ Tag $= 5$ Juli.

b) Meistens gibt man den T^{ten} Tag eines Monates an, dem der angegebene Wochentag h zunächst nachfolgen oder vorhergehen soll. Dann sucht man den t^{ten} Tag desselben Monates, worauf dieser Wochentag fällt. Gäbe die Rechnung t größer als die Zahl μ der Tage dieses Monates, so wäre jener t^{te} Tag desselben eigentlich der $t - \mu^{te}$ Tag des nachfolgenden Monates. Fiele aber nach der Rechnung t gleich Null oder negativ aus, und zählte der nächst vorhergehende Monat μ_0 Tage, so würde der berechnete t^{te} Tag des angegebenen Monates eigentlich der $t + \mu_0{}^{te}$ Tag des vorangehenden sein.

Ist nun der festgestellte T^{te} Tag des angesagten Monates der D^{te} und der zu suchende t^{te} Tag desselben Monates der d^{te} im Jahre; und soll dieser t erstlich hinter jenem T liegen, so ist, bei Benüzung des oben Gefundenen,

$$t - T = d - D = R\frac{L+h-D+i-1}{7} = 7 - r\frac{-L-h+D-i+1}{7};$$

soll dagegen zweitens t vor T liegen, so hat man

$$T - t = D - d = R\frac{-L-h+D-i+1}{7} = 7 - r\frac{L+h-D+i-1}{7}.$$

Der nächste Wochentag h *hinter* dem T^{ten} Tage eines Monates trifft demnach auf den Tag

$$(150)\quad t = T + \mathfrak{R}\frac{L + h - D + i - 1}{7} = T + 7 - \mathfrak{r}\frac{-L - h + D - i + 1}{7}$$

desselben Monates; dagegen trifft der Wochentag h zunächst *vor* dem T^{ten} Tage eines Monates auf den Tag

$$(151)\quad t = T - \mathfrak{R}\frac{-L - h + D - i + 1}{7} = T - 7 + \mathfrak{r}\frac{L + h - D + i - 1}{7}$$

dieses Monates.

Darf der Wochentag h auch auf den T^{ten} Monatstag selbst treffen, so kann der Abstand beider allgemein 0 bis 6 Tage betragen; mithin sind auch hier wie in voriger Rechnung a) die außerordentlichen und gewöhnlichen Reste zu vertauschen.

Uebrigens mag hier noch angemerkt werden, daß die in §. 75, II, behandelte nähere Bestimmung des zu suchenden Wochentages auch als ein besonderer Fall der gegenwärtigen angesehen werden kann, indem der erste Wochentag h im Jahre/Monate der nächste nach dem 0. Tage des Jahres/Monates und der letzte Wochentag h im Jahre/Monate der nächste vor dem Anfangstage des nachfolgenden Jahres/Monates ist, folglich an oder zunächst vor dem Schlußtage des Jahres/Monates eintritt.

Diese Umschreibung der Monatstage im Datiren war besonders im Mittelalter sehr üblich. Gegenwärtig verwendet man sie nur noch zur allgemeinen Bestimmung der Tage mancher kirchlichen Feste und der Märkte verschiedener Orte; wie der im Anhange befindliche »allgemeine christliche Festkalender,« Taf. 7, und die »Probe allgemeiner Bestimmung von Markttagen,« Taf. 8, nachweisen.

Beispiel 1. Der deutsche König Heinrich erließ — wie *Kurz* in seinem »Oesterreich unter König Friedrich dem Schönen,« Linz 1818, S. 24 und 419 urkundlich nachweist — den Urtheilsspruch über die Mörder König Albrechts zu Speyer am *Donnerstage vor dem St. Mauritiustage* im Jahre 1309. Von welchem Monatstage ist diese Urkunde datirt, da der Mauritiustag der 22 September ist?

Hier hat man $a = 1309$, $i = 0$, $D = 22$ Sept. $= 22 + 243 + i = 265 + i \equiv -1 + i$, mod 7; folglich ist allgemein der Wochentag h vor dem Mauritiustage am $22 - 7 + \mathfrak{r}\frac{L + h + 1 - i + i - 1}{7} = 15 + \mathfrak{r}\frac{L + h}{7}$ September. Setzt man hierin $h =$ Donnerstag $= 5$, so fällt der Donnerstag vor Mauritius immer auf den $15 + \mathfrak{r}\frac{L - 2}{7}$ September. In dem angeführten Jahre

findet man nun aber den Sonntagsbuchstaben $L \equiv 2.1 + 3 \equiv 5$, daher ist das geforderte Datum der $15 + \mathfrak{r}\frac{5-2}{7} = 18$ September 1309, wie es auch **Kurz** angibt.

Beispiel 2. Albrecht III., Herzog von Oesterreich, verlieh — nach **Kurz**'s »Oesterreichs Handel in älteren Zeiten,« Linz 1822, S. 37 und 358 — der Stadt Grätz im Jahre 1393 auf sieben Jahre ein eingeschränktes Stapelrecht durch eine zu Wien am **Freitage vor Lichtmeß** (2 Februar) ausgestellte Vollmacht. Von welchem Datum ist diese Urkunde?

Da hier $D = 2$ Februar $= 2 + 31 = 33 \equiv -2$, mod 7 ist, so fällt der Wochentag h vor Lichtmeß allgemein auf den

$$2 - \mathfrak{R}\frac{-L-h-i-1}{7} \text{ Februar} = 33 - \mathfrak{R}\frac{-L-h-i-1}{7} \text{ Januar.}$$

Sezt man $h =$ Freitag $= 6$, so trifft der Freitag vor Lichtmeß auf den

$$2 - \mathfrak{R}\frac{-L-i}{7} \text{ Februar} = 33 - \mathfrak{R}\frac{-L-i}{7} \text{ Januar.}$$

Im Jahre $1393 = a$ ist $a \equiv 0$, mod 7, $\mathfrak{q}\frac{a}{4} = 348 \equiv -2$, mod 7, $i = 0$, also $L \equiv 2 + 3 \equiv 5$; mithin ist das verlangte Datum der $33 - 2 = 31$ Januar 1393, den auch **Kurz** findet.

Beispiel 3. In **Schönemann**'s „Codex für die praktische Diplomatik," Göttingen 1803, 2. Theil, S. 24, XII, ist ein Transact zwischen dem Landgrafen Sigbert von Elsaß und seiner Mutter so datirt: dis geschach, do sit unsers Herren geburte waren zwelf hundert un fünf unde sehzig jar, an deme nehisten frietage nach der lichtmes.

Nach dem vorigen Beispiele ist $D \equiv -2$, daher fällt der Wochentag h nach Lichtmeß auf den $2 + \mathfrak{R}\frac{L+h+i+1}{7}$ Februar, sofort der nächste Freitag nach Lichtmeß auf den $2 + \mathfrak{R}\frac{L+i}{7}$ Februar. In dem Jahre 1265 der Urkunde ist $i = 0$ und $L = 4$, daher der Freitag nach Lichtmeß der 6 Februar.

Beispiel 4. In der Zeitschrift »Archiv für Geschichte, Statistik, Literatur und Kunst,« redigirt durch Freih. v. **Hormayr**, Wien 1828, Nr. 45, S. 234, findet sich folgende Stelle: „Im Jahre 1517 zur Zeit des unmündigen Königs Ludwig ordnete die Stadt Znaim (in Mähren) mit allerhöchster Bewilligung ihre Richterwahl, ihren Weinschank, die geistlichen Zinsungen und das Zunftwesen. Die darüber am **Samstag nach Pauli Bekehrung** aufgesezten Artikel erhielten nicht nur die landesherrliche Genehmigung, sondern der junge König verordnete nachträglich am **Dinstag nach dem neuen Jahre** 1520 aus Ofen, daß der jährlich wechselnde Gemeinrath dem neu eintretenden Körper gehörige Rechnung legen soll." Man frägt um die Monatstage dieser Data.

Pauli Bekehrung fällt auf den 25 Januar, daher ist $D = 25 \equiv -3$ mod 7, ferner ist $a = 1517 \equiv -2$, mod $7 \equiv 1$, mod 4, also $i = 0$ un $L \equiv 2 + 6 + 3 \equiv 4$, endlich $h =$ Samstag $= 7$, folglich wurden jen Artikel aufgesezt am $25 + \mathfrak{R}\frac{4+0+3-1}{7} = 31$ Januar 1517. Andrerseit ist Neujahr am 1 Januar, also $D = 1$, dann $a = 1520$, $i = 1$, $L \equiv -$: $+ 3 \equiv 7$, und $h =$ Dinstag $= 3$; daher erging die königliche Verordnun am $1 + \mathfrak{R}\frac{0+3-1+1-1}{7} = 3$ Januar 1520.

77.

Rückkehr der Wochentage.

I. In einem bestimmten Zeitraume. Betrachtet man die Wie derkehr der Wochentage in einem angegebenen Zeitraume, gewöhnlich in ganzen Jahre oder in einem Monate, so kann man entweder nur überhaup fragen, wie oft in einer gewissen Anzahl von Tagen jeder Wochentag sic wiederholt, oder indem man einen Wochentag eigens hervorhebt, der wie vielt irgend ein solcher Wochentag, oder insbesondere der lezte, in einem bestimm begrenzten Zeitraume ist, oder wie oft darin jener bezeichnete Wochentag sic wiederholt.

α) Enthält ein Zeitraum d Tage, folglich $\mathfrak{Q}\frac{d}{7}$ Wochen und $\mathfrak{r}\frac{d}{7}$ Tage so wiederkehren die $\mathfrak{r}\frac{d}{7}$ Wochentage, die in der lezten oder $\mathfrak{Q}\frac{d}{7} + 1$te unvollständigen Woche vorkommen, oder mit denen jede Woche des Zeitraum anhebt, $\mathfrak{Q}\frac{d}{7} + 1$ Mal, die übrigen $7 - \mathfrak{R}\frac{d}{7} = \mathfrak{r}\frac{-d}{7}$ Wochentage abe nur $\mathfrak{Q}\frac{d}{7}$ Mal.

Sonach wiederholen sich in einem Jahre von $365 + i =$ Tagen die $\mathfrak{r}\frac{365+i}{7} = 1 + i$ Wochentage, welche über die $\mathfrak{q}\frac{365+i}{7} = 52$ Wo chen hinaus reichen, und mit denen das Jahr anfängt und endet, nemlic vermöge (140) in §. 72 die Wochentage $\mathfrak{R}\frac{-L-i+2}{7}$ und $\mathfrak{R}\frac{-L+2}{7}$ in de lezten oder 53. unvollständigen Woche zum 53. Male, jeder der übrigen 6 — Wochentage aber blos 52 Mal. Im Gemeinjahre erscheint demnach de Wochentag, womit dasselbe anfängt und endet, nemlich der Wochentag $\mathfrak{R}\frac{-L+}{7}$ des 1 Januars 53 Mal, alle 6 anderen 52 Mal; im Schaltjahre dagege kommen die beiden Wochentage, mit denen es anfängt und endet, nemlich di Wochentage $\mathfrak{R}\frac{-L+1}{7}$ und $\mathfrak{R}\frac{-L+2}{7}$ des 1 und 2 Januars 53 Mal, die übri gen 5 aber 52 Mal vor.

Hat ein Monat 31, 30, 29 Tage, folglich 4 Wochen und 3, 2, 1 Tage, so wiederkehren die 3, 2, 1 Wochentage, womit er anfängt und endet, 5 Mal, alle sonstigen Wochentage blos 4 Mal. Hat aber ein Monat 28 Tage, mithin gerade 4 volle Wochen, so wiederholen sich alle Wochentage 4 Mal.

Ist in einem Zeitraume der d^{te} Tag der Wochentag h, und traf dieser Wochentag in diesem Zeitraume zum ersten Male auf den d_1^{ten} Tag, so läßt sich leicht bestimmen, der wie vielte solche Wochentag auf jenen d^{ten} Tag fällt. Denn soll er der n^{te} derartige Wochentag sein, so ist

$$d_1 + (n-1)7 = d$$

also

$$n = \frac{d-d_1}{7} + 1;$$

oder auch, weil $d_1 = 1, 2, \ldots 7$ ist, $n - 1 = \mathfrak{Q}\frac{d}{7}$, folglich

$$n = \mathfrak{Q}\frac{d}{7} + 1.$$

Ist insbesondere dieser n^{te} Wochentag in einem gewissen Zeitraume der lezte selbst, so läßt sich leicht ermitteln, wie oft in diesem Zeitraume jener Wochentag wiederkehrt.

β) Im ganzen 365 + itägigen Jahre trifft, vermöge §. 75, II, der erste Wochentag h auf den Tag

$$d_1 = \mathfrak{R}\frac{L+h+i-1}{7}$$

und der lezte solche Wochentag auf den Tag

$$d = 358 + i + \mathfrak{R}\frac{L+h-2}{7}.$$

Gibt demnach n an, wie oft der Wochentag h im Jahre vorkommt, oder wie viel Wochentage h das Jahr enthält, so hat man

$$n = 1 + \left(358 + i + \mathfrak{R}\frac{L+h-2}{7} - \mathfrak{R}\frac{L+h+i-1}{7}\right) : 7.$$

Zur einfacheren Darstellung dieses Ausdruckes beachte man, daß

$$\mathfrak{R}\frac{L+h-2}{7} = L + h - 2 - 7\mathfrak{Q}\frac{L+h-2}{7}$$

$$\mathfrak{R}\frac{L+h+i-1}{7} = L + h + i - 1 - 7\mathfrak{Q}\frac{L+h+i-1}{7}$$

ist; dann findet man

$$(152) \qquad n = 52 + \mathfrak{Q}\frac{L+h+i-1}{7} - \mathfrak{Q}\frac{L+h-2}{7}$$

oder nach Vorbegr. VI, (7) und XV (60)

$$n = 52 + \mathfrak{q}\frac{L+h+i-2}{7} - \mathfrak{q}\frac{L+h-3}{7}$$

$$= 52 + \mathfrak{q}\frac{i+1+\mathfrak{r}\frac{L+h-3}{7}}{7} = 52 + \mathfrak{Q}\frac{i+1+\mathfrak{R}\frac{L+h-2}{7}}{7}$$

$$= 52 + \mathfrak{q}\frac{i+\mathfrak{R}\frac{L+h-2}{7}}{7}.$$

Dieselben Ausdrücke erhält man auch nach dem Obigen, wo $n = \mathfrak{Q}\frac{d}{7} + 1$ gefunden wurde. Es ergibt sich nemlich

$$n = 1 + \left(358 + i + \mathfrak{R}\frac{L+h-2}{7}\right) \underset{\mathfrak{Q}}{:} 7$$

oder

$$n = 52 + \mathfrak{Q}\frac{i + 1 + \mathfrak{R}\frac{L+h-2}{7}}{7}.$$

Beispiel. Wie viel Sonntage hat ein Jahr?

Hier ist $h =$ Sonntag $= 1$, daher die Zahl der Sonntage

$$= 52 + \mathfrak{q}\frac{i + \mathfrak{R}\frac{L-1}{7}}{7}.$$

Soll das Jahr 53 Sonntage zählen, muß es nach dem oben Gefundenen entweder ein Gemeinjahr sein und mit einem Sonntage anfangen, oder ein Schaltjahr sein und mit einem Sonntage oder Samstage anfangen. Dasselbe weist dieser Ausdruck aus. Für $i = 0$ muß nemlich $L = 1$, und für $i = 1$ muß $L = 1$ oder 7 sein. Setzt man demnach $L = 1$, so kann $i = 0$ und 1 sein; ist aber $L = 7$, so darf nur $i = 1$ genommen werden.

Alle jene Jahre a, welche 53 Sonntage enthalten, sind demnach, vermöge §. 71, (132), (133), in einer der beiden Formen enthalten

$$a \equiv 4\mathfrak{r}\frac{3k-1}{7} + \mathfrak{a},\; a \equiv 4\mathfrak{r}\frac{3k+2}{7},\ \text{mod } 28;\ \mathfrak{a} \equiv 0, 17, 6, 23,$$

oder wenn es nach dem $s = \mathfrak{q}\frac{a}{100}$ten Jahrhunderte das Jahr α ist, hat man die zwei Formen

$$\alpha \equiv 4\mathfrak{r}\frac{3(s+k)-1}{7} + \mathfrak{a},\; \alpha \equiv 4\mathfrak{r}\frac{3(s+k)+2}{7},\ \text{mod } 28$$

und $a = 100s + \alpha$.

Im gregorianischen Kalender haben demnach während des 19. Jahrhunderts, wo $s = 18$ und $k = 12$ ist, folgende 18 Jahre 53 Sonntage:

1804, 1809, 1815, 1820, 1826,
1832, 1837, 1843, 1848, 1854,
1860, 1865, 1871, 1876, 1882,
1888, 1893, 1899;

folglich tritt ein solches Jahr abwechselnd nach 5 und 6, oder dann zweimal nach 6 Jahren ein, wenn ein Gemeinjahr dieser Art zwischen zwei solche Schaltjahre zu stehen kommt.

γ) In einem Monate, dessen 0. Tag der $d_0$te im Jahre ist, und welcher μ Tage zählt, trifft der Wochentag h, nach §. 75, (146), zum ersten Male auf den Tag

$$\mathfrak{R}\frac{L+h-d_0+i-1}{7}$$

und nach (147) zum lezten Male auf den Tag

$$\mu - 7 + R\frac{L+h-d_0-\mu+i-1}{7}.$$

Die Anzahl solcher Wochentage h in diesem Monate ist demnach

$$n = 1 + \left(\mu - 7 + R\frac{L+h-d_0-\mu+i-1}{7} - R\frac{L+h-d_0+i-1}{7}\right) : 7$$

oder, wenn man statt der Reste die Quoti einführt,

$$(153)\quad n = Q\frac{L+h-d_0+i-1}{7} - Q\frac{L+h-d_0-\mu+i-1}{7}$$

$$= q\frac{L+h-d_0+i-2}{7} - q\frac{L+h-d_0-\mu+i-2}{7}$$

$$= q\frac{\mu - R\frac{L+h-d_0+i-1}{7}}{7} + 1$$

$$= q\frac{\mu + r\frac{-L-h+d_0-i+1}{7}}{7} = 4 + q\frac{\mu - 28 + r\frac{-L-h+d_0-i+1}{7}}{7}$$

$$= q\frac{\mu + r\frac{L+h-d_0-\mu+i-2}{7}}{7} = 4 + q\frac{\mu - 28 + r\frac{L+h-d_0+i-\mu-2}{7}}{7}.$$

Dieselben Ausdrücke ergeben sich auch aus obigem $n = Q\frac{d}{7} + 1$, da hiernach zunächst

$$n = Q\frac{\mu + R\frac{L+h-d_0-\mu+i-1}{7}}{7}$$

gefunden wird und hieraus alles Uebrige sich ableiten läßt.

Beispiel. Wie viel Sonntage hat der Februar?

Hier ist $\mu = 28 + i$, $d_0 = 31 \equiv 3$, mod 7, $h =$ Sonntag $= 1$, also die Anzahl dieser Sonntage

$$= 4 + Q\frac{L+i-3}{7} - Q\frac{L-3}{7} = 4 + q\frac{i + r\frac{-L-i+3}{7}}{7}.$$

Im Gemeinjahr hat demnach der Februar jeden Wochentag, also auch den Sonntag 4 Mal; und nur im Schaltjahr, wo er 29 Tage zählt, hat er denjenigen Wochentag, der auf den 1sten und 29sten trifft, 5 Mal, folglich zählt er 5 Sonntage, wenn er mit einem Sonntage anfängt. Dasselbe lehrt auch der lezte Quotus, welcher nur dann 1 werden kann, wenn $i = 1$ und $r\frac{-L+2}{7} = 6$, $-L + 2 \equiv -1$, mod 7, also $L = 3$ ist.

Sezt man demnach $i = 1$, $\mathfrak{a} = 0$, $L = 3$, so findet man vermöge §. 71, (132) und (133) alle jene Jahre, die 5 Sonntage im Februar enthalten, allgemein aus

$$a \equiv 4r\frac{3k}{4} \equiv 4r\frac{3(2r\frac{s}{4} - s) + 1}{7}, \text{ mod } 28$$

oder $\alpha \equiv 4 r\frac{3(s+k)}{7}$, mod 28, $a = 100s + \alpha$

und insbesondere im gregorianischen Kalender

$$\alpha \equiv 4 r\frac{1 - s + \frac{s}{4}}{7},$$

im julianischen Kalender für $k = 0$,

$$a \equiv 0, \text{ mod } 28,$$

$$\alpha \equiv 4 r\frac{3s}{7}, \text{ mod } 28, \quad a = 100s + \alpha.$$

Im julianischen Kalender hat demnach der Februar aller durch 28 theilbaren Jahre 5 Sonntage; folglich ist in jedem Jahrhunderte das früheste solche Jahr dasjenige, welches durch 700 getheilt einen der Reste

0, 112, 224, 308, 420, 504, 616,

läßt, oder eine dieser Zahlen um 700, 1400, 2100, . . . übersteigt.

So sind im vorigen, jetzigen und kommenden Jahrhunderte die Jahre

1708, 1736, 1764, 1792,
1820, 1848, 1876,
1904, 1932, 1960, 1988

von der bedungenen Eigenschaft.

Im gregorianischen Kalender findet man solche Jahre, indem man $s = 15$; 16, 17, 18, 19; 20, 21, . .
also $k = 10$; 10, 11, 12, 13; 13, 14, . . setzt, dann ist
(mod 28), $\alpha \equiv 20$; 4, 28, 24, 20; 4, 28, . .; folglich ergeben sich die Jahre

1604 1728 1824 1920 2004 2128 2224 2320 . . .
1632 1756 1852 1948 2032 2156 2252 2348 . . .
1660 1784 1880 1976 2060 2184 2280 2376 . . .
1688 2088

also in jedem vierten Jahrhunderte die nemlichen Jahre, welche im Februar 5 Sonntage haben. Vor 1600 gibt es kein solches Jahr, weil das späteste 1576 wäre, welches aber noch vor 1582, das Jahr der gregorianischen Kalender-Reform, fällt.

Anmerkung. Von dieser Aufgabe gab Cavaliere de Ciccolini die erste Auflösung in der Correspondance astron. par B. de Zach, vol. 10, pag. 380, nemlich in unseren Zeichen
für den gregorianischen Kalender die Jahre

$$a = 1460 + 28\omega + 9s + 3 r\frac{s-16}{4}, \quad \omega = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

und für den julianischen $a = 28\omega$.

78.

Fortsezung.

II. Wiederkehr der Wochentage auf gleichvielte Tage der Monate.

Ist ein Tag der d^{te} in einem Jahre, welches i Schalttage zählt, so ist er hinter dem i^{ten} Tage des Jahres der $d-i^{te}$ Tag, und vermöge §. 72, (139)

$$d-i \equiv L+h-1, \text{ mod } 7.$$

Sucht man nun die Aenderung der Nummer $d-i$ für ein bestimmtes Jahr oder für einen festgesezten Sonntagsbuchstaben L, folglich für $\Delta L = 0$, so findet man überhaupt

$$\Delta(d-i) \equiv \Delta h, \text{ mod } 7.$$

Damit nach $\Delta(d-i)$ Tagen in demselben Jahre der Wochentag h wiederkehre, oder zwei um $\Delta(d-i)$ von einander abstehende Tage eines Jahres auf einerlei Wochentag h fallen, mithin $\Delta h = 0$ sei, muß

$$\Delta(d-i) \equiv 0, \text{ mod } 7$$

sein; nemlich die Abstände dieser zwei Tage vom i^{ten} Tage des Jahres müssen durch 7 getheilt gleiche Reste lassen, oder beide Tage müssen um eine Anzahl voller Wochen von einander abstehen; ein Ergebniß, das auch sonst einleuchtet.

Ist jener d^{te} Tag des Jahres oder der $d-i^{te}$ Tag nach dem i^{ten} Tage im Jahre zugleich der t^{te} Tag jenes Monates, der nach dem d_0^{ten} Tage beginnt, oder dessen nullter Tag der d_0^{te} im Jahre ist, so hat man

$$d = d_0 + t,$$

folglich allgemein

$$\Delta(d-i) = \Delta(d_0-i) + \Delta t \equiv \Delta h, \text{ mod } 7,$$

und wenn zwei Monatstage auf einerlei Wochentag h treffen,

$$\Delta(d-i) = \Delta(d_0-i) + \Delta t \equiv 0, \text{ mod } 7.$$

Sollen diese auf den nemlichen Wochentag fallenden Tage überdies noch gleichvielte in zwei Monaten, also $\Delta t = 0$ sein, mithin diese Monate auch nach und mit einerlei Wochentag beginnen, so muß

$$\Delta(d-i) = \Delta(d_0-i) \equiv 0, \text{ mod } 7$$

sein; d. h. die gleichvielten Tage dieser beiden Monate, als die 0ten, 1ten, 2ten, 3ten, u. s. f., müssen um eine Zahl voller Wochen von einander abstehen, oder ihre Abstände von dem i^{ten} Tage des Jahres geben durch 7 getheilt gleiche Reste.

Um sofort jene Monate zu bestimmen, welche nach und mit einerlei Wochentag beginnen, theile man die Zahlen d_0-i, welche angeben, die wie vielten Tage hinter dem i^{ten} die nullten Tage der Monate sind, und welche sich leicht aus der Tafel in §. 41 entnehmen oder durch die Formel (84) oder (85) bestimmen lassen, oder auch ihr Entgegengeseztes $-(d_0-i)$ durch 7, und schreibe den 7 möglichen Resten von 0 bis 6 die Monate

bei, von denen sie herstammen, nachdem man einmal für Gemeinjahre $i=0$ und nachher für Schaltjahre $i=1$ gesezt hat. Nimmt man z. B. die Reste $r\frac{-(d_0-i)}{7} = r\frac{-d_0+i}{7}$, so bietet die Tafel in §. 61 die Zusammenstellung der Ergebnisse des beschriebenen Verfahrens, indem die oberste Zeile von Zahlen die möglichen Reste enthält, und über jedem Reste die Monate stehen, bei denen sie sich ergeben.

In jedem Jahre fangen demnach höchstens 3 Monate mit einerlei Wochentag an, und zwar, mit Rücksicht auf die Tafel in §. 72,
in Gemeinjahren: Februar, März und Nov., nach dem Wochentage $R\frac{-L-3}{7}$,
in Schaltjahren: Januar, April und Juli, nach dem Wochentage $R\frac{-L}{7}$.

Man kann nun nach denjenigen Jahren fragen, in denen die t^{ten} Tage solcher 3 Monate auf den Wochentag h fallen; namentlich

1. nach den Gemeinjahren, in denen der t^{te} Februar, März und November auf den Wochentag h treffen, folglich vermöge der Tafel im §. 72

$$t-L-3\equiv h, \mod 7$$

ist. Da hat man $L\equiv t-h-3$,
folglich vermöge §. 71, (134), (132), (133)
im julianischen Kalender

$$a\equiv 4\,r\frac{-3(t-h+1)}{7}+\mathfrak{a}, \mod 28$$

$$\alpha\equiv 4\,r\frac{-3(t-h-s+1)}{7}+\mathfrak{a}, \mod 28, a=100s+\alpha$$

$$\mathfrak{a}\equiv 17, 6, 23\equiv -11, -22, -5, \mod 28;$$

und im gregorianischen Kalender

$$a\equiv 4\,r\frac{3(-t+h+2r\frac{s}{4}-s)-2}{7}+\mathfrak{a}, \mod 28$$

$$\alpha\equiv 4\,r\frac{3(-t+h)-r\frac{s}{4}-2}{7}+\mathfrak{a}, \quad a=100s+\alpha$$

$$\mathfrak{a}\equiv 17, 6, 23.$$

Sucht man aber

2. jene Schaltjahre, in denen der t^{te} Januar, April und Juli auf den Wochentag h fallen, folglich, vermöge der Tafel in §. 72,

$$t-L\equiv h, \mod 7,$$

ist; so hat man $L\equiv t-h$, mod 7
daher vermöge §. 71, (134), (132), (133)
im julianischen Kalender

$$a\equiv 4\,r\frac{3(h-t)+2}{7}, \mod 28$$

$$\alpha\equiv 4\,r\frac{3(h-t+s)+2}{7}, \quad a=100s+\alpha$$

und im gregorianischen Kalender

$$a \equiv 4\, r\frac{3(h - t + 2\, r\frac{s}{4} - s + 1)}{7}, \ \mathrm{mod}\ 28$$

$$\alpha \equiv 4\, r\frac{3(h - t + 1) - r\frac{s}{4}}{7}, \quad a = 100s + \alpha.$$

Beispiel. In einer italiänischen Stadt soll, — wie Baron Zach in seiner Correspondance astronomique, vol. 11, pag. 150 erzählt — das gemeine Volk an dem Aberglauben hangen, daß jene Monate, welche mit einem Sonntage anfangen, Unglück mit sich führen, und dasselbe soll darum jene Jahre für besonders unglücklich halten, in denen drei Monate mit einem Sonntage beginnen. Welche Jahre hat nun der abergläubische Theil der Bewohner dieser Stadt am meisten zu fürchten?

Da hier der gregorianische Kalender gebraucht wird, so mag es genügen, in den dafür geltenden Ausdrücken $h =$ Sonntag $= 1$ und $t = 1$, folglich $i = 0$ und $L = 4$ oder $i = 1$ und $L = 7$ zu setzen. Man findet so die Gemeinjahre, welche den Sonntagsbuchstaben 4 oder D haben,

$$\alpha \equiv 4\, r\frac{-r\frac{s}{4} - 2}{7} + a, \ \mathrm{mod}\, 28, \ a \equiv 17, \ 6, \ 23 \equiv -11, -22, -5$$

und die Schaltjahre, denen der Sonntagsbuchstabe 7 oder G zukommt,

$$\alpha \equiv 4\, r\frac{-r\frac{s}{4} + 3}{7}, \ \mathrm{mod}\ 28$$

$$a \equiv 100s + \alpha.$$

Auch hier werden alle vierte Jahrhunderte die nemlichen Jahre die angeführte Eigenschaft besitzen. Solche Jahre sind nun:

1609, 12, 15, 26; 37, 40, 43, 54; 65, 68, 71, 82; 93, 96, 99;
1705, 8, 11, 22; 33, 36, 39, 50; 61, 64, 67, 78; 89, 92, 95;
1801, 4, 7, 18; 29, 32, 35, 46; 57, 60, 63, 74; 85, 88, 91;
1903, 14, 25, 28; 31, 42, 53, 56; 59, 70, 81, 84; 87, 98.

Anmerkung. Diese Aufgabe löste zuerst de Ciccolini, dem sie Baron Zach in einem Briefe vorgelegt hatte, in der Correspondance astron. vol. 11. pag. 152. Nach ihm ist

$$\alpha = -4\, r\frac{s}{4} + 9 + 3n + 11n^{I} + 3n^{II} + 11n^{III} + 3n^{IV} + 11n^{V} + 3n^{VI},$$

und man berechnet die Jahre α des $s+1^{ten}$ Jahrhundertes, indem man erstlich die 7 veränderlichen Zahlen $n, n^{I}, n^{II}, \ldots n^{VI}$ sämmtlich Null sein läßt, nachher die erste Zahl zuvörderst auf 1 und dann auf 2 erhöht; darauf indem man den höchsten Werth $n = 2$ fortan beibehält, auch die zweite Zahl n^{I} zuerst auf 1 und dann auf 2 erhöht, und auf dieser Höhe bleibend erhält; sofort in

gleicher Weise die dritte, vierte, und alle übrigen jener Zahlen schrittweise auf 1 und auf 2 erhebt, worauf sie dann auch fortan stehen bleiben. Dabei werden jedoch negative Zahlen und die Null ausgestoßen. — Wahrscheinlich fand Ciccolini diesen Ausdruck auf empirischem Wege, indem er aus Tafeln der Sonntagsbuchstaben die Reihe der Jahre von der geforderten Eigenschaft bestimmte, und zu dieser Reihe das allgemeine Glied mittels der Unterschiedsreihen suchte.

B. Berechnung des Osterfestes.

79.

Ostern (pascha), das Hauptfest der Christenheit, wird zum Andenken an Christi Auferstehung an einem Tage im Frühling gefeiert, der theils nach dem scheinbaren Sonnenlaufe, theils nach dem Mondlaufe sich richtet und in einem Zeitraume von 5 Wochen herumwandert.

Die Regeln zur Bestimmung des Osterfestes haben sich nur sehr allmälig fest gestellt; weswegen wir in gedrängter Kürze das wichtigste darauf einschlägige Geschichtliche einfließen lassen werden.

80.

Allmälige Gestaltung der Principien der Osterfeier.

Schon zu den Zeiten der Apostel feierten die Bekenner zur christlichen Lehre allwöchentlich den Sonntag zur Erinnerung an Christi Auferstehung; zugleich wollten sie diese bedeutungsvolle Begebenheit selbst alljährlich zu jener Zeit, wo sie nach der Tradition und den Evangelien sich zugetragen hatte, feierlich sich ins Gedächtniß zurückrufen; was jedoch, weil die Apostel darüber nichts fest gesezt hatten, nicht anders als sehr verschieden geschehen konnte.

Die Christen von jüdischer Abkunft feierten nach ihrer früheren Gewohnheit das Passahfest zur Erinnerung an den Auszug ihrer Voreltern aus Aegypten, indem sie am 14. Tage des ersten Frühlingsmonats, Nisan genannt, — welcher wie jeder andere ihrer Monate mit einem Neumonde, d. h. an demjenigen Abende anfing, wo die Mondsichel am westlichen Himmel wieder erschien, — also am Tage des ersten Vollmondes im Frühlinge, des sogenannten Frühlingsvollmondes, das Osterlamm, jedoch mit einer christlichen Bedeutung genoßen; theils weil es auch Christus mit seinen Jüngern zu dieser Zeit (wenn gleich das lezte Mal um einen Tag früher) genossen hatte, theils weil sie das jüdische Osterlamm als ein Vorbild Christi betrachteten. Zählt man nun, wie es in der christlichen Festrechnung zu geschehen pflegt, die Tage des synodischen Mondmonates vom Tage des Neumondes, diesen selbst als den ersten rechnend, mit den (lateinischen) Ordnungszahlen als **Luna prima, secunda, tertia etc.** und nennt diese das jedesmalige Alter des Mondes; so aßen die Juden das Passahmal an der **Luna quarta decima.**

Den folgenden Tag, die Luna quinta decima, beobachteten sie, zur Gedächtniß an den Freitag der Leiden Christi, als Buß- und Fasttag; und an dem dritten Tage, der Luna sexta decima, feierten sie, welcher Wochentag es auch sein mochte, die Auferstehung Christi. — Dieser Gebrauch überging von den Judenchristen auch auf die mit ihnen in Berührung gestandenen Heidenchristen, welche in Syrien, Mesopotamien und Kleinasien wohnten.

Die übrigen christlichen Gemeinden dagegen, welche nicht in solchen Verhältnissen lebten, erklärten sich gegen die jüdischen Ceremonialgeseze, und hielten nur wöchentliche Feste, nemlich den Sonntag, zur Erinnerung an Christi Auferstehung, als Freuden- und Dankfest, und den Freitag, zum Andenken an Christi Leiden, als Buß- und Fasttag. Im Frühlinge hoben sie, in dieser Rücksicht, noch einen Sonntag und Freitag besonders hervor und stifteten so das Osterfest der Heidenchristen, mit dem kein Passahmal in Verbindung stand. Weil nun dieses christliche Passah mit dem jüdischen zusammenhing, und das jüdische Osterlamm allemal am ersten Vollmondstage im Frühling genossen wurde; so knüpfte sich das christliche Osterfest auch an diesen Vollmond, weswegen man ihn den Frühlings- oder Ostervollmond nannte. Allein diese christlichen Gemeinden wollten das Auferstehungs-Passah, welches sie vor dem Kreuzigungs-Passah hervorhoben, jederzeit an einem Sonntage, dem Wochentage, an welchem Christus auferstanden war, feiern; deswegen wählten sie dazu den nächsten Sonntag nach dem Frühlingsvollmonde, der nemlich am Tage der Frühlingsnachtgleiche oder zunächst nach derselben eintritt; wobei sie das Fest, um es ja nicht zugleich mit den verhaßten Juden zu feiern, um acht Tage verschoben, so oft der Frühlingsvollmond selbst auf einen Sonntag traf.

Mit diesen Sazungen begnügten sich jedoch nur die griechischen christlichen Gemeinden, unter denen die alexandrinische (zu Alexandria in Aegypten) die vornehmste und angesehenste war; die lateinischen Christengemeinden dagegen, unter denen die römische (zu Rom) den Vorrang behauptete, forderten, daß Ostern nicht vor der Luna XVI, als dem Alter des Mondes, bei welchem Christus auferstanden war, aber auch nicht nach dem 21 April (XI Cal. Maii) gefeiert werde; weil an diesem Tage das uralte Freudenfest der Gründung Roms, die Parilia, mit circensischen Spielen gefeiert wurden, welche wohl gehalten werden durften, wenn das Osterfest auf den 21 April selbst fiel, da das christliche Fest, so wie das heidnische, der Freude gewidmet war, nicht aber in der Charwoche, in welche sie kamen, wenn Ostern nach dem 21 April traf.

Denjenigen Tag, vor und an dem das Osterfest nicht gehalten werden darf, sondern nach welchem es immer gefeiert werden muß, nennen die

kirchlichen Festrechner (Computisten) die Ostergrenze (terminus paschalis) Daher war bei den griechischen Christen der Ostervollmondstag oder die Luna XIV selbst, bei den lateinischen dagegen der Tag darnach, d. i. die Luna XV, die Ostergrenze.

Aber nicht blos diese allgemeinen, sondern auch, und noch mehr, die besonderen Grundsäze über die Bestimmung des Tages des Osterfestes schieden die christlichen Gemeinden in die jüdische, griechische und lateinische. Die jüdischen Christen beobachteten, gleich den Juden selbst, den Neumond unmittelbar, und fingen an dem Abende, wo sie ihn wahrnahmen, ihren neuen Monat an; was ihnen zur Bestimmung ihres Passahfestes, das jedesmal auf den 14. Tag im ersten Frühlingsmonate traf, vollkommen genügte. Die anderen christlichen Gemeinden bedienten sich aber einer kyklischen Berechnung der Neumonde, zu denen sie dann den jedesmaligen Vollmond berechneten, indem sie zum Tage des Neumondes immer 13 hinzu zählten; weil, wenn der Neumondstag selbst, nach der Gewohnheit der älteren Völker, als der erste gerechnet wird, in der Regel der Vollmond am vierzehnten Tage des Mondmonates, d. i. an Luna XIV eintritt. Da sie jedoch die Neumonde anfangs nach dem sehr fehlerhaften achtjährigen Mondkreise, später die alexandrinische Gemeinde nach dem schon sehr genauen 19jährigen, die römische aber erstlich nach einem noch immer zu wenig genauen 84jährigen und nachher erst gleichfalls nach dem 19jährigen Mondkreise wiederkehren dachten; so gaben ihre Rechnungen nicht immer die nemlichen Neumonde, folglich auch nicht dieselben Vollmonde, auf einerlei Tag an. Endlich kam dazu noch ihre Verschiedenheit in der vermeinten Festsezung des Tages der Frühlingsnachtgleiche. Im dritten Jahrhunderte n. Chr., wo sich diese Osterrechnung ausbildete, traf die Frühlingsnachtgleiche meistens auf den 21 März. Darum sezten die Alexandriner den 21 März *) als den Tag der Frühlingsnachtgleiche, folglich auch als ihren frühesten Ostervollmondstag, oder als ihre früheste Ostergrenze, und sofort den 22 März **) als den frühesten Ostersonntag für immer fest; obgleich sie — bei denen die ausgezeichnetsten Astronomen des Alterthums, Hipparch und Ptolomäus, gelebt und gelehrt hatten, daß das mittlere bürgerliche Sonnenjahr von 365$\frac{1}{4}$ Tagen, dessen sich die Aegypter damals nach dem Beispiele der Römer bedienten, um etwas länger als das tropische Jahr sei — wohl hätten wissen sollen, daß die Frühlingsnachtgleiche nicht immer an diesem Tage haften, sondern nach und nach früher eintreten werde. Die Römer hingegen sezten die Frühlingsnachtgleiche und damit den frühesten Ostervollmond (Luna XIV) auf den 18 März, folglich

*) d. i. den 25 Phamenoth der Aegypter.

**) d. i. den 26 Phamenoth.

die früheste Ostergrenze (Luna XV) auf den 19 März, und das früheste Osterfest (Luna XVI) auf den 20 März.

81.

a. Osterrechnung der Alexandriner und nachmals der gesammten Christenheit nach der julianischen Jahrform.

Osterregel. Dem eben Gesagten gemäß hielt sich die alexandrinische Christengemeinde, bei ihrer Berechnung des Osterfestes, an folgende Grundsäze:

1. Ostern ist an dem Sonntage zunächst nach dem Frühlingsvollmonde zu feiern, folglich wenn dieser Vollmond selbst auf einen Sonntag trifft, am nächst folgenden Sonntage. Der Frühlingsvollmond (Luna XIV) ist selbst die Ostergrenze.

2. Die Frühlingsnachtgleiche, also auch der früheste Frühlings- oder Ostervollmond, oder die früheste Ostergrenze, tritt am 21 März, mithin die früheste Osterfeier am 22 März ein.

Mondkreise. Nach der Kirchengeschichte des Eusebius soll Dionysius, Bischof von Alexandrien, zwischen 248 und 265 nach Chr. einen achtjährigen Osterkanon aufgestellt haben. Allein man weiß nicht, von welcher Beschaffenheit der zum Grunde gelegte achtjährige Mondkreis war; denn dieser wurde sehr bald durch den neunzehnjährigen Mondkreis verdrängt, welchen zuerst Anatolius, von Geburt ein Alexandriner und ums Jahr 270 nach Chr. zum Bischof von Laodicea gewählt, zur Bestimmung des Osterfestes benüzte. Anatolius entwarf seinen Kanon im Jahre 277 n. Chr., wo der Frühlingsvollmond auf den 4 April und der Neumond vor ihm, der Osterneumond, auf den 22 März traf. Er sezte die Frühlingsnachtgleiche auf den 19 März, also die früheste Osterfeier auf den 20 März. Diese Angaben reichen jedoch nicht hin, seine Osterrechnung wieder herzustellen. Ob sein 19jähriger Mondkreis irgendwo zur Osterrechnung angewendet wurde, weiß man nicht sicher; allein so viel ist gewiß, daß er bald nachher diejenigen Modificationen erfahren hat, mit denen er seit dem Ende des dritten Jahrhunderts n. Chr., und nachmals von der ganzen Christenheit gebraucht wurde.

82.

Fortsezung. Bestimmung der Ostergrenze.

1. Durch Anordnung des 19jährigen Mondkreises. Um nun den Tag des Ostervollmondes und der Ostergrenze zu bestimmen, handelte es sich darum, die während des 19jährigen Mondkreises eintretenden 235 Neumonde gehörig zu vertheilen und in jedem Jahre denjenigen Mondmonat zum Ostermonat zu machen, dessen Luna XIV an oder zunächst nach der Frühlingsnachtgleiche oder dem 21 März eintrat. Nun traf in dem Jahre, welches die Alexandriner zum ersten ihres Kyklus wählten, wie sie vielleicht

aus unmittelbarer Beobachtung fanden, der erste Neumond auf den 23 Januar und der Ostervollmond auf den 5 April. — Ein solches war unter anderen, wie die astronomische Nachrechnung mittels Mondstafeln bestätigt, das Jahr 285 n. Chr., das erste der Regierung des Kaisers Diocletian, von deren Anfange die unter römischer Herrschaft gestandenen Alexandriner ihre Jahre fortlaufend zählten. Dadurch wird es zugleich einiger Maßen wahrscheinlich, daß die Osterrechnung der Alexandriner unter der Regierung dieses Kaisers (284 — 305 n. Chr.) entstanden ist. — Gingen nun die alexandrinischen Anordner der Osterrechnung vom 5 April um ein gemeines Mondjahr von 354 Tagen weiter, so erhielten sie den 25 März als Ostergrenze des zweiten Jahres. Nach weiteren 354 Tagen gelangten sie zum 14 März, den sie aber nicht zur Ostergrenze machen konnten, weil er der Nachtgleiche (21 März) vorangeht. Sie mußten also einen Mondmonat weiter zählen, und indem sie diesem 30 Tage beilegten, fanden sie den 13 April als Ostergrenze des dritten Jahres. Auf solche Weise bald um ein 354tägiges gemeines Mondjahr, bald um ein 384tägiges Schalt-Mondjahr vorschreitend, je nachdem es die Rücksicht auf die Nachtgleiche erforderte, bestimmten sie die Ostergrenze durch alle neunzehn Jahre oder goldenen Zahlen des Mondkyklus; wie die erste und achte Spalte der im Anhange abgedruckten Tafel 2 ausweist, deren noch unbekannte Rubriken im Folgenden ihre Erklärung erhalten werden. Diese achte Spalte läßt zugleich leicht überschauen, daß die früheste Ostergrenze im 16ten Jahre des Mondkreises der 21 März und die späteste im 8ten Jahre der 18 April ist.

Auf die julianischen Schalttage nahm man bei der Bestimmung der Ostergrenze keine Rücksicht, oder vielmehr man machte in den julianischen Schaltjahren den hohlen Mondmonat, in welchen der Schalttag (24 Februar) traf, voll, folglich das Mondjahr selbst um diesen einen Tag länger, nemlich 355 oder 385 Tage lang.

So rückt die Ostergrenze von einem Jahre zum anderen, während eines gemeinen Mondjahres um 365 — 354 = 366 — 355 = 11 Tage zurück, oder während eines Schalt-Mondjahres um 384 — 365 = 385 — 366 = 19 Tage vor. Nur wenn man von der Ostergrenze des neunzehnten Jahres, dem 17 April, zu jener des ersten Jahres, dem 5 April, von dem sie ausging, zurückkehrt, rückt sie um 12 Tage zurück. Diesen ausnahmsweisen größeren Rückschritt nennen die lateinischen Kirchenrechner Dionysius und Beda den **saltus lunae**.

Als die Jahre des Mondkreises, in denen ein Monat eingeschaltet wird, damit die Ostergrenze nicht vor die Frühlingsnachtgleiche trete, ergeben sich, nach obiger Rechnung, wie auch die Tafel 2 im Anhange zeigt, die sieben Jahre 3, 6, 8, 11, 14, 17, 19, welche auch Dionysius ausdrücklich

als die Schaltjahre des Osterkreises aufführt. Der Schaltmonat hält immer 30 Tage, nur im 19ten Jahre hat er 29.

Ein solcher 19jähriger Mondzyklus muß demnach, ohne Rücksicht auf die julianischen Schalttage $19.354 + 6.30 + 29 = 6935$ Tage enthalten. Mithin enthalten 4 solche Mondkreise oder 76 Jahre, weil in ihnen 19 julianische Schalttage vorkommen, $4.6935 + 19 = 27759$ Tage. Gerade so viel zählen auch 19 julianische vierjährige Schaltkreise, deren jeder 1461 Tage in sich faßt, oder 76 julianische Jahre. Dies ist aber auch die Länge der berühmten 76jährigen Mondperiode des Kallippus, die wir bei den Athenern näher kennen lernen werden. Sie also wurde der alexandrinischen Ostervollmonds-Rechnung zum Grunde gelegt. Die $4.235 = 940$ synodischen Monate aber, welche sie enthalten soll, betragen $940.29{\cdot}53058829 = 27758{\cdot}7530$ Tage, also um 0·2470 Tage weniger. Daher gibt der Mondkreis der Alexandriner die Neumonde um einen Tag zu spät an nach $76 : 0{\cdot}2470 = 308$ Jahren, folglich hätte man nach $q\frac{308}{19} = 16$maliger Wiederholung des Mondkreises oder nach $16.19 = 304$ Jahren mit Hipparch einen Tag weglassen sollen.*)

Um nun das Datum des Ostervollmondes oder der Ostergrenze allgemein arithmetisch auszudrücken, bemerke man, daß im ersten Jahre des Mondkreises die Ostergrenze auf den 5 April traf, den man auch als den 36 März ansehen kann, und daß sie alljährlich um 11 Tage, mithin bis zur goldenen Zahl N oder dem N^{ten} Jahre des Mondkreises um $N - 1$ Mal 11 Tage zurückweicht, dafür aber auch wieder um e Schaltmonate oder $30e$ Tage vorrückt, wenn jenem N^{ten} Jahre e Schaltjahre vorangehen. Die Ostergrenze dieses Jahres trifft daher auf den $36 - 11(N - 1) + 30e$ März. Sie soll aber auch nie vor die Frühlingsnachtgleiche oder vor den 21 März, folglich immer auf den $21 + p$ März treffen, wofern p mit Einschluß der Null eine positive ganze Zahl vorstellt, die jedoch auch unter 30 bleiben muß, weil längstens nach 30 Tagen der folgende Vollmond eintritt. Daher muß e so bemessen werden, daß

$$21 + p = 36 - 11(N - 1) + 30e$$

und $p = 0, 1, 2, 3, \ldots 29$ ausfalle. Diese Bedingung liefert den Abstand des Ostervollmondes oder der Ostergrenze von der Frühlingsnachtgleiche (21 März)

$$p = 26 - 11N + 30e$$

also $p \equiv 26 - 11N, \bmod 30 \equiv -11N - 4 \equiv 19N - 4, \bmod 30$

$$= r\frac{-11N-4}{30}. \quad **)$$

*) Vergl. die Zeitrechnung der Athener.

**) Die Reste von positiven oder negativen Vielfachen der Zahl 11 nach dem Theiler oder Modul 30, welche in der Osterrechnung häufig vorkommen, lassen sich leichter auf folgendem kürzeren Wege finden.

Für $N=8$ ergibt sich der größte Werth $p=28$, dagegen für $N=16$ [cut off] kleinste $p=0$.

Der Ostervollmond oder die Ostergrenze des N^{ten} Jahres im Mo[cut off] kreise tritt demnach um

(154) $$p \equiv -11\,N-4, \text{ mod } 30 = r\frac{-11\,N-4}{30} \text{ Tage}$$

später ein als die Frühlingsnachtgleiche oder der 21 März, mithin am

$$21+p \text{ März} = p-10 \text{ April};$$

wofür wir kurz

(155) $\text{Ostergrenze} = p+21 \text{ März} = p-10 \text{ April}$

schreiben werden.

In einem Jahre a nach Chr. ist vermöge §. 49, III, (72)

$$N = R\frac{a+1}{19} = r\frac{a}{19}+1,$$

daher wird hier

(156) $$p = r\frac{-11\,r\frac{a}{19}\pm 15}{30} \equiv -11\left(r\frac{a}{19}\pm 15\right)$$

$$\equiv 11\left(15-r\frac{a}{19}\right) \equiv -11\left(r\frac{a}{19}-15\right), \text{ mod } 30.$$

83.

Fortsezung.

2. Bestimmung der Ostergrenze mittels des immerwä[cut off] renden Kalenders. Um die Ostervollmonde in der gewöhnlichen Wei[cut off]

Es ist allgemein

$$11m=(1+10)\,m=m+10\,m=m\pm 10(\pm m)=m\pm 10\left(3\,r\frac{\pm m}{3}+r\frac{\pm}{3}\right.$$

$$=m\pm 30\,q\frac{\pm m}{3}\pm 10\,r\frac{\pm m}{3}, \text{ also}$$

$$\equiv m\pm 10\,r\frac{\pm m}{3}, \text{ mod } 30$$

Nun kann blos $r\frac{m}{3}=0,\quad 1,\quad 2$

also $\pm r\frac{\pm m}{3}=0,\quad 1,\quad -1$

oder $m\equiv 0,\quad 1,\quad -1, \text{ mod } 3$

sein; daher ist $11\,m\equiv m,\ m+10,\ m-10, \text{ mod } 30.$

Anstatt demnach von 11m einen Rest nach dem Modul 30 zu suchen, bestim[cut off] man ihn, wenn m durch 3 theilbar ist, von m; wenn m durch 3 getheilt 1 zum R[cut off] gibt, von m + 10; endlich, wenn m durch 3 getheilt 2 oder — 1 zum Reste gi[cut off] von m — 10.

Ist dagegen von — 11m oder 19m ein Rest nach dem Modul 30 zu such[cut off] so bestimmt man ihn zuerst von 11m und ergänzt ihn auf 30; oder man ergänzt von m auf 30 und sucht den Rest von 11 (30 — m); denn es ist

$$-11\,m\equiv 19\,m\equiv 30-r\frac{11\,m}{30}\equiv 11\,(30-m). \text{ mod } 30.$$

deren sich die kirchlichen Festrechner, vermuthlich schon seit Dionysius Exiguus (530 n. Chr.) bedienen, nemlich aus den ihnen nächst vorangehenden Osterneumonden zu berechnen, bestimmten die Chronologen die Tage der Neumonde in sämmtlichen 19 Jahren des Mondkyklus. Nun traf im ersten Jahre desselben der Ostervollmond auf den 5 April, also der Osterneumond um 13 Tage früher auf den 23 März, daher um 59 oder 60 Tage vorher, je nachdem das julianische Jahr ein Gemein- oder Schaltjahr war, der erste Neumond auf den 23 Januar. Von diesen zählten sie nun abwechselnd 29 und 30 Tage weiter; nur zuweilen, damit die kyklischen Neumonde mit den wirklichen genauer zusammen treffen, auch zwei 30tägige Monate nach einander; und schrieben das jedesmalige Jahr des Mondkyklus dem Monatstage bei, auf den ein Neumond kam. Diese Jahrzahlen wurden nachmals im Mittelalter güldene Zahlen — numeri aurei — genannt, ohne daß sich ein sicherer Grund dieser Benennung nachweisen läßt. So sezten sie einen vermeintlich immerwährenden Kalender der Neumonde zusammen, den man auch den julianischen nennt, weil ihm das Jahr des Julius Cäsar zu Grunde liegt, der jedoch, wie oben (§. 82) gezeigt wurde, alle 308 Jahre die Neumonde um 1 Tag, also gegenwärtig, nach mehr als 1500 Jahren seit der Anordnung des Mondkyklus, um 5 Tage zu spät angibt, folglich seinen Beinamen nicht verdient. Man findet ihn in vielen Büchern, z. B. in Ideler's Handbuch der Chronologie, in Christian Wolff's Chronologie.

An den Himmel war der julianische immerwährende Kalender, so wie der 19jährige Mondkreis der Alexandriner, dadurch geknüpft, daß man ihn in einem Jahre anfing, in welchem der erste Neumond auf den 23 Januar fiel.

In ihm tritt nun, weil man auch hier den dreizehnten Mondmonat in derselben Weise, wie bei dem Mondkyklus erörtert wurde, einschaltete, der erste Neumond im Januar von einem Jahre zum anderen um 11 Tage früher oder um 19 Tage später, nur bei dem Uebergange vom lezten Jahre eines Kyklus zum ersten des folgenden um 12 Tage früher ein. Mithin rückt er vom 23 Januar, auf den er im ersten Jahre fällt, bis zum N^{ten} Jahre um $11(N-1)$ Tage zurück, dagegen, wenn bis dahin e Schaltmonate von 30 Tagen eingeschaltet werden, um $30e$ Tage vorwärts. Gibt demnach die Zahl w an, auf den wie vielten Januar der erste Neumond des N^{ten} Jahres im Mondkreise trifft, so hat man

$$w = 23 - 11(N-1) + 30e.$$

Da hier w blos von 1 bis 30 reichen kann, weil der dem ersten Neumonde vorangehende Mondmonat immer zu 30 Tagen angenommen wird, so ist

$$w \equiv -11N + 4, \text{ mod } 30 = R\frac{-11N+4}{30}.$$

Hinter diesem w_{ten} Januar, auf den der erste Neumond des Jahres trifft, um zwei Mondmonate später, von denen der eine immer 30, der andere $29 + i$ Tage erhält, wenn i die Anzahl der Schalttage des julianischen Jahres vorstellt, folglich am $w + 59 + i^{ten}$ Tage des Jahres oder am w März tritt der dritte Neumond ein. Dieser oder der nächst folgende vierte Neumond, der entweder um 29 oder 30 Tage vom dritten absteht, muß der Osterneumond sein; weil der früheste Ostervollmond am 21 März, also der früheste Osterneumond um 13 Tage früher, d. i. am 8 März eintreten kann. Und zwar ist der dritte Neumond selbst der Osterneumond, wenn er nicht vor dem 8 März eintritt, also wenn $w \geqq 8$ ist; dagegen muß der vierte Neumond zum Osterneumond gemacht werden, so oft der dritte vor den 8 März fällt, also $w < 8$ ist; was, wie man sich leicht überzeugen kann, im 3., 8., 11., 19. Jahre des Mondkreises geschieht. In diesen vier Jahren nun läßt man den vierten Neumond vom dritten um 30, in allen übrigen Jahren aber nur um 29 Tage abstehen, oder man nimmt dort den dritten Mondmonat voll, hier hohl. Somit trifft der Osterneumond im ersten Falle auf den w März, im anderen auf den $w + 30$ März $= w - 1$ April; folglich überhaupt auf den $w + 30\varphi$ März, wofern φ den Umständen angemessen 0 oder 1 gilt.

Andererseits fällt der Ostervollmond nie vor den 21 März, also immer auf den $21 + p$ März, wofern $p = 0, 1, \ldots 29$ ist, daher der um 13 Tage ihm vorangehende Osterneumond auf den $8 + p$ März $= p - 23$ April. Mithin muß

$$8 + p = w + 30\varphi,$$

und sofort

$$p = w - 8 + 30\varphi,$$

daher der Abstand der Ostergrenze vom 21 März

$$p \equiv w - 8, \bmod 30 = r\frac{w-8}{30}$$

sein. Setzt man hiemit obigen Ausdruck von w in Verbindung, so erscheint wie früher

$$(154) \qquad p \equiv -11N - 4, \bmod 30 = r\frac{-11N-4}{30}.$$

84.

Fortsezung.

3. Bestimmung der Ostergrenze mittels der Epakten. Ein weiteres Mittel zur Bestimmung der Oster-Neu- und Vollmonde bieten die Epakten. Unter Epakte eines Jahres versteht man aber das Alter des Mondes zu Anfang des 1 Januars dieses Jahres, nemlich die Anzahl der beim Anfang des 1 Januars vom Mondmonate verflossenen Tage oder auch die Zahl, welche angibt, der wie vielte Tag des Mondmonates der 0 Januar ist. Anstatt des 1 Januars kann allgemein auch irgend ein anderer bestimmter

Tag des Jahres festgesezt werden. — Die Computisten des Mittelalters übersezten Epakte durch adjectio lunae, und die deutschen Chronologen durch Mondzeiger. — Trifft ein Neumond auf den angenommenen Epochentag der Epakten selbst, so sezt man in der kirchlichen Festrechnung als Epakte entweder 30 oder 0, je nachdem man das Alter des Mondes von dem Anfange des eben endigenden oder beginnenden Mondmonates zählt; weil zu Anfang jenes Epochentages 30 Tage des eben beschlossenen oder noch kein Tag des anfangenden Mondmonates abgelaufen sind, oder weil der Tag vor jener Epoche der 30ste des beendigten oder der nullte des neu anhebenden Mondmonates ist. Man rechnet demnach jederzeit den vorausgehenden, bis an die Epoche oder darüber hinaus reichenden Mondmonat voll, zu 30 Tagen. Zwar bedienten sich weder die Alexandriner, noch die ihre Osterregel befolgenden älteren, noch auch die mittelalterlichen Kirchenrechner bei der Bestimmung der Ostervollmondstage der Epakten, obwohl die lateinischen Festrechner, so lange sie sich an ihre, von der alexandrinischen abweichende, Osterregel hielten, dieselben zu diesem Zwecke verwendeten; sondern erst die Kalender-Reformatoren unter Papst Gregor XIII brachten die Epakten in der Osterrechnung in Gebrauch. Da nun warf man sich die Fragen auf, von welcher Beschaffenheit die Epakte am 1 Januar hätte sein müssen, um mittels ihrer nach der alexandrinischen Osterregel die Ostergrenze zu bestimmen, und wie sich sonstige Epakten zu demselben Zwecke verwenden ließen.

α. Will man, um die erste Frage zu erledigen, die der alexandrinischen Ostervollmondsrechnung zu Grunde liegende Epakte vom 1 Januar, oder die alexandrinische Epakte, die mit E' bezeichnet werden soll, ermitteln; so hat man blos zu bedenken, daß (nach §. 83) im N^{ten} Jahre des alexandrinischen 19jährigen Mondkyklus der erste Neumond am $w = \mathfrak{R}\frac{-11N+4}{30}$ten Januar eintritt, folglich der 30. Tag des aus dem vorhergehenden Jahre herüber reichenden Monates mit dem $w-1^{ten}$ Januar übereinkommt. Mithin sind zu Anfang des 1 Januars

$$30-(w-1)=E'$$

Tage vom Mondmonate verflossen, oder der 0 Januar ist der Tag

$$30-(w-1)=E'$$

des Mondmonates. Somit findet sich die alexandrinische Epakte

$$E'=31-w,$$

So wie nun $w=1, 2, \ldots 30$ ist, eben so muß auch $E'=30, 29, \ldots 1$, mithin $E' \equiv 1-w, \bmod 30 = \mathfrak{R}\frac{1-w}{30}$ sein. Verbindet man demnach hiemit obigen Ausdruck von w, so ergibt sich

$$E' \equiv 31+11N-4, \bmod 30$$

oder

$$(157) \qquad E' \equiv 11N - 3, \text{ mod } 30 = R\frac{11N-3}{30},$$

wornach sich die alexandrinische Epakte unmittelbar aus der goldenen Zahl berechnen läßt, wie sie die vierte Spalte der 2. Tafel im Anhange zur ersten Spalte derselben darbietet.

Umgekehrt findet sich aus der alexandrinischen Epakte E' das Datum des ersten Neumonds im Jahre oder im Januar

$$(158) \qquad w = 31 - E' \equiv 1 - E', \text{ mod } 30 = R\frac{1-E'}{30},$$

ferner der Abstand der Ostergrenze von dem 21 März

$$(159) \qquad p = r\frac{w-8}{30} = r\frac{-E'-7}{30}.$$

β. Dionysius, und nach ihm Beda, gebraucht in den Ostertafeln Epakten, welche das Alter des Mondes nicht wie sonst am 1 Januar, sondern am 23 März, dem Tage des Osterneumondes im ersten Jahre des Mondkreises bezeichnen, oder angeben, der wie vielte Tag des Mondmonates auf den 22 März, den frühesten Tag der Osterfeier, trifft.*) So trifft im ersten Jahre des Mondzyklus der Osterneumond auf den 23 März; folglich ist der 22 März der 30. Tag des zweiten Mondmonates oder der 0. Tag des dritten, des Ostermonates; also die Epakte 30 oder 0. Im zweiten Jahre fällt der Osterneumond oder der erste Tag des Ostermonates auf den 12 März, sonach ist der 22 März der 11. Tag im Ostermonat, und daher 11 die Epakte. Das Mittelalter gebrauchte diese dionysische Epakte als ein Zeitmerkmal der Jahre in seiner Datirung. Erforscht man, wie sie mit der goldenen Zahl in Verbindung steht und zur Ermittlung der Ostergrenze dienen könne, so sei E'' ihr Zeichen. Nun tritt, vermöge §. 83, der dritte Neumond oder der 1. Tag des dritten Mondmonates im N^{ten} Jahre des Mondkreises am w^{ten} März ein; soll demnach der E''^{te} Tag dieses Mondmonates am 22 März sein, so muß, vermöge Vorbegr. XVII, (75), die Gleichung

$$E'' - 1 = 22 - w$$

bestehen, folglich

$$E'' = 23 - w$$

sein. Fällt hier für $w > 23$ die Zahl $E'' = -(w - 23)$ negativ aus, so erfährt man durch sie, am wie vielten Tage nach dem 23 März der dritte Mondmonat anfängt, während sie sonst angibt, am wie vielten Tage vor dem 23 März dieser Monat beginnt.

---

*) Beda erklärt sie in seiner Abhandlung De ratione temporum, c. 48, mit folgenden Worten: Quae in circulo decemnovennali aduotatae sunt epactae, lunam, quota sit in XI. Cal. Apriles, ubi paschalis est festi principium, signant.

Verbindet man mit dieser Gleichung obigen Ausdruck von w, aus §. 83, und nimmt man die Epakte stets positiv und nicht über 30, so erfolgt

$$(160)\quad E'' \equiv 23 - w \equiv - w - 7 \equiv 11(N-1),\ \text{mod } 30 = \mathfrak{R}\frac{11(N-1)}{30}$$

als Ausdruck der dionysischen Epakte durch die goldene Zahl; mit welchem die fünfte Spalte der im Anhange stehenden zweiten Tafel übereinstimmt.

So ist z. E. in dem Beispiele zu §. 50, 2. im Jahre 1109 n. Chr. der cyclus decemnovalis $N = 8$ gewesen, daher seine epacta $\equiv 11\ (8-1) \equiv 10 + 7 \equiv 17$, mod 30, wie die Urkunde angibt. Dagegen hat das Jahr 1152 n. Chr. in dem Beispiele zu §. 50, 3. die goldene Zahl $N \equiv 1153 \equiv 13$, mod 19, also die dionysische Epakte $\equiv 11.\ 12 \equiv 12$, mod 30, nicht aber 23, wie die Urkunde angibt, und welche dem folgenden Jahre zukommt. *)

Umgekehrt ergibt sich aus der dionysischen Epakte E'' das Datum des ersten Neumondes im Jahre oder im Januar

$$w \equiv -E'' - 7,\ \text{mod } 30 = \mathfrak{R}\frac{-E''-7}{30},$$

folglich vermöge (159) die Hinausrückung der Ostergrenze über den 21 März

$$p = \mathfrak{r}\frac{w-8}{30} = \mathfrak{r}\frac{-E'' \pm 15}{30}.$$

85.

Fortsezung.

Claves terminorum. Als Hilfszahl zur Angabe des Datums der Ostergrenze führten die christlichen Computisten im Mittelalter die Claves terminorum ein, die sich auch hin und wieder in den Urkunden erwähnt finden, und die Zahl angeben, welche zum 10 März addirt das jedesmalige Datum des Ostervollmondes oder der Ostergrenze liefert. Es ist nemlich

(161) Ostergrenze = (Clav. term. + 10) März = (Clav. term. — 21) April.

Nun wurde aber früher (§. 82) gefunden

(155) Ostergrenze $= p + 21$ März $= p - 10$ April;

folglich erhält man

(162) Clav. term. $= p + 11$.

Drückt man p durch die goldene Zahl N aus, so findet man

$$(163)\quad \text{Clav. term.} = \mathfrak{r}\frac{-11N-4}{30} + 11,$$

den Ausdruck der Claves terminorum durch die goldene Zahl, wornach die zehnte Spalte der Tafel 2 im Anhange gerechnet ist.

---

*) Vergl. Ideler Handb. d. Chron. 2. Bd., S. 370, wo dieselbe Abweichung angeführt wird.

Z. B. Im Jahre 1152 n. Chr. ist die goldene Zahl $N = 13$, daher $p \equiv -143 - 4 \equiv -147, \bmod 30 \equiv 3$ und Clav. term. $= 3 + 11 = 14$, wie die Urkunde in §. 50, 3, Beisp. angeführt.

Für ein Jahr a n. Chr. besteht vermöge §. 49, (72)

$$N = \mathfrak{R}\frac{a+1}{19} = \mathfrak{r}\frac{a}{19} + 1,$$

also sind

$$(164) \qquad \text{Clav. term.} = \mathfrak{r}\frac{-11\mathfrak{r}\frac{a}{19} \pm 15}{30} + 11.$$

86.

Fortsezung.

Wochentag der Ostergrenze. Bezeichnet f den Wochentag oder die Ferie des Ostervollmondes oder der Ostergrenze, welche dem Vorhergehenden gemäß auf den $21 + p$ März $= p - 10$ April fällt, so hat man in der Tafel des §. 72 für den Monat März $t = 21 + p \equiv p, \bmod 7$ zu sezen, folglich erhält man

$$(165) \qquad f \equiv p - L - 3, \bmod 7,$$

wenn L den Sonntagsbuchstaben vorstellt. Will man statt desselben die Concurrente C, d. i. den Wochentag des 24 März oder 1 Septembers, oder den Wochentag H des 0 Januars, oder den Sonnencirkel S einführen, so findet man vermöge §. 67, (115) und §. 69, (118)

$$(166) \qquad f \equiv p + C - 3 \equiv p + H + i + 3$$
$$\equiv p + S + \mathfrak{Q}\frac{S}{4} - 3, \bmod 7.$$

Für ein Jahr a nach Chr. hat man insbesondere vermöge §. 82, (156) und §. 66, (109)

$$p = \mathfrak{r}\frac{-11\mathfrak{r}\frac{a}{19} \pm 15}{30}$$
$$L \equiv 2\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3a + 3, \bmod 7;$$

daher ist der Wochentag der Ostergrenze

$$(167) \qquad f \equiv \mathfrak{r}\frac{-11\mathfrak{r}\frac{a}{19} \pm 15}{30} + 3a - 2\mathfrak{r}\frac{a}{4} + 1, \bmod 7.$$

Will man zur Bestimmung dieses Wochentages den Wochenbuchstaben ν des Tags der Ostergrenze benüzen; so hat man in §. 60, (92)

$$d = 21 + p \text{ März} = 59 + 21 + p = 80 + p \text{ im Gemeinjahre;}$$

also ist der Wochenbuchstabe der Ostergrenze

$$\nu \equiv 80 + p, \bmod 7 \equiv p + 3$$

oder

$$\nu \equiv \mathfrak{r}\frac{-11N - 4}{30} + 3, \bmod 7;$$

und sofort der Wochentag der Ostergrenze

$$(168)\qquad f \equiv \nu - (L - 1),\ \text{mod } 7.$$

Diese Wochenbuchstaben liefert die elfte Spalte der Tafel 2 im Anhange.

87.

Fortsetzung.

Regulares paschae. Zur Bestimmung des Wochentags der Ostergrenze verwendeten die kirchlichen Festrechner im Mittelalter die, in manchen Urkunden vorkommenden, **Regulares paschae**, welche die Concurrente zum Wochentage der Ostergrenze ergänzen. Weil die Concurrente den Wochentag des 24 März angibt, so wird man, wenn man dieses Datum von dem der Ostergrenze abzieht, und wo nöthig 7 addirt, oder vom Unterschiede, so oft es angeht, 7 wegwirft, an dem Reste die **Regulares** erhalten.

Bezeichnet man nemlich mit C die Concurrente, so soll

$$(169)\qquad f \equiv C + \text{Regul.},\ \text{mod } 7$$

sein. Nach Obigem (§. 86) zeigte sich aber

$$f \equiv C + p - 3,\ \text{mod } 7;$$

mithin sind

$$(170)\qquad \text{Regul. pas.} \equiv p - 3,\ \text{mod } 7$$
$$\equiv (21 + p) - 24$$
$$\equiv \text{Datum der Ostergrenze} - 24\ \text{März}$$
$$\equiv \nu + 1.$$

Für die goldene Zahl N findet man sonach

$$(171)\qquad \text{Regul. pas.} \equiv r\frac{-11N - 4}{30} - 3,\ \text{mod } 7$$

und für ein Jahr a nach Chr.

$$(172)\qquad \text{Regul. pas.} \equiv r\frac{-11r\frac{a}{19} \pm 15}{30} - 3,\ \text{mod } 7.$$

Diese **Regulares** sind in der zwölften Spalte der Tafel 2 im Anhange aufgeführt.

Beispiel. In der, im Beispiele zu §. 50, 2, angeführten Urkunde ist $a = 1109 \equiv 7$, mod 19, also $p \equiv -11.7 \pm 15 \equiv -62$, mod $30 \equiv 28$. Hieraus folgt **terminus paschalis** $= 28 - 10 = 18$ **Aprilis** $=$ **XIV Cal. Maii**, und **regulares paschae** $\equiv 28 - 3$, mod $7 \equiv 4$; wie in der Urkunde.

Vergleicht man die **Regulares paschae** mit den **Claves terminorum**, indem man aus obiger Gleichung

$$(162)\qquad \text{Clav. term.} = p + 11$$

und aus der hiesigen Congruenz

$$(170)\qquad \text{Regul. pas.} \equiv p - 3,\ \text{mod } 7$$

die Zahl p mittels Subtraction eliminirt, so findet man

$$\text{Clav. term.} - \text{Regul. pas.} \equiv 0, \text{ mod } 7,$$

also

$$\text{Regul. pas.} \equiv \text{Clav. termin.}, \text{ mod } 7.$$

Die Regulares paschae sind demnach jederzeit die Reste der Claves terminorum nach dem Theiler 7.

88.

Fortsetzung.

Bestimmung des Datums der Osterfeier. Festzahl.

Da Ostern stets am Sonntage nach dem Ostervollmonde oder nach der Ostergrenze gefeiert wird, so wird man den Abstand b des Ostersonntages von der Ostergrenze bestimmen und zu dem Datum der Ostergrenze addiren; so daß man erhält

(173) $\text{Ostern} = 21 + p + b$ März $= p + b - 10$ April.

Weil nun auch das Osterfest jedesmal nach dem 21 März begangen wird, und alle anderen mit ihm zusammen hängenden beweglichen Feste in einem bestimmten Abstande ihm theils vorgehen, theils nachfolgen; so ist es zur Bestimmung der Data sämmtlicher beweglichen Feste sehr dienlich, den Abstand des Osterfestes von dem 21 März, d. i. die Anzahl der Tage, um welche Ostern nach dem 21 März gefeiert wird, oder die Zahl, welche angibt, am wie vielten Tage nach dem 21 März das Osterfest begangen wird, in Rechnung zu bringen, und zur Abkürzung der Rede mit einem besonderen Namen zu belegen; wozu sich die Benennung **Festzahl** empfiehlt, während sie sonst auch **Osternummer**, **Jahrescharakter** oder **Kalenderschlüssel** genannt wird. Da endlich diese Festzahl in der christlichen Festrechnung fast überall, besonders aber zum allgemeinen arithmetischen Ausdruck von Monats- und Wochentagen, sich verwenden läßt; so soll sie von uns unabänderlich mit demselben Buchstaben v bezeichnet, und dieser zu keiner weiteren Bezeichnung verwendet werden. Auf diese Weise fällt

Ostern auf den $v + 21$ März $= v - 10$ April,

wofür man kurz

(174) $\text{Ostern} = v + 21$ März $= v - 10$ April

sezen kann, und zugleich ist

(175) die Festzahl $v = p + b$.

Der Abstand b des Osterfestes von der Ostergrenze ergibt sich leicht daraus, daß das Osterfest an dem Sonntage zunächst nach dem Wochentage f der Ostergrenze, folglich, da jener Sonntag der 8. Tag nach demselben Samstage ist, nach welchem dieser Wochentag der f^{te} ist, um $8 - f$ Tage darnach gefeiert wird. Sonach ist

(176) $b = 8 - f$.

Weil ferner $f = 1, 2, \ldots 7$ ist, so findet sich
$b = 7, 6, \ldots 1$;

daher kann man auch

$$(177) \qquad b = \mathfrak{R}\frac{8-f}{7} = \mathfrak{R}\frac{1-f}{7} = 1 + \mathfrak{r}\frac{-f}{7}$$

setzen. Führt man hier den oben §. 86, (165) und (166) gefundenen Ausdruck

$$f = \mathfrak{R}\frac{p-L-3}{7} = \mathfrak{R}\frac{p+C-3}{7} = \mathfrak{R}\frac{p+S+\mathfrak{Q}\frac{S}{4}-3}{7}$$

ein, so findet man

$$(178) \qquad b = \mathfrak{R}\frac{-p+L-3}{7} = \mathfrak{R}\frac{-(p+C+3)}{7}$$

$$= \mathfrak{R}\frac{-(p+S+\mathfrak{Q}\frac{S}{4}+3)}{4}.$$

Dieser Abstand b läßt sich auch aus dem Wochenbuchstaben ν der Ostergrenze und aus dem Sonntagsbuchstaben L des betreffenden Jahres bestimmen. Hinter demjenigen Wochentage, nach welchem das Jahr anfing, ist der Wochentag der Ostergrenze der ν^{te}, der darnach folgende Sonntag aber entweder der L^{te} oder der $L+7^{te}$, je nachdem $L > \nu$ ist oder nicht. Da zugleich dieser Sonntag nie mit der Ostergrenze selbst zusammen fallen darf, folglich hinter ihr wenigstens der erste, aber auch höchstens der siebente Tag ist; so hat man

$$b = L - \nu \quad \text{oder} \quad = L + 7 - \nu \quad \text{und} \quad = 1, 2, \ldots 7,$$

folglich ist $\qquad b \equiv L - \nu, \text{ mod } 7 = \mathfrak{R}\frac{L-\nu}{7}.$

Von diesem Ausdrucke läßt sich leicht auf den obigen übergehen, da früher (§. 86) der Wochentag der Ostergrenze

$$(168) \qquad f \equiv \nu - L + 1, \text{ mod } 7$$

gefunden wurde, folglich

$$L - \nu \equiv 1 - f, \text{ mod } 7$$

sein muß.

In einem Jahre a nach Chr. hat man, vermöge §. 66, (108) und §. 67, (115),

$$L \equiv -C \equiv -a - \mathfrak{q}\frac{a}{4} + 3, \text{ mod } 7$$

$$\equiv 2\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3a + 3,$$

daher findet man den Abstand b des Osterfestes von der Ostergrenze

$$(179) \qquad b = \mathfrak{R}\frac{-\left(p+a+\mathfrak{q}\frac{a}{4}\right)}{7} = \mathfrak{R}\frac{2\mathfrak{r}\frac{a}{4}-3a-p}{7}.$$

Die Festzahl v, als der Abstand des Osterfestes von der Frühlingsnachtgleiche oder dem 21 März, läßt sich nun leicht aus den beiden Abständen p und b, der Ostergrenze vom 21 März und des Osterfestes von der Ostergrenze, zusammensezen; so daß man erhält

$$(175) \qquad v = p + b.$$

In einem Jahre a nach Chr. wird dieser Ausdruck der Festzahl, wenn man p und b vermöge (156) und (179) durch a ausdrückt,

$$v = r\frac{-11r\frac{a}{19} \pm 15}{30} + R\frac{2r\frac{a}{4} - 3r\frac{a}{7} - r\frac{-11r\frac{a}{19} \pm 15}{30}}{7}.$$

Besser ist es jedoch, zuerst zu dem angegebenen Jahre a die goldene Zahl

$$(72) \qquad N \equiv a + 1, \bmod 19 = R\frac{a+1}{19}$$

zu berechnen, daraus den Abstand der Ostergrenze vom 21 März

$$(154) \qquad p \equiv -11N - 4, \bmod 30 = r\frac{-11N-4}{30},$$

und hieraus den Abstand des Osterfestes von der Ostergrenze

$$(179) \qquad b \equiv 2r\frac{a}{4} - 3a - p, \bmod 7 = R\frac{2r\frac{a}{4} - 3a - p}{7};$$

dann ist die Festzahl selbst

$$(175) \qquad v = p + b$$

und

$$(174) \qquad \text{Ostern} = v + 21 \text{ März} = v - 10 \text{ April}.$$

Da p mit Uebergehung jeder dritten Zahl von 0 bis 28 reicht, b aber allen Anzahlen von 1 bis 7 gleicht, so kann die Festzahl sämmtlichen Anzahlen von 1 bis 35 gleich werden.

89.

Fortsezung.

Mittels Tafeln läßt sich die Festzahl auf mancherlei Weisen bestimmen. Eine bequeme und zu mannigfaltiger Auflösung verwendbare Tafel dürfte die im Anhange aufgestellte Tafel 2 sein; deren verticale Spalten die verschiedenen durch den 19jährigen Mondkreis bedungenen Hilfszahlen, die wagrechten Zeilen aber die von dem 28jährigen Sonnenkyklus abhängigen Zahlen enthalten. Kennt man demnach für ein angewiesenes Jahr sowohl eine jener auf den Mondlauf sich beziehenden Zahlen, mit Ausnahme der Wochenbuchstaben der Ostergrenze und der **Regulares paschae**, als auch eine der mit dem Sonnenlaufe zusammen hängenden Zahlen; so ist die geforderte Festzahl des Jahres in jenem Fache enthalten, wo sich die wagrechte und lothrechte Zeile

jener beiden Zahlen durchkreuzen. Am besten eignen sich zu diesem Zwecke, als am leichtesten zu bestimmen, einer der Mondcirkel (**cyclus decemnovalis** oder **cyclus lunaris**) und der Sonnencirkel.

Kennt man die Festzahl eines Jahres, so kann man in derselben Tafel ohne alle Rechnung die Festzahlen der folgenden Jahre finden. Man geht nemlich von jener Festzahl gerad herab und auf die nächste, oder, so oft man zu einem Schaltjahre kommt, auf die zweite rechts stehende Festzahl, folglich schräg abwärts von der Linken gegen die Rechte. Gelangt man auf diese Weise bis zum Rande, so denkt man sich die nächst tiefere Zeile über den Rand hinaus wiederholt, und übergeht also in das erste, oder bei Schaltjahren in das zweite Fach links. Ist man bis zur untersten Zeile herab gekommen, so denkt man sich dieselbe über die oberste Zeile gestellt, und übergeht auf diese in der beschriebenen Weise. Z. B. Im Jahre 868 war die goldene Zahl 14, und der Sonntagsbuchstabe C, folglich die Festzahl 28. Daher findet man für die nachkommenden Jahre die Festzahlen: 13, 5, 25; 9, 29, 21, 6; 25, 17, 2, 22; 13, 33, u. s. f.

Noch bequemer lassen sich die Festzahlen mittels der gleichfalls im Anhange abgedruckten Tafel 3, dem Verzeichnisse der alexandrinischen Festzahlen im julianischen Kalender, bestimmen. Diese beruht darauf, daß im julianischen Kalender — wie bereits in §. 51, IV, bemerkt wurde — alle 19 Jahre die Ostervollmondstage, und alle 28 Jahre die Sonntagsbuchstaben in derselben Reihenfolge wiederkehren, mithin auch alle 28. 19 oder 532 Jahre die Monatstage der Osterfeier, oder allgemeiner die Festzahlen, periodisch sich wiederholen. Die Jahre dieses so genannten 532jährigen Osterkreises, deren Zehner aus der ersten herab laufenden Spalte mit den Einern in der obersten Zeile zusammen gelesen werden, sind die ersten 532 Jahre nach Chr. oder die von den späteren Jahren nach Chr. zurück bleibenden Reste, wenn man von ihnen, so oft es angeht, 532 abzieht, oder sie durch 532 theilt. Der Osterkreis selbst beginnt demnach mit der gemeinen christlichen Aere, und mag darum der christliche heißen. Um also zu einem Jahre dieser Aere die Festzahl aus der Tafel zu entnehmen, sucht man zuvörderst das

Jahr des christl. Osterkreises $\equiv$ Jahr nach Chr., mod 532,

und zu ihm in der Tafel die Festzahl; oder man sucht die nächst kleinere in einer der sechs ersten Spalten stehende Zahl und ihre Ergänzung zur angegebenen Jahrzahl in der obersten Zeile; dann in ihrem gemeinschaftlichen Fache die Festzahl. Bei den Jahren einer anderen Aere, die sich gleichfalls der julianischen Jahrform bedient, muß man zuerst ihre Reduction auf die gemeine christliche Aere vorangehen lassen. Für die bisher erläuterten Aeren ergeben sich, vermöge (56), (58), (59), §. 48, I, II, III, §. 51, IV und V, folgende Ausdrücke:

mod 532

Jahr des christl. Osterkreises $\equiv$ Jahr der Erbauung Roms — 221
$\equiv$ Julianisches Jahr — 45
$\equiv$ Röm. Kaiserjahr — 27
$\equiv$ Byzantin. Weltjahr — 188
$\equiv$ Panodorisches Weltjahr — 172
$\equiv$ Jahr d. griech. röm. Periode — 173
$\equiv$ Jahr der jul. Periode + 75
$\equiv$ Jahr der victor. Osterperiode + 27
$\equiv$ Jahr d. dionys. Osterperiode — 1.

In allen Jahren dieser Aere ist dann

Ostern $= v + 21$ März $= v - 10$ April.

Fordert man endlich noch das Alter des Mondes am Ostersonntage, welches öfters in den Datis der Urkunden mit angeführt wird, die **Luna ipsius diei paschalis**; so erwäge man, daß der Ostervollmond oder die Ostergrenze an **Luna XIV**, daher das um b Tage spätere Osterfest an **Luna (XIV + b)** eintritt; es ist demnach

(180) **Luna ipsius diei pas. = Luna (XIV + b).**

90.

Fortsezung und Schluß.

Anwendungen.

Beispiel 1. Das in der Geschichte der Osterrechnung bemerkenswerthe Jahr 387 nach Chr. hatte die goldene Zahl $N \equiv 387 + 1 \equiv 388$, mod $19 \equiv 8$, die alexandrinische Epakte $E' \equiv 88 - 3 \equiv 85$, mod $30 \equiv 25$, die dionysische Epakte $E'' \equiv 11.7 \equiv 77$, mod $30 \equiv 17$, Abstand der Ostergrenze hinter dem 21 März $p \equiv -88 - 4 \equiv -92$, mod $30 \equiv 28$, daher Ostergrenze $= 28 - 10 = 18$ April, Wochenbuchstabe der Ostergrenze $v \equiv 28 + 3$, mod $7 \equiv 3 = C$; ferner den Sonnencirkel $\equiv 387 + 9 \equiv 396$, mod $28 \equiv 4$, und wegen $a = 387 \equiv 3$, mod $4 \equiv 2$, mod 7, den Sonntagsbuchstaben $L \equiv 2.3 - 3.2 + 3 \equiv 3$, mod $7 = C$ und die Concurrente $C \equiv -3$, mod $7 \equiv 4$. Daraus ergibt sich nunmehr der Wochentag der Ostergrenze $f \equiv 28 - 3 - 3$, mod $7 \equiv 1 =$ Sonntag, der Abstand des Osterfestes von der Ostergrenze $b = 8 - 1 \equiv \mathfrak{R}\frac{1-1}{7} = \mathfrak{R}\frac{3-3}{7} = 7$, daher die Festzahl $v = 28 + 7 = 35$. Dieselbe Festzahl findet man auch mittels der Tafel 2 im Anhange, da sie zur goldenen Zahl 8 und zum Sonnencirkel 4 oder zum Sonntagsbuchstaben C die Festzahl 35 liefert, welche die Tafel 3 im Anhange für das Jahr 387 in der Kreuzung der Zeile 380 und der Columne 7 sogleich darbieter. Dem gemäß ist im J. 387 nach Chr. Ostern am $35 - 10 = 25$ April gewesen.

Beispiel 2. Im Jahre 1109 nach Chr., welches die Urkunde in dem Beispiele zu §. 50, 2, anführt, ist die goldene Zahl, der cyclus decemnovalis ≡ 1110, mod 19 ≡ 8, daher p ≡ — 88 — 4 ≡ — 92, mod 30 ≡ 28. sofort terminus paschalis = 28 — 10 = 18 Aprilis = XIV Cal. Maii; andrerseits ist der cyclus solaris ≡ 1118, mod 28 ≡ 26, folglich der Sonntagsbuchstabe ≡ — 26 — 6 ≡ — 32, mod 7 ≡ 3 = C, und der Abstand b ≡ — 28 + 3 — 3, mod 7 ≡ 7. Hieraus findet sich die Festzahl v = 28 + 7 = 35, dies paschalis = 35 — 10 Aprilis = 25 Aprilis = VII Cal. Maii, und endlich luna ipsius = 14 + 7 = XXI; mithin Alles, wie es die Urkunde angibt. Ueberdies ist das Jahr des christl. Osterkreises ≡ 1109, mod 532 ≡ 45, und zu dieser Zahl 45 = 40 + 5, oder zu jener 1109 = 1104 + 5 gibt die Tafel 3 des Anhanges die Festzahl 35, wie früher.

Beispiel. 3. In Schönemann's Codex für die prakt. Diplomatik, Göttingen 1800, 1. Thl., S. 83, ist eine Schenkungsurkunde eines Angelsachsen also datirt: Hoc peractum est anno a Domini nostri natiuitate.

anni dni	indic.	Epac.	Concurr.	ciclos
DCCCCXCVIII	XI	XX	V	VIII
dies XIIII lun.	dies Pasce		Lun. ipsius	
XVII kal. Mai	XV kl. Mai		XVI.	

Nun ist im Jahre n. Chr. a = 998 die indictio ≡ 998 + 3 ≡ 1001, mod 15 ≡ 11, die goldene Zahl N ≡ 999, mod 19 ≡ 11, der cyclos (lunae) = 11 — 3 = 8, die Epacta (Dionysii) ≡ 11 (11—1) ≡ 110, mod 30 ≡ 20, der Abstand p ≡ — 11. 11 — 4 ≡ — 125, mod 30 ≡ 25, also Ostergrenze, dies XIIII lunae = 25 — 10 = 15 Aprilis = (32 — 15 =) XVII kal. Maii. Andrerseits ist a ≡ 998 ≡ 4. 249 + 2 ≡ 4, mod 7, also Concurrentes ≡ 4 + 249 — 3 ≡ 4 + 4 — 3, mod 7 ≡ 5, der Abstand b ≡ — (25 + 5 + 3) ≡ 2; daraus folgt die Festzahl v = 25 + 2 = 27, dies Pasce = 27 — 10 = 17 Aprilis = XV kal. Maii, und endlich Luna ipsius = 14 + 2 = XVI. Mithin sind alle Angaben der Urkunde richtig. Dieselbe Festzahl 27 gibt auch die Tafel 2 im Anhange zu dem Cyclus lunae 8 und den Concurrentes 5, und die Ostertafel 3 im Anhange zum Jahre 998 = 992 + 6 ≡ 466, mod 532 ≡ 460 + 6.

91.

b. Osterrechnung der Lateiner.

Osterregel. Nach dem in §. 80 Angeführten beobachtete die römische Christengemeinde bei der Berechnung des Datums der Osterfeier folgende Regeln:

1. Ostern ist an dem nächsten Sonntage nach dem, auf den Frühlingsvollmond (Luna XIV) folgenden, Tage (Luna XV), mithin wenn dieser

15. Tag des Ostermonates selbst auf einen Sonntag trifft, nicht an diesem, sondern am nächst folgenden Sonntage zu feiern. Die Ostergrenze ist demnach der 15. Tag des Ostermonates (**Luna XV**), der Tag unmittelbar nach dem Frühlingsvollmondstage.

2. Die Frühlingsnachtgleiche, also auch der früheste Frühlings- oder Ostervollmond, wird am 18 März, daher die früheste Ostergrenze am 19 März, und die früheste Osterfeier am 20 März angenommen.

3. Ostern darf nicht nach dem 21 April, dem Festtage der Gründung Roms (**Parilia**), gefeiert werden.

92.

Fortsetzung.

I. Osterrechnung des Hippolytus nach einem 8jährigen Mondkreise. Wie die römischen Christen vor dem dritten Jahrhunderte n. Chr. ihre Ostervollmonde und Ostersonntage bestimmten, ist unbekannt. Um das Jahr 222 n. Chr. gebrauchte Bischof Hippolytus, (wie die Inschrift der ihm zu Ehren errichteten marmornen Denksäule lehrt, welche man im J. 1551 n. Chr. bei Rom ausgrub), zur Aufstellung eines 112jährigen oder eigentlich eines doppelten 56jährigen Osterkanons, einen 16jährigen Mondkyklus, der jedoch blos ein doppelter 8jähriger Mondkyklus war. In jedem 8jährigen Mondkreise befanden sich 3 Schalt-Mondjahre mit einem 30tägigen Schaltmonate, und zwar vor Ostern der Jahre 1, 4, 7; daher die 8 Mondjahre $8.354 + 3.30 = 2922$ Tage in $8.12 + 3 = 99$ Monaten enthielten. Seinen ersten Mondkreis ließ er mit dem ersten Jahre des Kaisers Alexander Severus, d. i. mit dem Jahre 975 d. St. oder 222 n. Chr. anfangen; so daß auf das nächste julianische Schaltjahr 224 n. Chr. sein drittes Jahr fiel. In jedem seiner 8jährigen Mondkreise traf demnach das 3. und 7. Jahr auf ein julianisches Schaltjahr; und die 8 julianischen Jahre enthielten $8.365 + 2 = 2922$ Tage, genau so viel als jene 8 Mondjahre.

Das Jahr a n. Chr. war daher das Jahr $A = a - 221$ des Hippolytus oder seit Alexander Severus, folglich in seinem $Q\frac{A}{8} + 1^{ten}$ Mondkreise das $R\frac{A}{8}$te Jahr.

Im ersten Jahre des 112jährigen Osterkanons des Hippolytus, dem Jahre 222 n. Chr., ereignete sich der Ostervollmond, **Luna XIV**, am 13 April (**Idibus Apr.**), einem Samstage, wie man vermuthlich durch unmittelbare Beobachtung fand. Von diesem Jahre bis zum A^{ten} Jahre vergehen nun einerseits $A-1$ gemeine 354tägige Mondjahre, und weil vor Ostern der Jahre 4, 7, 1, d. i. im 3., 6., 8. Jahre jedes 8jähr. Mondkreises ein 30tägiger Monat eingeschaltet wird, folglich in XXII, 3, d. Vorb. $\varpi = 8$, $\varepsilon = 3$, $\Sigma\xi = 3 + 6 + 8 \equiv 1$,

mod 8, $\delta \equiv -2-1 \equiv -3$, mod 8 ist, noch $e = \mathfrak{q}\frac{3(A-1)}{8}$ Schaltmonate, daher im Ganzen $354(A-1)+30e$ Tage; andrerseits verfließen $A-1$ gemeine 365tägige Sonnenjahre und weil, nach dem ersten Jahre, in dem zweiten eines jeden vierjährigen Schaltkreises, ein Tag eingeschaltet wird, noch $\mathfrak{q}\frac{A+1}{4}$ Schalttage, mithin in Allem $365(A-1)+\mathfrak{q}\frac{A+1}{4}$ Tage. Daher rückt der Ostervollmond von dem 13 April oder 44 März, worauf er im 1. Jahre trifft, bis zum Jahre A des Hippolytus um

$$354(A-1)+30e-365(A-1)-\mathfrak{q}\frac{A+1}{4}\text{ Tage}$$

vor; mithin fällt er in diesem Jahre auf den $44-11(A-1)-\mathfrak{q}\frac{A+1}{4}+30e$ März. Er darf aber frühestens am 18 März, und weil der Schaltmonat 30 Tage enthält, nicht um 30, sondern höchstens um 29 Tage später, also spätestens am $18+29$ März $=18-2=16$ April eintreten. Bezeichnet demnach wieder die Zahl p, am wie vielten Tage nach der Frühlingsnachtgleiche, oder nach dem 18 März, der Ostervollmond eintritt; so muß

$$p = 0, 1, 2, \ldots 29 \text{ und}$$

Ostervollmond $=$ Luna XIV $= p + 18$ März $= p - 13$ April sein. Sonach hat man

$$18+p = 44-11(A-1)-\mathfrak{q}\frac{A+1}{4}+30e,$$

also
$$p = 7-11A-\mathfrak{q}\frac{A+1}{4}+30(e+1),$$

und endlich
$$p \equiv 7-11A-\mathfrak{q}\frac{A+1}{4}, \text{ mod } 30 = \mathfrak{r}\frac{7-11A-\mathfrak{q}\frac{A+1}{4}}{30}.$$

Setzt man hierin
$$A = 8\mathfrak{Q}\frac{A}{8}+\mathfrak{R}\frac{A}{8},$$

so findet man
$$p \equiv 7-88\mathfrak{Q}\frac{A}{8}-11\mathfrak{R}\frac{A}{8}-2\mathfrak{Q}\frac{A}{8}-\mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{A}{8}+1}{4}, \text{ mod } 30,$$

oder
$$p \equiv 7-11\mathfrak{R}\frac{A}{8}-\mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{A}{8}+1}{4}, \text{ mod } 30,$$

für das Jahr $\mathfrak{R}\frac{A}{8}$ jedes Mondkreises.

Auf diese Weise ergeben sich im 8jährigen Mondkreise folgende Ostervollmondstage:

	Jahr des Mondkreises							
$\mathfrak{R}\frac{A}{8} =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
	Ostervollmond nach d. 18 März							
$p =$	26,	15,	3,	22,	11,	0,	18,	7,
Ostervollmond $=$	13 Apr.,	2 A.,	21 Mart.,	9 A.,	29 M.,	18 M.,	5 A.,	25 M.

Im 1. Jahre des Hippolytus war der 13 April oder 44 März ein Samstag oder 7. Wochentag, folglich der 0 März am Wochentage $\equiv 7 - 44$, mod $7 \equiv 5$, d. i. an einem Donnerstage. Von diesem 0 März des 1. Jahres bis zu demselben Tage des A^{ten} Jahres verfließen aber, vermöge der obigen Untersuchung, $365(A-1) + q\frac{A+1}{4}$ Tage, und nach ihm ereignet sich der Ostervollmond am $18+p^{ten}$ Tage, also am Wochentage

$$\equiv 5 + 365(A-1) + q\frac{A+1}{4} + 18 + p, \text{ mod } 7$$

$$\equiv A + q\frac{A+1}{4} + p + 1, \text{ mod } 7,$$

oder auch $\equiv A + 7 - 11A + 30(e+1) + 1 \equiv -3(A-1) + 2e.$

Nun ist aber

$$3(A-1) = 8e + r\frac{3(A-1)}{8} \equiv e + r\frac{3(A-1)}{8}, \text{ mod } 7,$$

folglich der Wochentag des Ostervollmondes

$$\equiv A + q\frac{A+1}{4} + p + 1,$$

$$\equiv 3(A-1) - 2r\frac{3(A-1)}{8} \equiv q\frac{3(A-1)}{8} - r\frac{3(A-1)}{8}, \text{ mod } 7.$$

Diese Rechnungsausdrücke stimmen vollkommen mit der Tafel der Ostervollmonde überein, welche auf der oben erwähnten Bildsäule eingehauen ist. *)

Aus dem Gefundenen ergibt sich sogleich

Ostergrenze = Luna XV = $p + 19$ März = $p - 12$ April,

und Wochentag der Ostergrenze

$$f \equiv A + q\frac{A+1}{4} + p + 2 \equiv 3(A-1) - 2r\frac{3(A-1)}{8} + 1.$$

$$\equiv q\frac{3(A-1)}{8} - r\frac{3(A-1)}{8} + 1, \text{ mod } 7.$$

Aus diesem Wochentage findet man sofort wieder wie oben in (176) und (177) den Abstand b des Osterfestes von der Ostergrenze

$$b = 8 - f = R\frac{1-f}{7} = 1, 2, \ldots 7$$

$$\equiv -A - q\frac{A+1}{4} - p - 1 \equiv -3(A-1) + 2r\frac{3(A-1)}{8}$$

$$\equiv r\frac{3(A-1)}{8} - q\frac{3(A-1)}{8}, \text{ mod } 7;$$

folglich ist nach Hippolytus

Ostern = $p + b + 19$ März = $p + b - 12$ April.

Versteht man auch hier unter Festzahl den Abstand des Osterfestes hinter dem 21 März, und bezeichnet man sie gleichfalls mit v, so daß man auch hier

Ostern = $v + 21$ März = $v - 10$ April

---

*) Vergl. Ideler Handb. 2. Bd. S. 215.

setzt; so ist des Hippolytus Festzahl

$$v = p + b - 2 = p + 6 - f.$$

Weil nach dem Vorangehenden $p = 0, 3, 7, \ldots 26$ und $b = 1, 2, \ldots 7$ ist, so wird hier

$$v = -1, 0, 1, 2, \ldots 31,$$

und daher trifft die späteste Osterfeier auf den $31 - 10 = 21$ April, wie die lateinische Osterregel forderte.

Da sich in der Osterrechnung des Hippolytus der 8jährige Mondkreis, der 4jährige julianische Schaltkreis und die 7tägige Woche mit einander durch Variation verbinden; so muß die kleinste durch die drei Zahlen 8, 4, 7 theilbare Zahl, 56, angeben, nach wie viel Jahren das Datum des Osterfestes, also auch die Festzahl periodisch, d. i. in der früheren Abfolge, sich wiederholt. Der Osterkreis des Hippolytus bestand demnach aus 56 Jahren.

Zur leichteren Vergleichung seiner Osterrechnung mit jener der Alexandriner geben wir hier die Festzahlen seines ersten 56jährigen Osterkreises nach den Jahren seit Christi Geburt, auf welche sie trafen.

Festzahlen des Hippolytus.

Jahr n. Chr.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
220	.	.	31	16	7	27	12	4	23	8
230	28	20	4	24	16	1	20	12	25	17
240	8	21	13	5	17	9	29	14	5	25
250	10	2	21	6	26	18	2	22	14	— 1
260	18	10	30	15	6	26	11	3	22	7
270	27	19	3	23	15	0	19	11	.	.

Der 8jährige Mondkreis, dessen sich Hippolytus in seiner Osterrechnung bediente, enthielt, wie oben (S. 228) gefunden wurde, 2922 Tage in 99 Mondmonaten. Allein 99 synodische Monate zu 29·530588 Tagen betragen bereits 2923·528 Tage, folglich um 1·528 Tage mehr. Die Rechnung des Hippolytus gab demnach die Ostervollmonde zu früh an, und zwar nach 8 Jahren um $1\frac{1}{2}$, nach 16 Jahren um 3, nach 64 Jahren um 12 Tage zu früh; so daß das Osterfest nicht um die Zeit des vollen Lichtes, sondern nach und nach immer näher am neuen Lichte des Mondes gefeiert wurde. Hieraus erhellet, daß diese Osterrechnung nur als ein roher Versuch angesehen werden kann und bald wieder außer Gebrauch kommen mußte.

93.

Fortsetzung.

II. Osterrechnung eines Ungenannten nach einem 84jährigen Mondkreise. Seit dem 3. Jahrhunderte nach Chr., nach Einigen sogar schon seit 214, sicher aber von 298 bis 465, benützten die lateinischen Christen — wie die von Noris veröffentlichten Fasti consulares, deren unbekannter Verfasser um 354 nach Chr. lebte, und der von Muratori herausgegebene, vermuthlich dem 9. Jahrhunderte angehörige, Liber de Computo, erkennen lassen — zur Osterrechnung einen 84jährigen Mondkreis, welcher mit dem Jahre 298 nach Chr., oder wie Cyrillus angibt, vielleicht schon mit dem Jahre 214 anhob.

Ist demnach a ein Jahr nach Chr., so ist das ihm entsprechende Jahr A des 84jährigen Osterkreises $A \equiv a - (213;\ 297;\ 381;\ 465)$, mod $84 \equiv a + 39$. Daraus folgt auch $A \equiv a + 39$, mod $4 \equiv a + 3$, und weil, wenn a ein Schaltjahr sein soll, $a \equiv 0$, mod 4 sein muß, $A \equiv 3$, mod 4. In jedem solchen 84jährigen Osterkreise sind demnach jene Jahre julianische Schaltjahre, die durch 4 getheilt 3 zum Reste geben.

Die Neumonde berechnet der unbekannte Anordner dieser Osterrechnung aus der Epakte des 1 Januars, worunter er die Zahl versteht, welche angibt, der wie vielte Tag des laufenden Mondmonates der 1 Januar ist. In seinem 1. Jahre ist die Epakte 1, d. h. es trifft ein Neumond auf den 1 Januar, so daß das Mondjahr zugleich mit dem Sonnenjahre anfängt. Die Mondjahre rechnet er gewöhnlich zu 354 Tagen, und schaltet, so oft es nothwendig ist, damit der Ostervollmond nicht vor seinen frühesten Termin falle, einen 30tägigen Monat ein; nur jedem 12. Jahre, mit Ausnahme des letzten, ertheilt er um einen Tag weniger, also 353 oder 383 Tage, damit sich seine kyklischen Neumonde den astronomischen mehr annähern. Den julianischen Schalttag beachtet er nicht, oder vielmehr, er ergänzt mit ihm den hohlen Monat, in den er trifft, zum vollen, wornach er das Mondjahr selbst zu 355 oder 385 Tagen rechnet. Auf diese Weise wächst seine Epakte von einem Jahre zum anderen um $365 + i - (354 + i) = 11$, und nur nach jedem zwölften Jahre um 12. Dies nennt man den saltus lunae, und solcher gibt es 6, nemlich nach den durch 12 theilbaren 6 Jahren 12, 24, 36, 48, 60, 72 des Mondkreises. In dem Kyklus von 382 bis 465 nach Chr. dagegen verlegte man, zur Berichtigung des Datums der Neumonde, wahrscheinlich auf den Rath des Prosper Aquitanus, den saltus lunae auf jedes 14. Jahr, so daß er nach den durch 14 theilbaren 5 Jahren 14, 28, 42, 56, 70 des Mondkreises eintrat.

Berechnung der Epakten. Bezeichnet demnach **E** die Epakte des Jahres **A** der 84jährigen Periode der Lateiner, so wächst sie vom ersten Jahre an, wo sie 1 ist, jährlich um 11, also während der bis zum Jahre **A** vergehenden $A-1$ Jahre um $(A-1)11$, und nach jedem 12ten oder 14ten, folglich allgemein nach jedem 13 ∓ 1ten Jahre, mit Ausnahme des lezten, noch um 1 weiter, daher in Allem um $\mathfrak{G}\frac{A}{13\mp1}=\mathfrak{G}\frac{A-1}{13\mp1}$, wo das obere Zeichen auf die frühere, das untere auf die spätere Anordnung des **saltus lunae** sich bezieht. Werden zugleich bis zum A^{ten} Jahre e Schaltmonate zu 30 Tagen eingerechnet, so nimmt die Epakte gegentheilig wieder um 30e ab. Weil jedoch ein Mondmonat höchstens 30 Tage halten kann, so ist diese Anzahl e der Schaltmonate dergestalt zu bemessen, daß die Epakte **E** jedesmal positiv ausfalle und von 1 bis 30 reiche. Unter dieser Bedingung ist

$$E=1+11(A-1)+\mathfrak{G}\frac{A}{13\mp1}-30e=1,2,\ldots 30,$$

folglich
$$E\equiv1+11(A-1)+\mathfrak{G}\frac{A}{13\mp1},\ \text{mod}\ 30=1,2,\ldots 30$$

oder
$$E=\mathfrak{R}\frac{11(A-1)+\mathfrak{G}\frac{A}{13\mp1}+1}{30}.$$

Z. B. Jahr A =	68,	69,	70,	71,	72,	73,	74,	75,
frühere E =	23,	4,	15,	26,	7,	19,	30,	11,
spätere E =	22,	3,	14,	26,	7,	18,	29,	10.

Datum der Ostergrenze. Zur Berechnung der Neumonde im ganzen Jahre betrachtet man als ersten Monat des Mondjahres denjenigen, in welchen der erste Januar fällt. Ist nun **E** die Epakte, also der 1 Januar oder 32 December der E^{te} Tag im ersten Mondmonate, so fällt der 1. Tag oder der Neumond dieses Monates um $E-1$ Tage früher auf den $32-(E-1)=33-E$ December $=2-E$ Januar. Der erste Mondmonat wird immer voll, zu 30 Tagen gezählt, und von hier an wechseln die vollen und hohlen, 30 und 29tägigen Monate regelmäßig bis zu Ende des Jahres, so daß der lezte Monat im gemeinen Mondjahre hohl und im Schaltjahre voll ist. Nur der zweite Mondmonat, der in der Regel hohl ist, nimmt in julianischen Schaltjahren auch noch den Schalttag auf und wird dadurch voll, so daß er überhaupt $29+i$ Tage enthält. Auf diese Weise findet man, bei der Epakte **E**, den Anfang oder Neumond des

1. Mondmonates von 30 Tagen am $33-E$ December $=2-E$ Januar,
2. » » $29+i$ » » $32-E$ Januar,
3. » » 30 » » $30+i-E$ Febr. $=2-E$ März,
4. » » 29 » » $32-E$ März,
5. » » 30 » » $61-E$ März $=30-E$ April.

Der Osterneumond trifft daher entweder auf den $32 - E$ März oder auf den $32 - E + 29 = 61 - E$ März, also überhaupt auf den

$$32 - E + 29\,(0;\ 1)\ \text{März}.$$

Andrerseits tritt der Ostervollmond frühestens am 18 März, folglich wenn p eine positive Anzahl mit Einschluß der Null vorstellt, am $18 + p$ März, und sofort der Osterneumond um 13 Tage früher, also frühestens am 5 März und überhaupt am $5 + p$ März ein. Somit ist

$$5 + p = 32 - E + 29(0;\ 1)$$

und $p < 29$, also

$$p = 0, 1, 2, \ldots 28.$$

Daraus folgt $\quad p = 27 - E + 29\,(0;\ 1)$

also der Abstand des Ostervollmondes vom 18 März

$$p \equiv 27 - E,\ \text{mod}\ 29 \equiv -E - 2 = 0, \ldots 28,$$

oder $\quad p = \not{r}\frac{-E-2}{29}.$

Ist demnach p berechnet, so hat man

Osterneumond $=$ Luna I $= p + 5$ März $= p - 26$ April,
frühestens am 5 März, spätestens am 2 April;

Ostervollmond $=$ Luna XIV $= p + 18$ März $= p - 13$ April,
frühestens am 18 März, spätestens am 15 April;

Ostergrenze $=$ Luna XV $= p + 19$ März $= p - 12$ April,
frühestens am 19 März, spätestens am 16 April.

Wochentag der Ostergrenze. Die Lateiner berechnen die Wochentage stets aus der Ferie oder dem Wochentage des 1 Januars. Nun ist der 1 Januar des 1. Jahres in ihrem 84jährigen Mondkreise, wie z. B. des Jahres 298 nach Chr., ein Sonnabend, also der 0 Januar ein Freitag. Ferner ist jedes Jahr desselben Mondkreises, welches durch 4 getheilt 3 zum Reste gibt, ein Schaltjahr, also werden, vermöge §. 24, II, Beisp., bis zum Jahre A eingeschaltet $\not{q}\frac{A+4-1-3}{4}$ oder $\not{q}\frac{A}{4}$ Tage; und bis dahin verfließen

$$365\,(A - 1) + \not{q}\frac{A}{4}\ \text{Tage}.$$

Mithin ist der Wochentag des 0 Januars des Jahres A

$$H \equiv 6 + 365\,(A - 1) + \not{q}\frac{A}{4},\ \text{mod}\ 7$$

$$\equiv A + \not{q}\frac{A}{4} - 2 \equiv 3A - 2\not{r}\frac{A}{4} - 2,$$

und die Ferie des 1 Januars des Jahres A

$$F \equiv H + 1 \equiv A + \not{q}\frac{A}{4} - 1 \equiv 3A - 2\not{r}\frac{A}{4} - 1,\ \text{mod}\ 7.$$

Bezeichnet überdies i die Anzahl der Schalttage im Jahre A, so ist der Ostervollmondstag oder p + 18 März der (59 + i) + (p + 18) = 77 + p + i^{te} Tag im Jahre, und der Tag der Ostergrenze oder p + 19 März der 78 + p + i^{te} Tag im Jahre. Mithin ist der Wochentag des Ostervollmondes

$$\equiv H + 77 + p + i, \text{ mod } 7$$
$$\equiv H + p + i \equiv F + p + i - 1;$$

und der Wochentag oder die Ferie der Ostergrenze

$$f \equiv H + 78 + p + i, \text{ mod } 7$$

oder
$$f \equiv H + p + i + 1 \equiv F + p + i, \text{mod } 7 = 1, 2, \ldots 7.$$

Beachtet man noch, daß die Anzahl der Schalttage

$$i = q\frac{A+1}{4} - q\frac{A}{4}$$

ist, so wird

$$F + i \equiv H + i + 1 \equiv A + q\frac{A}{4} - 1 + q\frac{A+1}{4} - q\frac{A}{4}$$
$$\equiv A + q\frac{A+1}{4} - 1;$$

folglich ist der Wochentag der Ostergrenze

$$f \equiv A + q\frac{A+1}{4} + p - 1, \text{ mod } 7 = 1, 2, \ldots 7$$

oder auch, weil $q\frac{A+1}{4} \equiv 2(A+1) - 2r\frac{A+1}{4}$ ist,

$$f \equiv 3A - 2r\frac{A+1}{4} + p + 1, \text{ mod } 7 = 1, 2 \ldots 7.$$

94.

Fortsezung.

Datum des Osterfestes. Festzahl. Aus diesem Wochentage f der Ostergrenze ergibt sich nun wieder wie oben in (176) und (177) der Abstand b des Osterfestes von der Ostergrenze

$$b = 8 - f = R\frac{1-f}{7}$$

oder hier $b \equiv -A - q\frac{A+1}{4} - p + 2 \equiv 2r\frac{A+1}{4} - 3A - p$, mod 7.
$= 1, 2, \ldots 7.$

Mithin ist, so wie nach Hippolytus in §. 92, auch nach dem 84jährigen Osterkreise der Lateiner

$$\text{Ostern} = p + b + 19 \text{ März} = p + b - 12 \text{ April},$$

die Festzahl der Lateiner überhaupt

$$v = p + b - 2 = p + 6 - f,$$

und auch nach der Rechnung der Lateiner, so wie sonst immer,

$$\text{Ostern} = v + 21 \text{ März} = v - 10 \text{ April};$$

endlich der Mondmonatstag am Ostersonntage

Luna ipsius diei paschalis = Luna (XV + b).

Im Zusammenhange dienen also zur Berechnung der Festzahl der Lateiner nach dem 84jährigen Osterkreise folgende Gleichungen:

mod 84

Jahr d. 84jähr. Mondkr. $A \equiv$ Jahr nach Chr. — (213, 297; 381, 465),
$\equiv$ Jahr d. St. R. — (966, 1050; 1134, 1218),
$\equiv$ Röm. Kaiserj. — (240, 324, 408, 492);

Epakte $\quad E \equiv 11\,(A - 1) + \mathrm{q}\frac{A}{13 \mp 1} + 1, \text{ mod } 30 = 1, 2, \ldots 30;$

Abstände $\quad p = \mathrm{r}\frac{-E-2}{29},$

$$b \equiv -A - \mathrm{q}\frac{A+1}{4} - p + 2 \equiv 2\mathrm{r}\frac{A+1}{4} - 3\mathrm{r}\frac{A}{7} - p, \text{ mod } 7$$
$$= 1, 2, \ldots 7;$$

Festzahl $\quad v = p + b - 2.$

Noch ist auf die den Römern eigenthümliche spätere Grenze des Osterfestes Bedacht zu nehmen, zu Folge deren sie Ostern nicht nach dem 21 April feiern wollten. Da $p = 0, 1, \ldots 28$ und $b = 1, 2, \ldots 7$, folglich die Festzahl $v = -1, 0, 1, \ldots 33$, ist, so hätte man Ostern = 20 März, 21 März, ... 23 April; folglich könnte, für $v - 10 > 21$ oder $v > 31$, also für $v = 32$ und 33, Ostern nach dem 21 April, namentlich auf den 22 und 23 April treffen. Dies ereignet sich in den Jahren 36 und 68 des 84jährigen Osterkreises, oder in den Jahren 333, 360, 417, 444 nach Chr. In solchen Jahren müssen, so wie v einen der beiden höchsten Werthe annimmt, auch p und b einen ihrer zwei höchsten Werthe $p = 27$ oder 28 und $b = 7$ oder 6 erhalten. Dann nimmt auch die Epakte E ihre zwei größten Werthe $E = 29$ oder 28 an; folglich fällt der Osterneumond auf den 1 oder 2 April, und er ist sonach der 5. Neumond im Jahre; der 4. Neumond dagegen tritt am 3 oder 4 März ein. Eigentlich sollte nun der 5. Neumond das Osterfest bedingen, weil der 4te vor der herkömmlich fest gestellten Grenze, dem 5 März, liegt. Bei einer solchen Collision der Osterregeln achtete man die, daß Ostern nicht nach dem 21 April, oder das Geburtsfest der Stadt Rom nicht in die Charwoche falle, für höher, als die andere, daß der Osterneumond nicht vor den 5 März oder der Ostervollmond nicht vor den 18 März treffe; und machte darum den 4. Neumond, welcher auf den 3 oder 4 März fiel, zum Osterneumond. Die Rechnung hat daher in einem solchen Falle blos von dem sich ergebenden zu großen Werthe von p die Zahl 29 der Tage des 4. Mondmonates abzuziehen; wornach die Abstände $p = 27$ und 28 in $p = -2$ und -1 übergehen.

Für die Jahre $A = 36, \quad 63,$
findet man, wenn der saltus lunae immer im 12. Jahre eintritt,
die Epakte $E = 28, \quad 28,$
daher den Abstand $p = 28, \quad 28,$
und den anderen Abstand $b = 6, \quad 7,$
mithin die Festzahl $v = 32, \quad 33,$
und da diese zu groß ist, den berichtigten Abstand $p = -1, \quad -1.$
und $b = 7, \quad 1,$
daher die berichtigte Festzahl $v = -4, \quad -2.$

Berechnet man endlich nach der hier gelehrten Weise, sowohl bei dem zwölftjährigen als auch bei dem vierzehntjährigen saltus lunae, die Festzahlen für den vollen 84jährigen Osterkreis der Lateiner und sezt, zur leichteren Vergleichung derselben mit den alexandrinischen Festzahlen, diesen Jahren auch noch diejenigen Jahre nach Chr. bei, in denen sie sicher in Anwendung kamen; so erhält man folgende Oster- oder Festzahlentafel. Aus ihr ersieht man zugleich, daß die nach der späteren Stellung des saltus lunae berechnete Festzahl, welche auch als die spätere angesezt ist, von der entsprechenden früheren blos in den 9 Jahren, 13, 40, 50, 63, 67, 70, 73, 77, 82 des Mondkreises abweicht, und nur das lezte Mal, im Jahre 82 des Mondkreises, um 4 Wochen kleiner, sonst immer um eine Woche größer ist.

Vergleicht man diese Festzahlen der Lateiner mit jenen der Alexandriner, so findet man, daß sie während des ersten Kyklus in 13 Jahren um eine Woche länger, in 8 Jahren um vier, und in dem einen Jahre 63 oder 360 n. Chr. sogar um 5 Wochen kürzer als die griechischen Festzahlen waren.

84jährige Tafel der Festzahlen der lateinischen Kirche.

Jahr des Kyklus.	Jahr nach Chr.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
. .	297	381	. .	27	19	3	23	15	0	19	11	31
10	307	391	16	7	27	12; 19	4	23	15	28	20	11
20	317	401	31	16	8	27	12	4	24	8	28	20
30	327	411	5	24	16	1	21	12	4	17	9	28
40	337	421	13 ; 20	5	25	16	1	21	13	25	17	9
50	347	431	22 ; 29	13	5	25	10	29	21	6	26	17
60	357	441	2	22	14	—2; 5	18	10	30	14; 21	6	26
70	367	451	11 ; 18	2	22	7; 14	27	18	10	23; 30	15	6
80	377	461	26	11	31; 3	22	7	. .	. .	. .	. .	. .

Die 84 julianischen Jahre oder 21 vierjährigen Schaltkreise dieser Osterperiode enthalten 21. 1461 = 30681 Tage; die dazwischen fallenden 1039 synodischen Monate zu 29·530588 Tagen dagegen 30682·28 Tage. Der von den Lateinern gebrauchte Mondkreis gibt also an seinem Schlusse die Neumonde jedesmal um mehr als einen Tag zu früh an. In der That gab er im Jahre 457 n. Chr., dem 76sten des Kyklus, die Epakte 22, also am 11 December 456 einen Neumond, während der mittlere Neumond am 13 December eintrat.

95.

Fortsezung.

III. Osterrechnung des Victorius nach einem 19jährigen Mondkreise.

Nachdem man in der lateinischen Kirche inne geworden war, daß der 84jährige Mondkreis die Neumonde zu früh angebe, arbeitete im Jahre 457 nach Chr. Victorius aus Aquitanien einen neuen Osterkanon aus, in welchem er die früheste Ostergrenze, gleich den Alexandrinern, auf den 21 März sezte, und einen 19jährigen Mondkreis, wie die Alexandriner, benüzte. Dadurch gestaltete er seinen (19. 4. 7 =) 532jährigen Osterkreis, nach dessen Ablauf die Neu- und Vollmonde nicht blos auf dieselben Monats-, sondern auch auf die nemlichen Wochentage, in der früheren Ordnung, zurückkehren, mithin die Ostertage, und überhaupt die Festzahlen, in vollkommen gleicher Folge, sich erneuern. Dieser Osterkanon wurde höchst wahrscheinlich vom Papste Hilarius, der den Victorius zur Ausarbeitung desselben aufgefordert hatte, im Jahre 465 n. Chr. eingeführt, wo der 84jährige Kyklus der Lateiner ablief.

Anordnung des Mondkreises. Victorius behielt das bei den Lateinern übliche Verfahren, die Osterfeier mittels der Epakte und des Wochentags des 1 Januars zu bestimmen, bei. Nur in der Bestimmung der Epakten beobachtete er die Grundsäze der Alexandriner, indem er den saltus lunae weder nach 12, noch nach 14 Jahren, wie im 84jährigen Mondkyklus, sondern erst nach je 19 Jahren anbrachte. Allein wenn man seine 532jährige Osterperiode in 19jährige Abschnitte theilt, und die Jahre derselben einzeln nummerirt, so trifft in dieser der saltus allemal auf den Schluß des sechzehnten Jahres. Denn Victorius wollte eigentlich, um eine vollständige Uebersicht vom Laufe der Zeiten zu geben, seinen Kanon mit der mosaischen Schöpfung anheben lassen, und zählte das Jahr 457 n. Chr. oder das 430ste seiner Periode, in welchem er diese construirte, als das 5658. Jahr seiner Weltäre, (vergl. §. 51, IV, b,); daher ist, vermöge (83) in XVIII der Vorbegr.,

Jahr der victor. Weltäre — übereinstimmendes Jahr seiner Osterper.
$\equiv 5658 - 430$, mod $532 \equiv 5228$, mod $19 \equiv 3 \equiv -16$.
Wenn nun nach jedem 19ten (durch 19 theilbaren) Jahre der victorischen Weltäre der **saltus lunae** statt findet, mithin das Jahr der victorischen Weltäre $\equiv 0$, mod 19 ist, so hat man
übereinstimmendes Jahr der vict. Osterper. $\equiv 16$, mod 19;
folglich tritt der **saltus** immer im 16. Jahre des victorischen Mondkyklus ein, der mit seiner Osterperiode zugleich anfängt.

Die Epakten des victorischen Mondkreises lassen sich auf folgende Weise berechnen. Victorius sezte seine Epakten dergestalt an, daß im Jahre 457 n. Chr., dem 430sten seiner Osterperiode, und dem $R\frac{430}{19} = 12^{ten}$ seines Mondkyklus, weil am nächst vorhergehenden 13 December der mittlere Neumond um 7 Uhr 35 Minuten Morgens römischer Zeit eintrat, die Epakte 20 bestand. Sei nun A ein Jahr des Osterkanons, und $A - 16 \equiv \alpha$, mod 19, nemlich nach dem 16. Jahre des Kanons sei es das α^{te} in einem 19jährigen Mondkreise. Ferner sei im 17. Jahre jedes Mondkreises oder für $\alpha \equiv 17 - 16 \equiv 1$, mod 19 die noch unbekannte Epakte ε; so muß die victorische Epakte E, da sie vom 17. Jahre an jährlich um 11 wächst, und man immer, so oft es angeht, 30 wegwirft,

$$E \equiv \varepsilon + 11(\alpha - 1),\ \text{mod } 30$$

sein. Zur Bestimmung von ε bemerke man, daß nach dem Obigen $E = 20$ für $A \equiv 12$, also für $\alpha \equiv 12 - 16 \equiv 15$, mod 19 ist; daher hat man $20 \equiv \varepsilon + 11 . 14$, mod $30 \equiv \varepsilon + 4$, folglich $\varepsilon \equiv 16$. Wird dieser Werth substituirt, so erfolgt

$$E \equiv 16 + 11(\alpha - 1),\ \text{mod } 30.$$

Beachtet man nun noch, daß vermöge der Annahme

$$\alpha \equiv A - 16,\ \text{mod } 19 = R\frac{A+3}{19}$$

ist, so erhält man die victorische Epakte

$$E \equiv 11\, R\frac{A+3}{19} + 5,\ \text{mod } 30.$$

Victorius behandelt im zweiten Jahre seines Mondkreises den Mondmonat, der am 2 Januar anfängt, als den ersten; folglich betrachtet er den 1 Januar dieses Jahres als den nullten Tag dieses Mondmonates, oder er nimmt hier 0 zur Epakte. Mithin ist überhaupt seine Epakte

$$E = 0, 1, \ldots 29$$

und allgemein

$$E = r\frac{11\, R\frac{A+3}{19} + 5}{30}.$$

Ostergrenze. Victorius leitet aus der Epakte des 1 Januars auf dieselbe Weise, wie oben (§. 93) der unbekannte Anordner des 84jährigen Mondkreises, die Neumonde der nach einander folgenden Mondmonate her. Der Osterneumond aber ist ihm, wie bei den Alexandrinern, derjenige, welcher das Osterfest zunächst nach dem 21 März, dem Tage der Frühlingsnachtgleiche, gibt. Der früheste Ostervollmond, die **Luna XIV paschalis**, ist ihm demnach der 20 März, und die früheste Ostergrenze, die **Luna XV**, wie bei den Alexandrinern, der 21 März; denn der alten Maxime seiner Kirche, das Osterfest nicht vor **Luna XVI** zu feiern, bleibt er getreu. Der früheste Osterneumond trifft daher bei ihm auf den 7 März, und sonach, wenn wieder p den Abstand des Ostervollmondes vom 20 März oder des Osterneumondes vom 7 März vorstellt, allgemein der Osterneumond auf den $7+p$ März. Da dieser aber auch so, wie oben (§. 93) im 84jährigen Mondkreise, auf den $32-E+29(0;\,1)$ März trifft; so hat man

$$7+p=32-E+29(0;\,1).$$

Hieraus folgert man den Abstand

$$p\equiv 25-E-4,\ \text{mod}\ 29=0,1,\ldots 28$$

oder

$$p=\text{r}\frac{-E-4}{29}.$$

Darnach ist

Osterneumond = Luna I = $p+7$ März = $p-24$ April,
Ostervollmond = Luna XIV = $p+20$ März = $p-11$ April,
Ostergrenze = Luna XV = $p+21$ März = $p-10$ April;

Der 19jährige Mondkyklus des Victorius gestaltete sich sonach folgender Maßen:

Jahr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Epakte	19	0	11	22	3	14	25	6	17	28	9	20	1	12	23	4	16	27	8
Abstand p=	6	25	14	3	22	11	0	19	8	26	16	5	24	13	2	21	9	27	17.

Um ihn mit dem 19jährigen Mondkyklus der Alexandriner zu vergleichen, sei a das mit dem Jahre A der victorischen Osterperiode zusammen fallende Jahr n. Chr.; so ist, vermöge §. 51, IV, b,

$$a\equiv A+27,\ \text{mod}\ 532,$$

also auch $a\equiv A+27,\ \text{mod}\ 19\ \equiv A+8.$

Ferner, wenn N die goldene Zahl oder das Jahr des Mondkyklus der Alexandriner vorstellt, ist

$$N\equiv a+1,\ \text{mod}\ 19;$$

daher hat man $N\equiv A+9\ \equiv \text{R}\frac{A}{19}+9,\ \text{mod}\ 19,$

also dem Jahre $\text{R}\frac{A}{19}=1$ entsprechend $N=10$. Der Mondkreis des Victorius beginnt also im 10. Jahre des alexandrinischen Mondkreises.

Vergleicht man in beiden Mondkreisen die Abstände p der Ostergrenze vom 21 März, d. i. obige Werthe von p mit jenen der neunten Spalte der Tafel 2 im Anhange, so stimmen sie in den ersten 9 Jahren, dann nur noch im 17. und 19. Jahre des victorianischen Mondkreises überein, während in den 6 Jahren von 11 bis 16 im victorianischen der Abstand p um einen Tag größer, dagegen in den 2 Jahren 10 und 18 um einen Tag kleiner als im alexandrinischen Mondkreise ausfällt. Der Grund davon liegt in der verschiedenen Bestimmungsweise der Neumonde.

Wochentag der Ostergrenze. Im 1. Jahre der victorianischen Osterperiode, dem Jahre 28 nach Chr., war der 1 Januar ein Donnerstag oder eine 5. Ferie, und in den vierjährigen julianischen Schaltkreisen dieser Periode ist jedesmal das erste das Schaltjahr; daher sind vor dem Jahre A der Periode $q\frac{A+2}{4}$ Schaltjahre, und von jenem 1 Januar des Jahres 1 bis zum 1 Januar des Jahres A verfließen

$$365\,(A-1)+q\frac{A+2}{4}\ \text{Tage.}$$

Hieraus folgt die Ferie des 1 Januars im Jahre A

$$F\equiv 5+365\,(A-1)+q\frac{A+2}{4},\ \text{mod } 7,$$

oder
$$F\equiv A+q\frac{A+2}{4}-3\equiv 3A-2\,r\frac{A+2}{4}+1,\ \text{mod } 7.$$

Nun ist des Victorius Ostergrenze $=p+21$ März $=p+21+59+i^{\text{ter}}$ Tag im Jahre, wenn i die Anzahl der Schalttage des Jahres A andeutet; mithin findet sich die Ferie oder der Wochentag der Ostergrenze

$$f\equiv F+p+21+59+i-1,$$

oder
$$f\equiv F+p+i+2,\ \text{mod } 7.$$

Nimmt man noch in Betracht, daß

$$i=q\frac{A+3}{4}-q\frac{A+2}{4}$$

ist, so ergibt sich

$$F+i\equiv A+q\frac{A+3}{4}-3\equiv A+q\frac{A-1}{4}-2\equiv A+Q\frac{A}{4}-2;$$

folglich der Wochentag der Ostergrenze

$$f\equiv A+Q\frac{A}{4}+p,\ \text{mod } 7$$
$$\equiv 3A-2\,R\frac{A}{4}+p=1,\ 2,\ \ldots\ 7$$

96.

Fortsetzung und Schluß.

Datum des Osterfestes. Festzahl. Der Wochentag f der Ostergrenze bestimmt wieder, wie bei den Alexandrinern, in (176) und (177), den Abstand des Osterfestes von der Ostergrenze

$$b=8-f=R\frac{1-f}{7}$$

oder im vorliegenden Falle

$$b \equiv -A - \mathfrak{Q}\frac{A}{4} - p + 1 \equiv 2\,\mathfrak{R}\frac{A}{4} - 3A - p + 1, \text{ mod } 7$$
$$= 1, 2, \ldots 7.$$

Eben so ist, wie in der alexandrinischen Osterrechnung, (173)

$$\text{Ostern} = p + b + 21 \text{ März} = p + b - 10 \text{ April};$$

folglich die Festzahl des Victorius

$$v = p + b = p + 8 - f$$

und nach der Osterrechnung des Victorius

$$\text{Ostern} = v + 21 \text{ März} = v - 10 \text{ April};$$

endlich ist, wie in der Osterrechnung der Lateiner, (§. 94)

Luna ipsius diei paschalis = Luna (XV + b).

Im Zusammenhange dienen demnach zur Berechnung der Festzahl des Victorius folgende Gleichungen:

mod 532

Jahr der victorianischen Periode $A \equiv$ Jahr n. Chr. — 27
$\equiv$ Jahr d. St. — 780
$\equiv$ Jahr d. röm. Kaiser — 54,

Epakte $E \equiv 11\,\mathfrak{R}\frac{A+3}{19} + 5$, mod 30 $= 0, 1, \ldots 29$,

Abstände $p = \mathfrak{r}\frac{-E-4}{29}$,

$$b \equiv -A - \mathfrak{Q}\frac{A}{4} - p + 1 \equiv 2\,\mathfrak{R}\frac{A}{4} - 3A - p + 1, \text{ mod } 7$$
$$= 1, 2, \ldots 7;$$

Festzahl $v = p + b$.

An die von den Lateinern früher beobachtete Regel, Ostern nicht nach dem 21 April zu feiern, band sich Victorius nicht mehr. Da nach dem Obigen (S. 240) der Abstand $p = 0, 2, \ldots 27$ und $b = 1, 2, \ldots 7$ ist, so muß $v = 1, 2, 3, \ldots 34$ sein; folglich kann Ostern vom 22 März bis spätestens am 24 April eintreten.

Abweichung der Festzahl des Victorius von der alexandrinischen. Sei der Abstand p der Ostergrenze vom 21 März, der Wochentag f der Ostergrenze und die Festzahl v in der Osterrechnung des Victorius um Δp, Δf, Δv kleiner als die gleichnamigen Zahlen in der alexandrinischen Osterrechnung, folglich diese $p + \Delta p$, $f + \Delta f$, $v + \Delta v$. Nimmt man sofort die Differenz der Gleichung

$$v = p + 8 - f,$$

welche eben so wohl in jener als in dieser Osterrechnung besteht, so erhält man

$$\Delta v = \Delta p - \Delta f.$$

Da nun in beiden Osterrechnungen die Abstände der Ostergrenze immer vom 21 März genommen werden, so ändert sich der Wochentag f um

eben so viel Tage als der Abstand p; folglich ist, vermöge (83) in **XVIII** der Vorbegriffe, $\Delta f \equiv \Delta p$, mod 7, daher $\Delta v \equiv 0$, mod 7, d. h. diese Festzahlen unterscheiden sich nur um volle Wochen; was auch sonst einleuchtet. Zur genaueren Bestimmung dient der Wochentag der alexandrinischen Ostergrenze

$$f + \Delta f = \mathfrak{R}\frac{f+\Delta p}{7} = f + \Delta p - 7\,\mathfrak{Q}\frac{f+\Delta p}{7};$$

denn er gibt $\quad \Delta f = \Delta p - 7\,\mathfrak{Q}\frac{f+\Delta p}{7}$,

daher die Abweichung der Festzahl

$$\Delta v = 7\,\mathfrak{Q}\frac{f+\Delta p}{7}.$$

So oft nun $\Delta p = 0$ ist, wie in den 11 Jahren 1 bis 9 dann 17 und 19 des victorischen Mondkyklus, hat man $\Delta v = 7\,\mathfrak{Q}\frac{f}{7}$, und weil $f = 1, 2, .. 7$ ist, $\mathfrak{Q}\frac{f}{7} = 0$, also auch $\Delta v = 0$. Ist aber $\Delta p = 1$, wie in den 2 Jahren 10 und 18 dieses Mondkyklus, so findet man $\Delta v = 7\,\mathfrak{Q}\frac{f+1}{7} = 7\,\mathfrak{q}\frac{f}{7}$, folglich nur für $f = 7$ den Quotus $\mathfrak{q}\frac{f}{7} = 1$, sonst immer $= 0$; daher auch nur dort $\Delta v = 7$, sonst immer $\Delta v = 0$. Ist endlich $\Delta p = -1$, wie in den 6 Jahren 11 bis 16 des Mondkyklus, so wird $\Delta v = 7\,\mathfrak{Q}\frac{f-1}{7}$, folglich nnr für $f = 1$ der Quotus $\mathfrak{Q}\frac{f-1}{7} = \mathfrak{Q}\frac{0}{7} = -1$, sonst jedesmal $= 0$, daher auch nur dort $\Delta v = -7$ und außerdem immer $\Delta v = 0$.

Die Festzahl des Victorius weicht demnach nur selten, und nie mehr als um 7 Tage oder um eine Woche, von der alexandrinischen ab; so daß ihr gemäß die Lateiner Ostern höchstens am nächsten Sonntage vor oder nach den Alexandrinern feierten. Insbesondere ist

1. die Festzahl des Victorius um 7 Tage kleiner als die alexandrinische blos in jenen Jahren 10 und 18 des victorischen Mondkyklus, in welchen die lateinische Ostergrenze auf einen Samstag trifft. Dann feiern die Lateiner Ostern sogleich am unmittelbar darauf folgenden Sonntage; dagegen fällt, wegen $\Delta p = 1$, die alexandrinische Ostergrenze auf eben diesen Sonntag, folglich feiern die Griechen Ostern erst acht Tage darnach am nächst kommenden Sonntage.

2. Die Festzahl des Victorius ist dagegen um 7 Tage größer als die alexandrinische blos in denjenigen Jahren 11 bis 16 des victorischen Mondkyklus, in denen die lateinische Ostergrenze auf einen Sonntag trifft. Dann feiern die Lateiner Ostern erst acht Tage darnach am nächst folgenden Sonntage; während, wegen $\Delta p = -1$, die alexandrinische Ostergrenze auf den Sonnabend unmittelbar davor fällt, folglich die Griechen Ostern bereits an jenem ersteren Sonntage feiern.

Um die Jahre A der victorischen Osterperiode zu berechnen, in denen eine solche 7tägige Abweichung der Festzahlen besteht, sucht man aus dem Ausdrucke des Wochentags f der Ostergrenze

$$f \equiv A + Q\frac{A}{4} + p, \text{ mod } 7,$$

in so fern der Wochentag f und der Abstand p bedungen sind, das Jahr A. Man findet dafür zuvörderst

$$A + Q\frac{A}{4} \equiv f - p, \text{ mod } 7,$$

folglich vermöge §. 70, II, (123), wenn man daselbst $U = f - p$ und $a = A$ sezt,

$$A \equiv 12(f-p) + \mathfrak{A}, \text{ mod } 28; \quad \mathfrak{A} \equiv -11, -5, 6, 12.$$

Kennt man auf diese Weise den Rest der Jahrzahl A durch 28, so findet man aus den Resten $R\frac{A}{28}$ und $R\frac{A}{19}$, vermöge (113) in XX der Vorbegr., das Jahr der victorischen Osterperiode

$$A \equiv 19\, r\frac{3R\frac{A}{28}}{28} + 28\, r\frac{-2R\frac{A}{19}}{19}, \text{ mod } 532.$$

Nun ist $19\, r\frac{3R\frac{A}{28}}{28} \overset{\text{mod } 532}{\equiv} 57\, R\frac{A}{28} \equiv 57.12(f-p) + 57\mathfrak{A} \equiv 152(f-p) + 57\mathfrak{A}$

$$\equiv r\frac{152(f-p)}{532} + r\frac{57\mathfrak{A}}{532}$$

$$\equiv 76\, r\frac{2(f-p)}{7} + 19\, r\frac{3\mathfrak{A}}{28};$$

daher $$A \equiv 76\, r\frac{2(f-p)}{7} + 28\, r\frac{-2R\frac{A}{19}}{19} + 19\, r\frac{3\mathfrak{A}}{28}, \text{ mod } 532$$

und darin $19\, r\frac{3\mathfrak{A}}{28} \equiv -190, -95, 152, 247, \text{ mod } 532.$

Hierin sezt man nun erstlich

$$f = 7 \text{ und dazu } R\frac{A}{19} = 10, \; 18$$
$$p = 26, \; 27,$$

und findet $$A - 19\, r\frac{3\mathfrak{A}}{19} \equiv 276, \; 208;$$

nachher sezt man $$f = 1 \text{ und } R\frac{A}{19} = 11, \; 12, \; 13, \; 14, \; 15, \; 16$$
$$p = 16, \; 5, \; 24, \; 13, \; 2, \; 21,$$

und erhält $$A - 19\, r\frac{3\mathfrak{A}}{28} \equiv 296, \; 316, \; 32, \; 52, \; 72, \; 320.$$

Addirt man endlich zu jeder der acht gefundenen Zahlen 276, 208, 296, 316, 32, 52, 72, 320 jede der obigen vier Zahlen — 190, — 95, 152, 247; so findet man die 8.4 = 32 Jahre der victorianischen Osterperiode, in denen die Festzahl von der alexandrinischen um 7 Tage differirt. Gibt man zu jedem solchen Jahre noch 27 oder 27 + 532 = 559, wenn jene Summe unter 465

fallen sollte; so erhält man vermöge §. 51, IV, b, das mit ihm übereinkommende Jahr nach Chr. vom Jahre 465 nach Chr. an, wo die Osterrechnung des Victorius wahrscheinlich in Gebrauch kam. Zusammengestellt finden sich diese 32 Jahre in folgender Tafel.

Jahr d. vict. Osterper.	Jahr nach Chr.	Festzahl des Vict.	Festzahl der Alex.	Jahr d. vict. Osterper.	Jahr nach Chr.	Festzahl des Vict.	Festzahl der Alex.	Jahr d. vict. Osterper.	Jahr nach Chr.	Festzahl des Vict.	Festzahl der Alex.
448	475	23	16	35	594	28	21	224	783	9	2
455	482	28	35	86	645	27	34	225	784	28	21
468	495	12	5	106	665	23	16	279	838	31	24
469	496	31	24	113	672	28	35	299	858	20	13
472	499	28	21	126	685	12	5	319	878	9	2
489	516	20	13	130	689	28	21	360	919	28	35
509	536	9	2	181	740	27	34	374	933	31	24
523	550	27	34	184	743	31	24	394	953	20	13
11	570	23	16	201	760	23	16	414	973	9	2
18	577	28	35	204	763	20	13	428	987	27	34
31	590	12	5	221	780	12	5				

97.

c. Der Osterstreit.

Anfangs ließen die christlichen Gemeinden einander ihre verschiedenen Gebräuche in der Osterfeier, ohne wechselseitige Anfeindung. Allein schon nach der Mitte des zweiten Jahrhundertes n. Ch. entspann sich über die Frage, ob die Christen das Passahmal beibehalten sollen oder nicht, ein hin und wieder mit Bitterkeit geführter Osterstreit, in welchem man diejenigen Christen, welche das Passah mit den Juden zugleich, an der **Luna XIV**, aßen, **Quartadecimani** nannte und der Hinneigung zum Judenthume beschuldigte. Die erste Kirchengewalt gebrauchte Victor, römischer Bischof seit 192 n. Chr., indem er die Quartadecimaner durch Decrete zwingen zu sollen glaubte, sich in die Sitte der übrigen Christen zu fügen, und sie, als dies nicht geschah, förmlich excommunicirte. Allein Irenäus, Bischof von Lugdunum, rieth zur Duldung, und nachdem sich die Asiaten durch ein Schreiben von dem Verdachte einer willkürlichen Neuerung gereinigt hatten, blieb vorläufig der Streit auf sich beruhen.

Andererseits stritten sich selbst die Gegner der Quartadecimaner, die alexandrinische und römische Gemeinde an der Spitze, über die Sonntage, an

denen sie das Osterfest feierten, und die sehr oft um eine, sogar um 3 bis 4 Wochen von einander abstanden, weil sie theils den Ostervollmond nach verschiedenen Mondkreisen, theils den ihm folgenden Ostersonntag nach verschiedenen Principien bestimmten. Die Beilegung aller dieser Streitigkeiten hoffte man von der im Jahre 325 n. Chr. zu Nicäa in Bithynien zusammen getretenen ersten Kirchenversammlung, welche Constantin der Große, der erste christliche Kaiser der Römer, zur Schlichtung des arianischen und des Osterstreites, berufen hatte. Allein die Väter, voraussehend, daß die östlichen Kirchen, die noch größtentheils das Fest zugleich mit den Juden feierten, nicht ohne Strafen, zu denen man doch nicht greifen wollte, von dieser Sitte abzubringen sein würden, beschlossen blos, daß das Passah — bestimmter ausgedrückt das Auferstehungs-Passah, **Pascha resurrectionis**, — hinfort von allen Christen, einstimmig mit den Aegyptern, an Einem Sonntage gefeiert werden solle; zugleich trugen sie der alexandrinischen Kirche, deren mathematische und astronomische Kenntnisse sie lobend anerkannten, auf, den Tag der Osterfeier jährlich zu berechnen und den übrigen Kirchen brieflich anzuzeigen; welches Auftrages sich die alexandrinischen Bischöfe mittels der, seit der Mitte des dritten Jahrhundertes vorkommenden, **literae v. homiliae paschales**, entledigten. Das nicänische Concilium hat aber — wie Walch, troz der Behauptung vieler Schriftsteller, gründlich erweist — weder die Principien der Osterrechnung fest gestellt, noch den 19jährigen Mondkyklus eingeführt. Zu wünschen wäre dies allerdings gewesen; denn so würden alle die Streitigkeiten über das Osterfest vermieden worden sein, welche noch mehrere Jahrhunderte lang zwischen der lateinischen und griechischen Kirche obgewaltet haben.

Auf den Streit wegen des Passahmals kam das im Jahre 341 zu Antiochia in Syrien abgehaltene Concilium neuerdings zurück, welches die schwersten Strafen gegen diejenigen aussprach, die der Festsezung der Nicäner zuwider das Passah mit den Juden feiern würden. Kezer waren nun, die es an der **Luna XIV** oder nicht an einem Sonntage feierten; sie wurden noch besonders Protopaschiten genannt, weil sie das Fest gewöhnlich früher als die übrigen Christen feierten.

Während des ersten 84jährigen Kyklus der Lateiner, der von 298 bis 381 n. Chr. reichte, und nach dem Jahre 325, wo die nicänische Kirchenversammlung gehalten worden war, hatten die Römer das Osterfest 5 Mal, nemlich in den Jahren 326, 340, 343, 346, 350 um acht Tage später, 5 Mal, in den Jahren 330, 333, 341, 349, 368, vier Wochen, und einmal, im Jahre 360, sogar fünf Wochen früher als die Griechen gefeiert. Die Bischöfe von Alexandria, die vom nicänischen Concilium mit der Ueberwachung der

richtigen Feier des Festes beauftragt waren, nahmen diese Abweichung natürlich übel auf. Deswegen wurden im Verlaufe des folgenden 84jährigen Kyklus, von 382 bis 465, zwischen der alexandrinischen und römischen Kirche mehrere Schriften über diesen Gegenstand gewechselt, wodurch die römische allmälig zu den Ansichten der alexandrinischen hinüber gezogen wurde. So ward das Osterfest des Jahres 387, das die Alexandriner auf den 25 April, die Lateiner auf den 21 März setzten, von Theophilus, Bischof zu Alexandria seit 385, in einem Prologus, der sonst die ganze Lehre der Alexandriner über die Bestimmung der Osterfeier enthält und durch die heilige Schrift sowohl als durch die Tradition begründet, und von Ambrosius, dem Metropoliten zu Mailand, in einem Schreiben an die Bischöfe seiner Diöcese, ganz im Geiste der Alexandriner, besprochen. Aus dem lezteren Schreiben erfährt man zugleich, daß die Bischöfe des Occidents damals schon in der Bestimmung der Feier des Osterfestes von der römischen Kirche zuweilen abwichen, wie z. B. die Mailänder es im Jahre 360 mit den Alexandrinern feierten. Eben so gab das Osterfest des Jahres 414, obschon es auch nach den Lateinern so wie nach den Alexandrinern auf den 22 März fiel, dem Papste Innocenz zu brieflichen Erörterungen über die Ostergrenze Anlaß. Die nächste Folge dieser Verhandlungen war, daß die Lateiner, die Mangelhaftigkeit ihrer Berechnung der Neumonde erkennend, diese dadurch zu verbessern suchten, daß sie, wahrscheinlich auf den Vorschlag des Prosper Aquitanus, in dem 84jährigen Kyklus von 382 bis 465 nicht schon nach 12, sondern erst nach 14 Jahren den saltus lunae eintreten ließen.

Besonders wichtig für die Geschichte des Osterstreites ist der Prologus paschalis des Cyrillus, Bischofs zu Alexandria, in welchem er, nebst mancherlei Betrachtungen und Mittheilungen über die Berechnung des Osterfestes, die von dem Bischof Theophilus auf Befehl des Kaisers Theodosius auf 418 Jahre, von 380 bis 797 n. Chr., berechnete Ostertafel zum bequemeren Gebrauche auf 95 Jahre, vom Jahre 437 bis 531, abgekürzt lieferte. Er hatte nemlich entdeckt, daß die Tage des Osterfestes, mit Ausnahme jedes vierten, nach je 95 Jahren in der früheren Ordnung wiederkehren, und daß man selbst bei diesem vierten Jahre fast immer nur einen Tag vorwärts und höchst selten um 6 Tage zurück zu gehen habe. Derselbe Bischof Cyrillus schrieb auch Briefe über die Osterfeste der Jahre 420 und 444. Im lezteren Jahre sezten es die Alexandriner auf den 23 April, die Lateiner aber, zu Folge ihrer irrigen Grundsäze, vier Wochen früher an. Von dem streitigen Feste dieses Jahres handelt auch ein Sendschreiben des Paschasinus, Bischofs zu Lilybäum, an den Papst Leo I, der sich dadurch und durch die Schriften des Cyrillus bewegen ließ, das Fest, gegen

die Grundsäze der Lateiner, auf den 23 April zu verlegen, wodurch die Parilien auf den Charfreitag trafen und ohne circensische Spiele dahin gehen mußten. Derselbe Papst gab, um des Kirchenfriedens willen, den Alexandrinern auch im Jahre 455 nach, wo Ostern nach den Lateinern am 17, nach der Tafel des Theophilus am 24 April gefeiert werden sollte. Hauptsächlich bewog ihn dazu das, eben so ausführlich als gründlich die Lehre vom Pascha behandelnde Sendschreiben, welches Proterius, Bischof von Alexandrien, auf Befehl des Kaisers Marcianus, den der Papst zur Entscheidung über diesen Streit aufgefordert hatte, an ihn richtete.

Diese unablässigen Streite, in denen die Lateiner die Unrichtigkeit ihres 84jährigen Mondkyklus nicht in Abrede stellen konnten, bewogen den Papst Hilarius, den Victorius aus Aquitanien, einen **Calculator scrupulosus**, wie ihn Gennadius nennt, zur Untersuchung der Osterrechnung aufzufordern. Die Folge davon war, im Jahre 465, wo jener 84jährige Kyklus wieder ablief, wenigstens die Annahme des 19jährigen Mondkyklus, der frühesten Ostergrenze am 21 März, und des Bereichs der Osterfeier vom 22 März bis 24 April. Aber auch so war der über die Feier des Osterfestes in der Christenheit obwaltende Streit noch immer nicht ganz beseitigt. Denn theils blieb hin und wieder im Occident noch der alte 84jährige Kyklus im Gebrauche, theils ließ des Victorius 532jährige Ostertafel, in jenen 32 Jahren, wo sie, wegen ihrer verschiedenen Bestimmung der Neumonde, von der alexandrinischen um 7 Tage abwich, den Tag der Feier zweifelhaft, wo dann der Papst für das Datum entschied, welches den lateinischen Principien zusagte. So wurde in den Jahren 475, 495, 496, 499, 516 das Fest im Occident, übereinstimmig mit der Tafel des Victorius, acht Tage später als im Orient gefeiert.

Endlich gelang es dem römischen Abte Dionysius, mit dem Beinamen **Exiguus** (der Kleine), einem wegen seiner Gelehrsamkeit und echt christlichen Gesinnung preiswürdigen Manne, den kirchlichen Frieden herzustellen. Er erreichte dies, indem er, im Jahre 525, die bis auf 6 Jahre abgelaufene 95jährige Ostertafel des alexandrinischen Bischofs Cyrillus, ganz nach denselben Grundsäzen um weitere 95 Jahre, von 532 bis 626, fortsezte, und den Gebrauch derselben, in seinen Briefen an den Petronius und den Papst Bonifacius, auf eine Weise empfahl, welche anfänglich die Römer und allmälig auch die übrigen Italiäner zur unbedingten Annahme der Osterrechnung der Alexandriner bewog. Doch war noch im Jahre 550 der Kanon des Victorius nicht überall in Italien abgeschafft.

In seiner Ostertafel zählte Dionysius die Jahre nicht mehr nach dem grausamen Christenverfolger Diocletian, wie die Alexandriner, sondern **ab incarnatione Domini**; wodurch diese Aere allmälig in Aufnahme kam.

Auch gebrauchte er in derselben Tafel jene Epakten, welche angeben, der wie vielte Tag im laufenden Mondmonate nicht der 1 Januar, sondern der 22 März ist, und die **Concurrentes dies**, nemlich die Wochentage, auf die der 24 März fällt, eine Erfindung des Orientes.

Die Ostertafel des Dionysius wurde von einem Abte Felix, und von Isidorus, Bischof von Sevilla, durch neue 95 Jahre, von 627 bis 721, fortgesezt. Eine weitere Fortsezung, aber viel umfassender, nemlich vom Jahre 532 bis 1063, lieferte Beda **Venerabilis**, Presbyter der angelsächsischen Kirche, ein tief gelehrter Mann in der ersten Hälfte des 8. Jahrhundertes. Von dem Herausgeber Beda's chronologischer Schriften **Noviomagus (Bronchorst)**, zu Cöln im Jahre 1537, wurde noch die Tafel bis zu Christi Geburt zurück und bis 1633 vorwärts geführt.

Außerhalb Italien, besonders in Gallien, Spanien und auf den brittischen Inseln, erlosch jedoch der Gebrauch des 84jährigen Mondkyklus und der victorischen Ostertafel, daher auch der Osterstreit erst sehr spät; in Spanien wahrscheinlich nach dem Jahre 587 n. Chr., auf den brittischen Inseln nach 729, und in Gallien am Ausgange des 8. Jahrhundertes. Erst um die Zeit Karl's des Großen, von 768 bis 814, hatte der alexandrinische Osterkanon, den man im westlichen Europa den dionysischen zu nennen pflegte, über alle Widersprüche gesiegt, und die Christenheit sich über die Osterfeier vereinigt. Die nächsten 8 Jahrhunderte hindurch wurde nun das Osterfest mit vollkommener Uebereinstimmung gefeiert. Dann aber trat neuerdings eine Spaltung ein, die noch immer nicht völlig gehoben ist.

98.

d. Verbesserung der Osterrechnung durch Papst Gregor XIII nach Lili.

Veranlassung. Die alexandrinische Osterrechnung sezt die Länge des tropischen Jahres zu $365\frac{1}{4}$ Tagen, und den Zeitkreis von 235 synodischen Monaten zu 19 mittleren Sonnenjahren voraus. Nach dieser Rechnung treten aber die Jahrpunkte und Neumonde allmälig immer früher im julianischen Jahre ein, und zwar die Jahrpunkte alle 128, und die Neumonde alle 308 Jahre um einen Tag früher. Eine Folge davon ist, daß weder die unbeweglichen noch die beweglichen Feste der Christen in den ihnen ursprünglich angewiesenen Abständen von den Jahrpunkten bleiben. Die unbeweglichen Feste, an bestimmte Tage des julianischen Jahres geknüpft, rücken immer tiefer ins tropische Jahr; und das Osterfest, von dem alle anderen beweglichen Feste bestimmte Abstände halten, wird bei immer späterem Mondalter, und immer weiter hinter der Frühlingsnachtgleiche, gefeiert. Das Princip der Osterfeier verliert dadurch mit der Zeit seine ganze Bedeutung.

Lange verfiel man nicht auf die Ursache dieses Uebelstandes. Einer der ersten, welche die Verschiebung des alexandrinischen Mondkreises wahrnahmen, war der griechische Mönch Argyrus, der im Jahre 1372 eine Anweisung zur Festrechnung schrieb. Nachdem man hierauf aufmerksam geworden war, wurde die Kalenderverbesserung auf mehreren Kirchenversammlungen im 15. und 16. Jahrhunderte dringend angeregt; aber erst das tridentiner Concilium, 1562, trug dem Papste die Kalenderverbesserung förmlich auf, und Gregor XIII brachte sie im Jahre 1582 glücklich zu Stande.

Unter mehreren Vorschlägen, die ihm dazu gemacht worden waren, genehmigte er den des Calabresen Aloysius Lili (Luigi Lilio), der als der eigentliche Urheber des neuen Kalenders, oder vielmehr der neuen Schalt- und Osterrechnung anzusehen ist. Er legte den Plan dieses Mannes im Jahre 1577 den Fürsten und berühmtesten Universitäten Europa's zur Prüfung vor, und sezte dazu selbst eine Commission von Gelehrten zu Rom nieder, unter denen der Deutsche Christoph Clavius und der Italiäner Ignazio Danti sich befanden. Lezterer beobachtete zu Bologna an einem Gnomon die Solstitien, um genau die Eintritte der Jahrpunkte zu jener Zeit auszumitteln. Nachdem die römische Commission noch einige kleine Aenderungen an dem ursprünglichen Plane vorgenommen hatte, arbeitete sie die mehr ins Einzelne gehende Schrift Canones in Calendarium Gregorianum aus, auf deren Grund dann der Papst in einer Bulle vom 24 Februar 1582 die Reform definitiv anordnete. Der Gegenstand dieser Verbesserung, wie ihn die päpstliche Bulle bezeichnet, war einerseits, die Frühlingsnachtgleiche auf ihren zur Zeit der nicänischen Kirchenversammlung, 325 n. Chr., inne gehabten Siz, und den Ostervollmond auf seine eigenthümliche Stelle zurück zu führen, und andererseits die Mittel anzugeben, um in Hinkunft für immer die Verrückung der Frühlingsnachtgleiche und des Frühlingsvollmondes von ihren angewiesenen Pläzen zu verhüten.

Lili's Reform der Schaltrechnung. Um die Frühlingsnachtgleiche, welche im Jahre 1582 schon um 10 Tage zu früh, am 11 März eintrat, zum 21 März zurück zu führen, an welchem sie zur Zeit des Conciliums zu Nicäa eingetreten war, und an dem sie nach der Meinung der Alexandriner hätte fortwährend haften sollen, wurde nach dem 4 October des Jahres 1582, mit Uebergehung von 10 Tagen, sogleich der 15te gezählt. — Um aber auch die Frühlingsnachtgleiche auf dem 21 März zu erhalten, schlug Lili folgende Schaltweise vor. Er nahm das mittlere tropische Jahr nach den alphonsinischen Tafeln, welche beiläufig um das Jahr 1250 verfaßt worden waren, zu 365 T. 5 St. 49′ 16″ an, oder vielmehr gleich dem mittleren Jahre des Copernicus, dessen

größtes 365 T. 5 St. 55′ 57″ 40‴,
kleinstes — — 42 55 7
folglich mittleres — — 49 16 23½ betrug.*)

Bei der julianischen Einschaltung eines Tages in jedem 4. Jahre beträgt aber die mittlere Länge des bürgerlichen Jahres 365 T. 6 St., also um 10′ 44″ = 644″ zu viel. Dieser Fehler beträgt aber einen vollen Tag oder 86400″ in 86400 : 644 = 134 Jahren; mithin wäre alle 134 Jahre ein Schalttag wieder auszulassen. Allein Lili hatte den Gedanken, die Ausgleichungen der näherungsweisen kyklischen Rechnungen mit den genauen astronomischen überhaupt, wo möglich, nur immer nach vollen Jahrhunderten vorzunehmen; darum rechnete er diese 134 Jahre, als $1\frac{1}{3}$ oder $\frac{4}{3}$ Jahrhundert; folglich kamen 3 Schalttage in je 4 Jahrhunderten auszulassen, und zwar am natürlichsten je ein Tag im lezten Jahre eines jeden der drei ersten Jahrhunderte. Das Ende einer solchen Schaltperiode von 4 Jahrhunderten sezte er auf den Schluß des eben ablaufenden 16. Jahrhunderts, oder auf das Jahr 1600. Dem gemäß ordnete die päpstliche Bulle, wie bereits in §. 47, II, S. 129 erwähnt wurde, an:

1. in der Regel wie üblich jedes vierte Jahr einen Tag einzuschalten,

2. nach dem Jahre 1600 alle 400 Jahre 3 Schalttage weg zu lassen, und zwar aus den Säcularjahren, centesimis annis, dergestalt, daß nur alle durch 400 theilbaren Säcularjahre Schaltjahre bleiben, die dazwischen liegenden, durch 400 untheilbaren, Säcularjahre hingegen Gemeinjahre werden.

99.

Fortsezung.

Lili's Reform der Neumondrechnung. Zur Feststellung des Ostervollmondes, der sich seit dem nicänischen Concilium bereits um 4 Tage verschoben hatte, brachte Lili an dem 19jährigen Mondkreis der Alexandriner die zur Zeit erforderliche Verbesserung an, und umstaltete den immerwährenden julianischen Kalender der Neumonde (§. 83), indem er darin den Kyklus der goldenen Zahlen — weil man ihn, so oft die Neumonde um einen Tag früher oder später eingetreten wären, ganz hätte verschieben, folglich einen neuen solchen Kalender anfertigen müssen — durch den von ihm erfundenen Epaktenkyklus ersezte; wobei er unter Epakte das Alter des Mondes am 1 Januar, nemlich die vor dem 1 Januar vom laufenden Mondmonate verflossenen

*) Vergleiche das Hauptwerk über die gregorianische Kalenderverbesserung, Romani Calendarii a Gregorio XIII P. M. restituti explicatio, Clementis VIII iussu edita. Auctore Christophoro Clavio. Romae 1603, fol. p. 81 et 102.

Tage, versteht (§. 84), und die einander gleich geltenden Epakten 0 und 30 durch * bezeichnet.

Seinen Epaktenzyklus oder den so genannten gregorianischen immerwährenden Kalender der Neumonde construirt er nun auf folgende Weise. Für alle 30 möglichen Epakten berechnet er den nächsten Neumondstag nach dem Neujahrstage oder 1 Januar, indem er den Mondmonat, in welchen noch der 1 Januar fällt, voll, zu 30 Tagen, mithin jenen Neumondstag gleichsam als den 31. Tag dieses Mondmonates rechnet. Wenn demnach die Epakte E ist, daher vor dem 1 Januar E Tage von dem laufenden, noch im leztverflossenen December angefangenen, Mondmonate vergangen sind, oder der 0 Januar (lezte December) der E^{te} Tag dieses Mondmonates ist; so muß der erste Neumond im Januar oder im ganzen Jahre an dem so vielten Tage dieses Monates oder des Jahres eintreten, als der wie vielte Tag der 31. Tag hinter dem E^{ten} ist, folglich am $31 - E$ Januar. Der nächste Neumond nach dem 1 Januar fällt demnach auf den $1 + x$ Januar, wofern $x = 1, 2, \ldots 30$ und

$$1 + x \equiv 31 - E, \text{ mod } 30,$$

also
$$x = \mathfrak{R}\frac{31 - E - 1}{30}$$

ist, folglich auf den

$$1 + \mathfrak{R}\frac{31 - E - 1}{30} = 1 + \mathfrak{R}\frac{-E}{30} = 1 + 30 - \mathfrak{r}\frac{E}{30} \text{ Januar,}$$

oder auf den w Januar, wofern

$$w = 1 + \mathfrak{R}\frac{-E}{30} = 31 - \mathfrak{r}\frac{E}{30} \text{ ist.}$$

Da hier der Rest $\mathfrak{r}\frac{E}{30}$ immer von 0 bis 29 reicht, man mag die Epakte von 1 bis 30 oder von 0 bis 29 gehen lassen, und da er im lezten Falle jedesmal der Epakte E selbst gleich ausfällt; so bleibt es zur Vereinfachung der Rechnung rathsam, die lilianische Epakte nur immer von 0 bis 29 auszudehnen, oder $E = 0, 1, \ldots 29$ anzunehmen. Dann ist $\mathfrak{r}\frac{E}{30} = E$ und $w = 31 - E$. Diesen Tagen des Monates Januar schrieb nun Lili in seinem Kalender die Epakte E, daher dem ersten und lezten Januar die Epakte *, bei.

Der unmittelbar vorhergehende Neumond, auf welchen die kirchlichen Festrechner den Anfang des Mondjahres zu sezen pflegen, trat um 30 Tage früher, folglich am $w - 30 = 1 - E$ Jan. $= w + 1 = 32 - E$ December ein.

Von dem ersten nach dem Neujahr eintretenden Neumonde zählte Lili dann, ohne den Schalttag im Februar zu beachten, oder vielmehr ihn in den nächst angrenzenden hohlen Mondmonat einzählend, die Mondmonate abwechselnd zu 29 und 30 Tagen, zuweilen aber auch zwei zu 30 Tagen nach einander, um für die auf einander folgenden Neumonde die Sonnenmonatstage zu finden;

denen er sofort im ganzen Jahre seines Kalenders die jedesmaligen Epakten beischrieb, weswegen diese in abnehmender Reihe wiederkehren.

Von seinen zwei ersten Mondmonaten nach dem Neujahr hielt demnach der eine 29 + i, der andere 30 Tage, daher enthielten beide zusammen 29 + i + 30 = 59 + i Tage; und somit fiel, weil der 0 März gerade der 59 + i^te^ Tag im Jahre ist, der dritte Neumond nach dem Neujahr immer auf den eben so vielten März, als auf den wie vielten Januar der erste traf, folglich auf den w = 31 — E März. Das Alter des Mondes oder die Epakte am 1 März ist demnach genau auch das Alter des Mondes oder die Epakte am 1 Januar. Der folgende Mondmonat bekam gewöhnlich 29 Tage und nur ausnahmsweise 30 Tage, daher traf der vierte Neumond nach dem Neujahr in der Regel auf den w + 29 = 60 — E März = 29 — E April, und nur dazumal auf den w — 1 = 30 — E April, wenn er ein Osterneumond sein kann.

Allein, weil bei dieser Zählung jede der 30 Epakten abwechselnd in 29 und 30tägigen Mondmonaten wiederkehrt, so mußten bei den sechs 29tägigen irgend zwei Epakten an demselben Tage angesezt werden. Nun trifft, vermöge der Osterregel der Alexandriner, der früheste Ostervollmond auf den 21 März; daher könnte der überhaupt mögliche späteste Ostervollmond höchstens um 29 Tage später, also am 21 + 29 — 31 = 19 April, folglich der Osterneumond spätestens am 19 — 13 = 6 April eintreten; was nur geschehen kann, wenn, vorausgesezt daß der dritte Mondmonat nach dem Neujahr zu 30 Tagen gezählt wird, die Epakte 30 — 6 = 24 ist. In Wirklichkeit trifft aber in dem 19jährigen Mondkreise der Alexandriner, und zwar im 8. Jahre, der späteste Ostervollmond auf den 18 April, also der späteste Osterneumond auf den 5 April; worauf unter obiger Voraussezung nur bei der Epakte 30 — 5 = 25 ein Neumond trifft. Darum entschied sich Lili, in den 29tägigen Mondmonaten, die Epakte 24, weil sie den möglich spätesten Osterneumond nie bestimmt, zur Epakte 25, durch die der wirklich späteste Osterneumond bestimmt wird, zu sezen. Auf diese Weise hatte er dem 5 Februar, 5 April, 3 Juni, 1 August, 29 September und 27 November die Epakte XXV, XXIV beizuschreiben.

Dieser lilianische Kalender der Neumonde*) gibt demnach zu jeder Epakte alle Monatstage, auf welche die Neumonde in jenen Jahren treffen, denen sie zukommen, und umgekehrt zu jedem Monatstage die Epakte, bei der auf ihn ein Neumond fällt. Um aber dies leisten zu können, mußte er richtig an den Himmel geknüpft werden.

---

*) Man findet ihn in dem angeführten Werke des Clavius, S. 40, in Ideler's Handbuch d. Chron. Bd. II, S. 307, in Le Boyer traité complet du calendrior, Paris 1822, p. 78, u. m. a.

Nun trafen in den Jahren 1562 bis 1582, wo man sich ernstlich mit den Vorbereitungen zur Kalenderreform beschäftigte, die nach dem 19jährigen Mondkreise der Alexandriner, oder nach dem auf ihn gegründeten julianischen immerwährenden Kalender, bestimmten kyklischen Neumonde bereits um 4 Tage später als die Conjunctionen und um etwa 3 Tage später als die ersten Phasen ein. Man hätte demnach die goldenen Zahlen des immerwährenden Kalenders um 4 Tage zurück schieben oder die alexandrinischen Epakten um 4 Tage vermehren sollen; allein, weil man wünschte, daß die epaktischen Neumonde, wie Clavius *) ausdrücklich angibt, lieber etwas später als die wirklichen eintreten möchten, so vermehrten die Kalenderreformatoren die Epakte nur um 3 Tage.

Auf diese Weise sezte man im ersten Jahre des 19jährigen Mondkreises, oder bei der goldenen Zahl 1, den ersten Neumond, der nach den Alexandrinern auf den 23 Januar traf, auf den 23 — 3 = 20 Januar des julianischen Kalenders; folglich weil nach dem Ausstoßen der 10 Tage, um welche sich die Jahrpunkte verschoben hatten, das gregorianische Datum dem julianischen um diese 10 Tage voreilte, auf den 20 + 10 = 30 Januar des gregorianischen Kalenders. Der nächst vorhergehende Neumond trat demnach um 30 Tage früher am 0 Januar, oder 31 December ein; mithin verfloß vor dem 1 Januar ein Tag des Mondmonates, und die Epakte des 1. Jahres war 1. Darum knüpfte Lili seinen Epaktenkyklus dergestalt an den 19jährigen Mondkreis der Alexandriner, daß dem ersten Jahre oder der goldenen Zahl 1 desselben auch die Epakte 1 zukam.

Von einem Jahre zum anderen muß die Epakte, wie sonst, um 11 Tage zu-, oder um 19 Tage abnehmen; blos vom 19. Jahre zurück zum ersten steigt sie, wegen des saltus lunae, um 12 oder sinkt um 18; folglich läßt sich die Epakte jedes einzelnen Jahres im Mondkreise bestimmen. Auf solche Weise gab denn die Epaktenreihe im immerwährenden Kalender des Lili zur Zeit der Kalenderverbesserung für die goldenen Zahlen oder für die Jahre des Mondkyklus die Neumonde, daher auch die Ostervollmonde richtig an.

Um aber auch für die Folge die Vorsorge zu treffen, daß dieser allgemeine Kalender, mittels der passenden Epaktenreihe oder Epaktentafel, die Neumonde zureichend genau, jedoch damit, wie Clavius angibt,**) Ostern nie vor dem ersten mittleren Vollmonde nach der Frühlingsnachtgleiche gefeiert werde, lieber etwas später als die wirklichen Neumonde anzeigen möge; ließen Lili und Gregor's Mathematiker von den Ergebnissen folgender Rechnung sich leiten. Sie nahmen ***) nach den prutenischen Tafeln des Erasmus

*) a. a. O. S. 59.

**) a. a. O. S. 382.

***) Clavius, S. 102.

Reinhold, *) welche damals die vollkommensten waren, die mittlere Dauer des synodischen Monates zu 29 T. 12 St. 44′ 3″ 10‴ 48^{IV} an. Darnach ist die Dauer eines Mondkreises von 235 synodischen Monaten 6939 T. 16 St. 32′ 27″ 18‴. Allein 19 julianische Jahre zu 365 T. 6 St. halten 6939 T. 18 St.; mithin treten im julianischen Kalender die Neumonde nach jedem 19. Jahre um 1 St. 27′ 32″ 42‴ = 315162‴ früher ein, als sie der metonische Mondkreis angibt. Um einen vollen Tag oder 24. 60^3 = 5184000‴ früher ereignen sie sich daher nach je 19 : (315162 : 5184000) = 98496000 : 315162 = 312·52 Jahren. Alle 312·52 Jahre beträgt das Alter des Mondes am 1 Januar um einen Tag mehr, und ist demnach die Epakte um diesen einen Tag zu vergrößern. Jede solche Vermehrung der Epakte, wegen der Mangelhaftigkeit des metonischen Mondkreises, nennt man eine Mondgleichung (aequatio lunae). Da aber Lili blos nach vollen Jahrhunderten Ausgleichungen der kyklischen Rechnung mit der astronomischen vornehmen wollte, und jene 312·52 Jahre höchst nahe $3\frac{1}{8}$ oder $\frac{25}{8}$ Jahrhunderte ausmachen; so schlug er vor, in 25 Jahrhunderten 8 Mal, und zwar gewöhnlich nach je 3 Jahrhunderten, einmal aber nach 4 Jahrhunderten, die Epakte um einen Tag zu vergrößern.

Hiebei kam es aber darauf an, zu wissen, zu welcher Zeit im julianischen immerwährenden Kalender die Neumonde richtig angegeben wurden. Durch Zurückrechnung fanden die Kalenderreformatoren,**) daß im Jahre 551 nach Chr., dem ersten eines 19jährigen Mondkyklus, wirklich ein Neumond am 23 Januar eintrat, folglich die alte alexandrinische Epakte 8 dieses Jahres***) mit dem Neumonde übereinstimmte, und daß dieser, nach der Rechnung des Clavius, um 16 Stunden später als zu den Zeiten des nicänischen Conciliums (i. J. 325) angegeben wurde. Nach ihrem Princip, jede Ausgleichung der kyklischen Rechnung nur in Säcularjahren vorzunehmen, wählten sie zu ihrem Ausgangspunkte das Jahr 500, und dachten sich, daß darnach alle 300 Jahre, also in den Jahren 800, 1100, 1400, die Epakte jedesmal um einen Tag vermehrt worden sei. Um aber auch das nächste Jahr nach 1582 zu berechnen, in welchem wieder die Epakte um einen Tag zu vermehren kam, erwogen sie, daß eigentlich nach dem Jahre 551, wo die Epakte richtig gestellt war, alle $312\frac{1}{2}$ Jahre, folglich in den Jahren 863, 1176, 1488, 1801 die Epakte zu vergrößern sei; daher sezten sie die nächste Vergrößerung derselben auf das Jahr 1800.

---

*) Tübingen 1571.

**) Clavius, S. 129, Nr. 5.

***) Vergleiche Tafel 2 im Anhange, 1. und 4. Spalte.

Zur Fixirung des Ostervollmondes ordneten demnach die Kalenderverbesserer an, die Mondgleichung oder Vermehrung der Epakte um einen Tag zum ersten Mal im Jahre 1800 eintreten zu lassen, und darnach in je 2500 Jahren achtmal; nemlich siebenmal nach je 300 Jahren, und dann einmal nach 400 Jahren, daher namentlich in den Jahren 2100, 2400, 2700, 3000, 3300, 3600, 3900, 4300; u. s. f.

Gleichzeitig rückt aber, sowohl bei der Auslassung der 10 Tage, als auch bei jeder säcularen Ausmerzung eines Schalttages aus dem gregorianischen Kalender, das Datum des lezten Neumondes im December dem Anfange des folgenden Jahres um eben so viele Tage näher; daher wird auch die Epakte um dieselbe Zahl von Tagen vermindert. Diese Verminderung nennt man die Sonnengleichung (aequatio solis) der Epakte.

Beide Correctionen werden an derjenigen Epakte, welche zur Bestimmung des Ostervollmondes dient, in den Säcularjahren jedesmal am 1 März vorgenommen; die Mondgleichung, in so fern die Epakte des 1 März auch die des 1 Januars ist; die Sonnengleichung aber, in so fern die Weglassung des Schalttages im Februar geschieht.

Auf solche Weise sieht man sich nun in den Stand gesezt, für jedes Jahrhundert des gregorianischen Kalenders die, während desselben, der Reihe der 19 goldenen Zahlen angehörige Epaktenreihe zu bestimmen.

Hiebei ist aber noch wegen der von Lili auf den 5 April angesezten doppelten Epakte XXV, XXIV Folgendes zu bemerken. Kommt in einer 19gliedrigen Epaktenreihe eine dieser Epakten, 24 oder 25, allein ohne die andere vor; so gibt sie den vierten Neumond nach dem Neujahre jedesmal am 5 April an. Erscheinen aber beide Epakten 24 und 25 mit einander in einer solchen Epaktenreihe, so müßte in den ihnen entsprechenden zwei Jahren des Mondkreises jener vierte Neumond auf den nemlichen Tag, den 5 April treffen; was doch nicht geschehen kann, da nur erst nach je 19 Jahren die Neumonde auf einerlei Datum zurückkehren. Deswegen sezt man hier anstatt 25 die Epakte 26, welche in einer solchen Epaktenreihe nie vorkommen kann. Die Kalenderverbesserer bezeichnen daher die in einem Mondkyklus allein vorkommende Epakte 24 durch XXIV, XXV, die allein vorkommende Epakte 25 durch 25. XXV, und so oft in ihm beide Epakten 24 und 25 zusammen treffen, die Epakte 25 durch 25. XXVI; indem sie jedesmal die eigentlich in der Osterrechnung geltende Epakte rechts mit römischen Ziffern und die fragliche Epakte 25 in arabischen Ziffern ansezen.

100.

Fortsezung.

Genauigkeit des lilianischen Kalenders. Wichtig ist die Frage, wie genau Lili's Kalender, sowohl in Absicht auf die Sonne, als auf den Mond ist.

Seine Ausgleichung der Sonnenjahre mit dem Sonnenlaufe läßt in je 400 Jahren von den darin befindlichen 100 julianischen Schalttagen 3 aus, und behält ihrer also nur 97 bei. Sonach hält das mittlere lilianische Sonnenjahr $365\frac{97}{400}$ Tage = 365 T. 5 St. 49′ 12″. Die Dauer des mittleren tropischen Sonnenjahrs ist aber, nach der Lalande'schen Bestimmung, (§. 13) 365 T. 5 St. 48′ 48″, also um 24″ kürzer als jene. Dieser jährliche Fehler wächst allmälig zu einem vollen Tage von 86400″, in 86400 : 24 = 3600 Jahren an. Zweckmäßig wird es daher sein, nach Delambre's Vorschlag,*) nach je 3600 Jahren, also zum ersten Male im Jahre 1600 + 3600 = 5200, einen nach Lili weg zu lassenden Schalttag wieder beizubehalten.

Lili's Ausgleichung der Neumondrechnung mit dem Mondlaufe läßt in 2500 der 76jährigen kallippischen Perioden oder in 2500 . 19 . 4 Jahren, welche, weil jeder 4jährige julianische Schaltkreis 1461 Tage zählt, 2500 . 19 . 1461 Tage enthalten, alle 400 Jahre 3 Säcular-Schalttage, also 25 . 19 . 3 Schalttage weg; so daß dieser Zeitraum 2500 . 19 . 1461 — 25 . 19 . 3 Tage in sich faßt. Andrerseits enthält dieser Zeitraum 2500 . 4 . 235 synodische Mondmonate, und wenn (§. 13) die Dauer eines solchen Monates 29 T. 12 St. 44′ 2·″8283 = λ gesetzt wird, 2500 . 4 . 235 λ Tage. Alle 2500 Jahre werden diesem Zeitraume 8 Tage als Mondgleichung zugezählt, daher 19 . 4 . 8 Tage im Ganzen; dagegen werden als Sonnengleichung obige 25 . 19 . 3 Säcular-Schalttage ebenfalls ausgestoßen. Mithin umfaßt der durch den Mondlauf bestimmte Zeitraum 2500 . 4 . 235λ + 19 . 4 . 8 — 25 . 19 . 3 Tage. Der Unterschied beider Zeiträume ist 2500 . 19 . 1461 — 2500 . 4 . 235λ — 19 . 4 . 8 Tage, daher beträgt der Fehler der lilianischen Neumondrechnung einen vollen Tag in

$$x = 2500 . 19 . 4 : (2500 . 19 . 1461 - 2500 . 4 . 235\lambda - 19 . 4 . 8) \text{ Jahren.}$$

Dieser Ausdruck abgekürzt gibt

$$x = 2500 . 19 : (2500 . 19 . 365\tfrac{1}{4} - 2500 . 235\lambda - 19 . 8),$$

oder weil 2500 . 19 = 47500

19 jul. Jahre = 19 . 365¼ = 6939 T. 18 St.

235 syn. Mon. = 235λ = 6939 T. 16 St. 31′ 4·″6505

Unterschied = 1 St. 28′ 55·″3495

2500 (19 . 365¼ — 235λ) = 154 T. 9 St. 6′ 13.″75

19 . 8 = 152 T. ist,

x = 47500 : (2 T. 9 St. 6′ 13·″75)

= 47500 : 2·3793 = 19964.

---

*) Traité complet d'astronomie théorique et pratique, tome 3, pag. 696.

Also nach etwa 20000 Jahren wird die lilianische Rechnung die Neumonde um einen Tag gefehlt angeben.

Will man die von Lili zu Grunde gelegte Dauer λ' des synodischen Mondmonates bestimmen, so hat man den Unterschied

$$2500.19.1461 - 2500.4.235\lambda' - 19.4.8 = 0$$

zu sezen. Daraus findet man

$$2500.235\lambda' = 625.19.1461 - 19.8 = 17349228$$

und $\lambda' = 138793784 : 4700000$ Tage $= 29$ T. 12 St. $44' 3''' 1782$, folglich Lili's mittleren Mondmonat blos um $0'''85$ länger als die Mayer'sche Bestimmung λ. Lili's Neumondrechnung kann also bereits für höchst genau angesehen werden, zumal die mittlere Bewegung des Mondes nicht constant ist.

101.

Einführung des gregorianischen Kalenders.

Der neue von Lili aufgestellte, und bereits von der römischen Kalender-Commission so genannte gregorianische Kalender, an welchem Papst Gregor das Verdienst hat, die längst gewünschte Kalenderverbesserung in's Leben gerufen zu haben, wurde an dem, von der päpstlichen Bulle, festgesezten Tage nur in dem größten Theile Italiens, in Spanien und Portugal eingeführt. In Frankreich geschah es erst zwei Monate später, indem man vom 9 December zum 20 überging. Die katholischen Kantone der Schweiz, die katholischen Niederlande und in Deutschland der Kaiser und die katholischen Stände traten der Verbesserung 1583, Polen 1586 und Ungarn 1587 bei. In Deutschland weigerten sich die Protestanten lange, den Kalender des Papstes anzunehmen. Erst am 23 September 1699 beschlossen die evangelischen Stände, einen, wie sie ihn nannten, verbesserten Kalender einzuführen, in welchem zwar, nach Auslassung von 11 Tagen, statt des 19 Februars 1700 sogleich der 1 März gezählt, also wie im päpstlichen datirt wurde, allein das Osterfest, so lange die Fehler des lilianischen Kalenders nicht verbessert würden, nicht kyklisch, sondern astronomisch für den Meridian von Uranienburg, Tycho's berühmter Sternwarte, berechnet werden sollte. Diesem Beschlusse traten gleichzeitig Dänemark und die vereinigten Niederlande bei, und das Jahr darnach die evangelischen Kantone der Schweiz, indem sie das achtzehnte Jahrhundert, mit Uebergehung der ersten 11 Tage, mit dem 12 Januar 1701 anfingen. In England führte man den gregorianischen Kalender 1752 ein, indem man vom 2 September auf den 14 überging, und in Schweden 1753, indem man nach dem 17 Febr. den 1 März zählte. Endlich bewog die Verschiedenheit der evangelischen und katholischen Osterfeier, welche 1724 und 1744 bereits eingetreten war und 1778 wieder bevorstand, das Corpus Evangelicorum, auf Antrag Friedrich's II, am 13 December 1775 zu beschließen, den nach der lilianischen Rechnung

geordneten Kalender unter der Benennung eines verbesserten Reichskalenders anzunehmen; welchem Beschlusse auch die evangelischen Kantone der Schweiz, Dänemark und Schweden beitraten. Blos die Russen, Griechen, Walachen, Serbier, und überhaupt die Bekenner zur rechtgläubigen (nicht unirten) griechischen Kirche, beharren noch jezt bei dem alten oder julianischen Kalender.

102.

e. Lili's oder gregorianische Osterrechnung.

Die Osterrechnung des Lili im gregorianischen Kalender unterscheidet sich von der alexandrinischen im julianischen Kalender blos in der Berechnung der Neumonde und Ostervollmonde, in welcher er sich seiner eigenthümlichen Epaktenreihen bedient.

Lili's Epaktenrechnung. Für die alexandrinische Epakte E' der goldenen Zahl N oder des Jahres N im 19jährigen Mondkreise fanden wir in §. 84, den Ausdruck

$$(157) \qquad E' = R\frac{11N-3}{30} \equiv 11N - 3, \text{ mod } 30.$$

Um sie aber zur Zeit der Kalenderverbesserung den Neumonden anzupassen, mußte man sie, vermöge §. 99, um 3 Tage vergrößern. Diese Epakte nun, welche von der Zeit der Kalenderverbesserung (1582) an etwa während eines Jahrhunderts bis 1700, im julianischen Kalender das Alter des Mondes am 1 Januar richtig angab, pflegt man die julianische Epakte zu nennen. Bezeichnet man sie mit ε, so hat man

$$\varepsilon \equiv E' + 3, \text{ mod } 30,$$

also

$$(181) \qquad \varepsilon \equiv 11N, \text{ mod } 30.$$

Soll nun aus dieser julianischen Epakte ε die lilianische E aufgestellt werden, so ist sie einerseits um die Mondgleichung zu vermehren, andrerseits um die Sonnengleichung zu vermindern, nemlich

lilian. Ep. $\equiv$ jul. Ep. + Mondgleichung — Sonnengleich., mod 30.

Die Sonnengleichung besteht aber theils aus den, zur Zurückführung der Jahrpunkte auf ihre vormaligen Monatstage, ausgestoßenen 10 Tagen, theils noch aus den, zur Festhaltung der Jahrpunkte auf diesen Monatstagen, in den Säcularjahren auszulassenden Schalttagen. Sie ist demnach nichts anderes als die Voreilung des lilianischen oder gregorianischen Kalenders vor dem julianischen, welche wir in §. 47, II, mit k bezeichneten und berechnen lehrten; wofern in Säcularjahren, die durch 400 nicht theilbar sind, die vom 1 März alten Styls an bestehende oder den im Säcularjahre enthaltenen vollen Hunderten $s = q\frac{a}{100}$ angehörige größere Voreilung genommen wird. Deuten

wir die sogleich zu ermittelnde Mondgleichung oder die Zurückschiebung des Kalenders der Neumonde durch K an, so ist die lilianische Epakte

$$(182)\qquad E \equiv \varepsilon + K - k, \text{ mod } 30 = 0, 1, \ldots 29.$$

Der **Bestimmung der Mondgleichung** liegt 1) Lili's Voraussetzung zu Grunde, es sei die dritte und letzte, vor der Kalenderverbesserung geschehene, Vermehrung der Epakte um einen Tag, in das Jahr 1400 oder in das 14. Säcularjahr gefallen; und 2) die Anordnung, daß diese Vermehrung nach der Kalenderreform im 18., 21., 24., 27., 30., 33., 36., 39., 43., ... Säcularjahre wieder vorgenommen, überhaupt in den, nach dem 14. Säcularjahre folgenden, 25stelligen Perioden von Säcularjahren, jedesmal auf 8 solche Jahre, namentlich auf das 4., 7., 10., 13., 16., 19., 22., 25. Säcularjahr verlegt werde.

Läßt man demnach das 17. Säcularjahr und nach ihm jedes 25ste, als das 42ste, 67ste, 92ste u. s. f. ganz ungezählt, so daß man bis zum $q\frac{a}{100} = s^{ten}$ Säcularjahre, vermöge Vorbegr. (202) in Allem $q\frac{s+25-17}{25} = q\frac{s+8}{25}$ Säcularjahre gar nicht zählt; so erfolgt in jedem dritten der nach dem 14ten bis zum s^{ten} folgenden Säcularjahre, deren Anzahl sonach $s - 14 - q\frac{s+8}{25}$ ist, und zwar vom 1 März an, die Erhöhung der Epakte um 1, also in Allem

$$q\frac{s - 14 - q\frac{s+8}{25}}{3} \text{ Mal.}$$

Mithin ist die Mondgleichung

$$(183)\qquad K = q\frac{s - 14 - q\frac{s+8}{25}}{3}.$$

Hiebei ist für immer fest zu halten, daß s die Anzahl der im Jahre a nach Chr. enthaltenen vollen Hunderte oder den Quotus $q\frac{a}{100}$ vorstellt. Setzt man zur Umstaltung dieses Ausdruckes $8 = 25 - 17$ zurück, so findet man

$$(184)\qquad K = q\frac{s - 15 - q\frac{s-17}{25}}{3}.$$

Diesen für die Rechnung bequemsten Ausdruck gab **Le Français** in den **Annales de mathématiques publiées par Gergonne, tome IV, mars 1814;** ferner **Delambre** in der **Connaissance de tems pour 1817, pag. 307,** jedoch ohne Ableitung.

Eine andere Verwandlung erzielt man, wenn man, vermöge Vorbegriffe XV, (59),

$$s - 14 - q\frac{s+8}{25} = q\frac{(s - 14 + 1)\,25 - (s + 8 + 1)}{25}$$
$$= q\frac{24s - 334}{25}$$

stellt; dann ist, vermöge Vorbegr. XIII, (39), nach Verwechslung der Theiler

$$K = \mathrm{q}\frac{\mathrm{q}\frac{24s - 334}{3}}{25}$$

und nach vollbrachter Theilung durch 3

$$(185) \qquad K = \mathrm{q}\frac{8s - 112}{25} = \mathrm{q}\frac{8s + 13}{25} - 5.$$

In dieser Form wurde die Mondgleichung von Gauß in der Zeitschrift für Astronomie, herausgegeben von Lindenau und Bohnenberger, 1. Bd, 1816, S. 158, und von Ciccolini in der Correspondance astronomique, vol. 11, pag. 145, jedoch von Beiden ohne Herleitung angegeben.

Bequemer für die Rechnung gestaltet man den vorlezten Ausdruck also:

$$(186) \qquad K = \mathrm{q}\frac{8(s - 14)}{25} = \mathrm{q}\frac{4.8(s - 14)}{100}.$$

In dieser Form läßt sich derselbe auch leicht direct ableiten. Sezt man in XXII, 3, der Vorbegr. $s - 14 = x$, heißt man nemlich das s^{te} Säcularjahr das x^{te} nach dem 14ten; so muß, weil unter je 25, diesem 14ten nachfolgenden, Säcularjahren 8 eine Steigerung ihrer Epakte um 1 erfahren, $u = K = \mathrm{q}\frac{\varepsilon x + \delta}{\varpi}$, $\varpi = 25$, $\varepsilon = 8$ gesezt werden. Zugleich bestehen folgende Ausnahmswerthe $\xi + 1 \equiv 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25$, also $\xi = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24$; daher ist $\Sigma\xi \equiv 3 + 6 + 9 + 12 - 10 - 7 - 4 - 1, \mod 25 \equiv 4.2 \equiv 8$.
Hieraus folgt nach (164) $\quad 8\chi \equiv 1, \mod 25$, also $\chi \equiv -3$
und vermöge (178) $\quad \delta \equiv -\frac{8}{2}(-3 + 1) - 8, \mod 25 \equiv 0$.
Daher findet man nun $K = \mathrm{q}\frac{8x}{25}$, oder wie oben

$$K = \mathrm{q}\frac{8(s - 14)}{25}.$$

Durch ein Ungeheuer von algebraischer Formel drückt Cisa de Crésy die Mondgleichung in den Memorie della reale accademia delle scienze di Torino, tom. 24, 1820, pag. 104 aus. Der Zug seiner Deduction ist kurz folgender. Das Jahr a nach Chr. läßt sich in den Ausdruck

$$a = 1800 + 2500n + 2400n' + 300n'' + 100n''' + n^{IV}$$

bringen, unter der Bedingung, daß jeder Coefficient größer als die Summe aller nachfolgenden Glieder sei; und nun sieht man sich berechtigt,

$$K = 1 + 8n + 7n' + n''$$

zu sezen. Die erste Gleichung liefert aber

$$\mathrm{q}\frac{a}{100} = s = 18 + 25n + 24n' + 3n'' + n''';$$

hieraus findet sich $\qquad n = \mathrm{q}\frac{s - 18}{25}$,

und $\qquad 24n' + 3n'' + n''' = \mathrm{r}\frac{s - 18}{25}$.

Daraus ferner
$$n' = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{s-18}{25}}{24}$$

und
$$3n'' + n''' = \mathfrak{r}\frac{\mathfrak{r}\frac{s-18}{25}}{24};$$

endlich aus der lezten Gleichung noch
$$n'' = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{\mathfrak{r}\frac{s-18}{25}}{24}}{3}.$$

Sezt man nun für ε, **K** und **k** ihre einfachsten Ausdrücke, so erhält man für das Jahr a nach Chr., bei welchem $\mathfrak{q}\frac{a}{100} = s$ ist, die *lilianische Epakte am 1 März*

$$(187) \quad E \equiv 11\mathfrak{R}\frac{a+1}{19} + \mathfrak{q}\frac{s - 15 - \mathfrak{r}\frac{s-17}{25}}{3} - s + \mathfrak{q}\frac{s}{4} + 2, \text{ mod } 30.$$

Hieraus oder auch aus dem Ausdrucke
$$E \equiv \varepsilon + K - k \equiv \varepsilon + \mathfrak{r}\frac{K-k}{30}, \text{ mod } 30$$
ersieht man, daß den 19 goldenen Zahlen oder Jahren des Mondkreises in jedem Jahrhunderte des gregorianischen Kalenders eine eigenthümliche Reihe von Epakten angehört, und daß jede zwei solche Epaktenreihen in allen gleichvielten goldenen Zahlen um gleich viel sich unterscheiden. Solcher Epaktenreihen gibt es offenbar 30, weil die Correction der Epakte, **K** — **k**, nach dem Modul 30 eben so viel verschiedene Reste darbietet. Sie finden sich in des Clavius großem Kalenderwerke zusammen gestellt, von wo sie in viele andere chronologische Schriften übergingen.

Die durch diese Rechnung aufgefundene Epakte ist jedoch noch nicht völlig richtig; sondern wenn sie 24 ist, muß sie jederzeit, und wenn sie 25 ist, dann um einen Tag erhöht werden, sobald außer ihr auch 24 in derselben Epaktenreihe vorkommt. Diese kleine Berichtigung der Epakte ließe sich zwar auch allgemein darstellen; indeß dürfte dies mit weniger Mühe an der entsprechenden Berichtigung des Datums der Ostergrenze vorgenommen werden.

Die Congruenz $E \equiv \varepsilon + K - k$, mod 30 drückt jedoch nicht blos die lilianische, sondern auch noch die übrigen Epakten aus, wenn man **k** — **K** für die alexandrinische Epakte = 8, für die dionysische = 11 und für die julianische = 0 sezt.

103.

Fortsezung. Ostergrenze.

I. Begreift man auch in der lilianischen Osterrechnung, so wie in der alexandrinischen, deren Principien sie beibehält, unter p den Abstand der Oster-

grenze oder des Ostervollmondes vom 21 März, oder auch den Abstand des Osterneumondes vom 8 März, welcher auch hier von 0 bis 29 Tagen reicht; so hat man, so wie früher in §. 82 und 83,

$$\text{Osterneumond} = p + 8 \text{ März} = p - 23 \text{ April}$$

$$\text{Ostergrenze} = \text{Ostervollmond} = p + 21 \text{ März} = p - 10 \text{ April.}$$

Der Osterneumond kann ebenfalls entweder der, auf den $w = 31 - E$ März fallende, dritte oder der (hier wenigstens) um 30 Tage später, am $w + 30$ März $= w - 1$ April $= 30 - E$ April eintretende vierte Neumond nach dem Neujahr sein; folglich ist auch hier, wie in §. 83,

$$p \equiv w - 8, \text{ mod } 30 = r\frac{w-8}{30},$$

und wenn man $w = 31 - E$

oder (§. 99) umfassender

$$w = 31 - r\frac{E}{30} \text{ einführt,}$$

$$(188) \qquad p \equiv -E - 7, \text{ mod } 30 = r\frac{-E-7}{30}.$$

Alle diese Ausdrücke gelten jedoch nur dann, wenn die Epakte weder 24 noch 25 ist, folglich der Abstand p weder 29 noch 28 wird. Denn die Epakte 24 wird immer, und die Epakte 25 wenigstens damals um 1 erhöht, wenn die Epakten 24 und 25 in dem nemlichen Epaktenkyklus vorkommen; folglich wird der Abstand 29 immer und der Abstand 28 damals um 1 vermindert, wo beide Abstände 28 und 29 in demselben Mondkreise sich ergeben. Bezeichnet man demnach, der an der Epakte E in einem solchen Falle anzubringenden Vermehrung um einen Tag entsprechend, die an dem Abstande p überhaupt vorzunehmende Verminderung durch δp, folglich den verbesserten Abstand durch $p - \delta p$; so ist ganz allgemein giltig

$$\text{Osterneumond} = p - \delta p + 8 \text{ März} = p - \delta p - 23 \text{ Apr.}$$

$$\text{Ostergrenze} = \text{Ostervollmond} = p - \delta p + 21 \text{ März} = p - \delta p - 10 \text{ Apr.}$$

Hierin hat man, weil die Epakte

$$(182) \qquad E \equiv \varepsilon + K - k, \text{ mod } 30 \text{ ist,}$$

$$p \equiv -\varepsilon + k - K - 7, \text{ mod } 30.$$

Es ist jedoch für das Jahr a nach Chr. die goldene Zahl

$$N = R\frac{a+1}{19} = r\frac{a}{19} + 1,$$

folglich die julianische Epakte

$$\varepsilon \equiv 11N, \text{ mod } 30 \equiv 11 r\frac{a}{19} + 11,$$

und

$$p \equiv -11 r\frac{a}{19} + k - K + 12, \text{ mod } 30.$$

Setzt man nunmehr zur Vereinfachung der Rechnung

$$(189) \qquad M \equiv k - K + 12, \text{ mod } 30,$$

so erhält man

$$(190)\qquad p \equiv -11 r\frac{a}{19} + M \equiv -11(N-1) + M, \bmod 30 = 0, 1, \ldots 29.$$

Ferner findet man aus (188) auch

$$(191)\qquad E \equiv -p - 7 \equiv 11 r\frac{a}{19} - M - 7 \equiv 11N - M + 12, \bmod 30.$$

Die Hilfszahl M ist, so wie die Sonnengleichung k und die Mondgleichung K, blos von der Zahl $s = q\frac{a}{100}$ der in der Jahrzahl a enthaltenen Hunderte abhängig, und kann etwa die Nummer der in dem $s+1^{ten}$ Jahrhunderte giltigen Epaktenreihe des Lili genannt werden. Nach den angemessensten Ausdrücken von k und K in §. 47 und 102 erhält man

$$(192)\qquad M \equiv s - q\frac{s}{4} - q\frac{s - 15 - q\frac{s-17}{25}}{3} + 10;$$

$$\equiv s - q\frac{s}{4} - q\frac{s - q\frac{s-17}{25}}{3} + 15, \bmod 30.$$

Die den nacheinander folgenden Jahrhunderten entsprechenden Nummern der lilianischen Epaktenreihen finden sich in der zweiten Spalte der Tafel 4 im Anhange.

Für die alexandrinische Epakten- und Ostergrenzen-Rechnung hat man, (§. 102), $k - K = 3$, daher $M = 15$.

II. Bevor wir uns an die Aufstellung des allgemeinen Ausdruckes der an dem Abstande p der Ostergrenze vom 21 März überhaupt vorzunehmenden Verminderung δp wenden, welche fast immer Null und nur dann $= 1$ wird, wenn die Epakte $E = 24$ oder 25, folglich jener Abstand p selbst $= 29$ oder 28 ist; müssen wir noch untersuchen, in welchen Epaktenreihen, oder bei welchen Nummern M der Epaktenreihen, eine der Epakten 24 oder 25 allein, und wo beide zugleich vorkommen können. Soll die Frage sogleich allgemein gestellt werden, so sind jene Nummern M zu suchen, bei welchen die Epakte E oder der Abstand p einen gewissen Werth annimmt; folglich ist aus den Congruenzen (190) und (191)

$$p \equiv -11 r\frac{a}{19} + M \quad \text{und} \quad E \equiv 11 r\frac{a}{19} - M - 7, \bmod 30$$

die Zahl M zu suchen, und man findet

$$M \equiv 11 r\frac{a}{19} + p \equiv 11 r\frac{a}{19} - E - 7, \bmod 30.$$

Setzt man hierin für $r\frac{a}{19}$ alle möglichen Werthe von 0 bis 18, so erhält man jene 19 Werthe von M, für welche E und p gewissen Zahlen gleichen können.

So kommt die Epakte $E = 24$ oder der Abstand $p = 29$ nur da vor, wo

$$M \equiv 11 r\frac{a}{19} + 29 \equiv 11 r\frac{a}{19} - 31, \text{ mod } 30$$

oder

$$(193) \qquad M \equiv 11 r\frac{a}{19} - 1, \text{ mod } 30$$

ist; also wo man hat

$$r\frac{a}{19} = 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10\ \ 11\ \ 12\ \ 13\ \ 14\ \ 15\ \ 16\ \ 17\ \ 18$$

$$\text{und } M = 29\ \ 10\ \ 21\ \ 2\ \ 13\ \ 24\ \ 5\ \ 16\ \ 27\ \ 8\ \ 19\ \ 30\ \ 11\ \ 22\ \ 3\ \ 14\ \ 25\ \ 6\ \ 17.$$

Soll die Epakte $E = 25$ oder der Abstand $p = 28$ in einem Epaktenkyklus vorkommen, so muß

$$(194) \qquad M' \equiv 11 r\frac{a'}{19} - 2, \text{ mod } 30,$$

sein; wenn man die nunmehrigen Zahlen a und M mit a' und M' bezeichnet; folglich

$$r\frac{a'}{19} = 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10\ \ 11\ \ 12\ \ 13\ \ 14\ \ 15\ \ 16\ \ 17\ \ 18$$

$$\text{und } M' = 28\ \ 9\ \ 20\ \ 1\ \ 12\ \ 23\ \ 4\ \ 15\ \ 26\ \ 7\ \ 18\ \ 29\ \ 10\ \ 21\ \ 2\ \ 13\ \ 24\ \ 5\ \ 16.$$

Vergleicht man diese Nummern M' mit den vorigen M, so sind nur jene einander gleich, und daher befinden sich beide Epakten 24 und 25 in denjenigen Kyklen, wo

$$r\frac{a}{19} = 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7$$

$$r\frac{a'}{10} = 11\ \ 12\ \ 13\ \ 14\ \ 15\ \ 16\ \ 17\ \ 18 = r\frac{a}{19} + 11,$$

$$M = M' = 29\ \ 10\ \ 21\ \ 2\ \ 13\ \ 24\ \ 5\ \ 16 \text{ ist;}$$

und in einem solchen Mondkyklus tritt die Epakte 25, welche hier durch 26 ersetzt wird, immer um 11 Jahre später als die Epakte 24 ein.

Damit die Epakte $E = 26$ oder der Abstand $p = 27$ in einem Epaktenkreise vorkomme, muß

$$M'' = 11 r\frac{a''}{19} - 3, \text{ mod } 30$$

sein; wofern man die hiesigen Werthe von a und M mit a'' und M'' andeutet, folglich

$$r\frac{a''}{19} = 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10\ \ 11\ \ 12\ \ 13\ \ 14\ \ 15\ \ 16\ \ 17\ \ 18$$

$$M'' = 27\ \ 8\ \ 19\ \ 30\ \ 11\ \ 22\ \ 3\ \ 14\ \ 25\ \ 6\ \ 17\ \ 28\ \ 9\ \ 20\ \ 1\ \ 12\ \ 23\ \ 4\ \ 15.$$

Da nun keine dieser Nummern M'' in beiden früheren Reihen der Nummern M und M' zugleich vorkommt, so leuchtet ein, daß in jenen Epaktenkyklen, in denen die exceptionellen Epakten 24 und 25 zugleich sich vorfinden, niemals auch die Epakte 26 erscheint; weshalb diese hier anstatt der Epakte 25 gesezt wird.

Von diesen Ergebnissen kann man sich auch auf folgendem Wege Rechenschaft ablegen. Aus der Congruenz

$$(191) \qquad E \equiv 11 r\frac{a}{19} - M - 7, \text{ mod } 30$$

folgt

$$11 r\frac{a}{19} \equiv E + M + 7, \text{ mod } 30,$$

und wenn man, weil $11 . 11 \equiv 1$, mod 30 ist, mit 11 multiplicirt,

$$r\frac{a}{19} \equiv 11 (E + M + 7), \text{ mod } 30.$$

Sollen nun zwei nach einander kommende Epakten E und E + 1 in einerlei Epaktenreihe erscheinen, welche die Nummer M führt, und zwar in den Jahren a und a', so müssen die Congruenzen

$$r\frac{a}{19} \equiv 11 (E + M + 7), \text{ mod } 30$$

$$r\frac{a'}{19} \equiv 11 (E + M + 8), \text{ mod } 30$$

bestehen; aus denen der Unterschied

$$r\frac{a'}{19} - r\frac{a}{19} \equiv 11, \text{ mod } 30,$$

also

$$r\frac{a'}{19} \equiv r\frac{a}{19} + 11, \text{ mod } 30$$

folgt. Es sind aber $r\frac{a}{19}$ und $r\frac{a'}{19} = 0, 1, 2, \ldots 18$ und $r\frac{a}{19} + 11 = 11, 12, \ldots 29$, demnach die positiven congruenten Zahlen $r\frac{a}{19}$ und $r\frac{a}{19} + 11$ zugleich kleiner als der Modul 30; mithin müssen sie, vermöge Vorbegriffe XI, 4, gleich, nemlich

$$r\frac{a'}{19} = r\frac{a}{19} + 11$$

sein. Noch mehr; es ist $r\frac{a}{19} \overline{\gtrless} 0$, daher $r\frac{a'}{19} \overline{\gtrless} 11$, und andrerseits ist $r\frac{a'}{19} \overline{\lessgtr} 18$, folglich $r\frac{a}{19} = r\frac{a'}{19} - 11 \overline{\lessgtr} 7$.

Somit muß $r\frac{a}{19} = \;\; 0, \;\; 1, \;\; 2, \;\; 3, \;\; 4, \;\; 5, \;\; 6, \;\; 7$

und $\quad r\frac{a'}{19} = 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18$ sein.

Sollen demnach zwei nur um 1 von einander verschiedene Epakten in demselben Mondkreise vorkommen, so muß die höhere Epakte um 11 Jahre später als die niedrigere, und sofort diese niedrigere in einem der 8 ersten, jene höhere dagegen in einem der 8 letzten Jahre eintreten. Vom 12. bis zum 19. Jahre sind nemlich die nach einander folgenden 8 Epakten in der nemlichen Ordnung durchgängig um 1 höher als die Epakten der ersten 8 Jahre.

Die beiden exceptionellen Epakten 24 und 25 können demnach in einerlei Mondzyklus sich vorfinden, allein jedesmal die Epakte 24 in einem der ersten,

und 25 in einem der letzten 8 Jahre. Dann ist also

$$r\frac{a}{19} = 0,\ 1, \ldots .\ 7$$

$$r\frac{a'}{19} = 11,\ 12, \ldots .\ 18$$

und
$$M \equiv 11 r\frac{a}{19} - E - 7, \mod 30 \equiv 11 r\frac{a}{19} - 1 \equiv 11 r\frac{a'}{19} - 2$$
$$= 29,\ 10,\ 21,\ 2,\ 13,\ 24,\ 5,\ 16.$$

Hieraus leuchtet zugleich ein, daß in keinem Mondkyklus drei in der natürlichen Reihe der Zahlen unmittelbar nach einander folgende Epakten, E, $E+1$, $E+2$, zugleich vorkommen. Denn die mittlere $E+1$ aus ihnen müßte, weil außer ihr auch die niedrigste E in dem Mondkyklus vorkommt, in einem der letzten 8 Jahre vom 12ten bis 19ten, und weil nebst ihr die höchste $E+2$ auch noch erscheint, zugleich in einem der ersten 8 Jahre vom 1ten bis 8ten sich vorfinden; was offenbar unmöglich ist.

In welchem Mondkreise demnach die beiden Epakten 24 und 25 sich befinden, in diesem kann weder die Epakte 26 noch 23 vorkommen.

III. In der Absicht, nunmehr die Verminderung δp des Abstandes p der Ostergrenze vom 21 März allgemein auszudrücken, erwägen wir zunächst, daß $\delta p = 0$ ist, so lange $p < 28$ ausfällt; dagegen $\delta p = 1$ sein kann, wenn $p = 28$ oder 29, also > 27 sich ergibt. Daraus folgt, δp muß einen Factor U enthalten, welcher unter denselben Umständen, wie δp, entweder 0 oder 1 wird. Setzt man sonach, vermöge Vorbegr. XXII, 2,

$$U = q\frac{p+\vartheta}{\mu},\quad g = 28,\quad \vartheta = h + \omega - 56,\quad \mu = h + \omega - 28;$$

so muß, da hier für $p = 0$ auch $U = 0$ werden soll, $\vartheta \geqq 0$ aber $< \mu$ angenommen werden. Denkt man sich demnach ϑ positiv mit Einschluß der Null, so kann man $h + \omega = 56 + \vartheta$, also $\mu = 28 + \vartheta$ setzen, weil hier auch immer $\vartheta < \mu$ ist. Sofort hat man, so wie auch in (153) der Vorbegriffe, den vielförmigen Ausdruck

$$(195)\qquad U = q\frac{p+\vartheta}{28+\vartheta},$$

und in der einfachsten Form

$$U = q\frac{p}{28},$$

oder wenn man den in dieser Rechnung häufig vorkommenden Theiler 30 wünscht,

$$U = q\frac{p+2}{30}.$$

Ferner ist noch zu erwägen, daß die Verminderung $\delta p = 1$ werden müsse, sowohl in jenen Epaktenreihen, wo die Epakten 25 und 24 zugleich vorkommen, deren Nummern also

$$M = 29,\ 10,\ 21,\ 2,\ 13,\ 24,\ 5,\ 16,$$

und die Reste $r\frac{a}{19} = 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18$

sind; als auch in denjenigen Epaktenreihen, wo die Epakte 24 allein vorkommt, und deren Nummern

$M = 29, 10, 21, 2, 13, 24, 5, 16, 27, 8, 19, 30, 11, 22, 3, 14, 25, 6, 17,$
und die Reste

$\mathfrak{r}\frac{a}{19} = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,$

sind, sonach die vorigen schon mit unter sich enthalten; und daß dagegen in jedem anderen Falle die Verminderung $\delta p = 0$ sei. Hieraus folgt, daß der Ausdruck dieser Verminderung δp einen zweiten Factor V enthalten muß, welcher von der Nummer M der lilianischen Epaktenreihe dergestalt abhängt, daß er blos für die zulezt hergezählten Nummern 1, sonst immer 0 werde. Daher lassen sich in XXII, 3, (199) der Vorbegriffe folgende Werthe sezen:

$x = M,\ \mu = \varpi = 30,\ \eta = \varepsilon = 19,\ \Delta u = w = V = \mathfrak{q}\dfrac{\varepsilon - \psi + \mathfrak{r}\frac{\varepsilon x + \delta}{\varpi}}{\varpi - \psi},$
$\psi = 0, 1, \ldots \varpi - \varepsilon = 0, 1, \ldots 11,\ \xi = 29, 10, 21, 2, 13, 24, 5, 16, 27, 8, 19, 30, 11, 22, 3, 14, 25, 6, 17,\ \Sigma\xi \equiv -1 + 10 - 9 + 2 + 13 - 6 + 5 - 14 - 3 + 8 - 11 + 0 + 11 - 8 + 3 + 14 - 5 + 6 - 13,$ mod $30 \equiv -1 + 10 - 9 + 2 \equiv 2$; woraus man erhält $\delta \equiv -\frac{19+1}{2} - 2 \equiv -12$, folglich

$$(196) \qquad V = \mathfrak{q}\frac{19 - \psi + \mathfrak{r}\frac{19M - 12}{30}}{30 - \psi} \text{ oder}$$

$$V = \mathfrak{q}\frac{18 - \psi + \mathfrak{R}\frac{-11(M+1)}{30}}{30 - \psi},$$

und darin $\psi = 0, 1, 2, \ldots . 11$, dagegen $-\psi = 1, 2, 3, 4, \ldots .$

Will man einen der in der Osterrechnung häufig vorkommenden Theiler 30 und 19, oder einen der in der Rechnung bequemen Theiler 25 und 20 wählen; so hat man $\psi = 0, 11, 5, 10$ zu sezen und erhält

$$(197) \qquad V = \mathfrak{q}\frac{18 + \mathfrak{R}\frac{-11(M+1)}{30}}{30} = \mathfrak{q}\frac{7 + \mathfrak{R}\frac{-11(M+1)}{30}}{19}$$
$$= \mathfrak{q}\frac{13 + \mathfrak{R}\frac{-11(M+1)}{30}}{25} = \mathfrak{q}\frac{8 + \mathfrak{R}\frac{-11(M+1)}{30}}{20}.$$

Der Factor V läßt sich noch auf andere Weisen ausdrücken, wenn man die Bedingung, unter welcher eine gewisse Epakte E in einer Reihe, deren Nummer M angewiesen ist, vorkommen kann, abändert. Die Congruenz

$$E \equiv 11\mathfrak{r}\frac{a}{19} - M - 7, \text{ mod } 30$$

gibt nemlich, (Seite 266) auch

$$r\frac{a}{19} \equiv 11\,(M+E+7), \text{ mod } 30$$
$$= 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ 18 < 19, \text{ also}$$
$$= r\frac{11\,(M+E+7)}{30}.$$

Da jedoch die Reste nach dem Theiler 30 von 0 bis 29 reichen, hier aber nur jene genommen werden, die unter 19 sind; so kann die Epakte E nur in jenen Reihen vorkommen, deren Nummern M der Bedingung genügen, daß

$$r\frac{11\,(M+E+7)}{30} < 19$$

oder, was daraus sogleich folgt, daß

$$30 - r\frac{11\,(M+E+7)}{30} = R\frac{-11\,(M+E+7)}{30} > 11 \text{ sei.}$$

Ferner ist $r\frac{a'}{19} = r\frac{a}{19} + 11 \equiv 11\,(M+E+8)$, mod 30

$$= 11,\ 12,\ \ldots\ 29 > 10, \text{ daher}$$
$$= r\frac{11\,(M+E+8)}{30}.$$

Mithin kann obige Bedingung auch fordern, daß

$$r\frac{11\,(M+E+8)}{30} > 10 \text{ sei.}$$

Insbesondere kann demnach die Epakte E = 24 nur in einer solchen Reihe von der Nummer M vorkommen, folglich nur da p = 28 sein, wo

$$r\frac{11\,(M+1)}{30} < 19$$

oder, $$30 - r\frac{11\,(M+1)}{30} = R\frac{-11\,(M+1)}{30} > 11$$

oder endlich $$r\frac{11\,(M+2)}{30} > 10 \text{ ist.}$$

Unter eben diesen Bedingungen wird jedoch der Factor $V = 1$, während er sonst immer 0 bleibt; weil derselbe für jene lilianischen Epaktenreihen in 1 übergeht, in denen die Epakte 24 allein oder mit 25 vorkommt.

Es ist demnach verstattet, in XXII, 1, (147) der Vorbegriffe anzunehmen

$$V = u = q\frac{x+\vartheta}{\mu},$$

und zwar erstlich $x = R\frac{-11\,(M+1)}{30} = 30 - r\frac{11\,(M+1)}{30}$,

$g = 11$, $h =$ dem größten Werthe von $x = 30$,

daher $\vartheta = 30 - 24 + \omega = 6 + \omega$

$\mu = 30 - 12 + \omega = 18 + \omega.$

Sonach ist $$V = q\frac{6+\omega+R\frac{-11\,(M+1)}{30}}{18+\omega} = q\frac{36+\omega-r\frac{11\,(M+1)}{30}}{18+\omega}$$

und darin $\omega = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots;$

mithin dieser Ausdruck übereinstimmig mit dem obigen.

Nimmt man dagegen $x = \mathrm{r}\frac{11(M+2)}{30}$,

$g = 10$, $h =$ dem größten Werthe von $x = 29$,

so findet sich $\vartheta = 7 + \omega$, $\mu = 18 + \omega$;

folglich

$$V = \mathrm{q}\frac{7 + \omega + \mathrm{r}\frac{11(M+2)}{30}}{18 + \omega}, \tag{198}$$

worin wieder $\omega = 1, 2, 3, \ldots$ sein kann.

Daraus ergibt sich

$$V = \mathrm{q}\frac{8 + \mathrm{r}\frac{11(M+2)}{30}}{19} = \mathrm{q}\frac{9 + \mathrm{r}\frac{11(M+2)}{30}}{20} \tag{199}$$

$$= \mathrm{q}\frac{19 + \mathrm{r}\frac{11(M+2)}{30}}{30}.$$

Nunmehr darf man die Verminderung δp des Abstandes p, da an sie keine weiteren Anforderungen als die beiden eben besprochenen gestellt werden, dem Producte der einzigen zwei, allgemein durch p und M ausgedrückten, Factoren U und V gleich stellen, nemlich

$$\delta p = UV \tag{200}$$

sezen. Wählt man insbesondere in U und V die kleinsten Theiler, so ist

$$\delta p = \mathrm{q}\frac{p}{28} \cdot \mathrm{q}\frac{7 + \mathrm{R}\frac{-11(M+1)}{30}}{19} = \mathrm{q}\frac{p}{28} \cdot \mathrm{q}\frac{8 + \mathrm{r}\frac{11(M+2)}{30}}{19}.$$

Auf diese Weise erhält man den berichtigten Abstand der Ostergrenze vom 21 März, $p - \delta p$, stets nur einer der Zahlen von 0 bis 28 gleich.

IV. Bemerkung über die Neumondrechnung Lili's und der lateinischen Festrechner. Es befremdet nicht wenig, die Computisten der Osterfeier in der lateinischen Kirche, seit Ende des dritten Jahrhundertes, mit allerhand Epakten und immerwährenden Kalendern zur Bestimmung der Neumonde im ganzen Jahre sich quälen zu sehen, während es sich doch ganz einfach nur um den Tag des Ostervollmondes handelte. Es lag doch auf der Hand, daß man, wie bei der Osterrechnung der Alexandriner gezeigt wurde, viel leichter davon kam, wenn man die Mondjahre immer mit dem Ostervollmondstage anfangen ließ, und den Schaltmonat in der Regel zu 30 und nur ausnahmsweise zu 29 Tagen rechnete; folglich blos den jedesmaligen Tag des Ostervollmondes oder der Ostergrenze bestimmte.

104.

Fortsezung und Schluß.

I. Wochentag der Ostergrenze. Bedeutet L den lilianischen Sonntagsbuchstaben im Jahre a nach Chr., und k die Voreilung des gregorianischen

Kalenders vor dem julianischen für die in der Jahrzahl a enthaltenen Hunderte, so ist nach §. 47, II, (61), und §. 63, (96)

$$k = s - q\frac{s}{4} - 2 \equiv 2\,r\frac{s}{4} - s - 2, \text{ mod } 7$$

und nach (113)

$$L \equiv -a - q\frac{a}{4} + k + 3$$

$$\equiv 2r\frac{a}{4} - 3a + k + 3, \text{ mod } 7.$$

Weil nun die Ostergrenze auf den $p - \delta p + 21$ März trifft, so findet sich vermöge §. 72, (140), wo $d = p - \delta p + 21$ März $= p - \delta p + 21 + 59 + i$ ist, der Wochentag f der Ostergrenze

(201) $$f \equiv p - \delta p - L - 3, \text{ mod } 7 = 1, 2, \ldots 7,$$

folglich, wenn man darin für L den letzten Ausdruck einführt,

(202) $$f \equiv 3a - 2r\frac{a}{4} + p - \delta p - k + 1, \text{ mod } 7.$$

Will man das Jahr α im laufenden Jahrhunderte in Rechnung bringen, so hat man $a = 100s = \alpha$, $k = s - q\frac{s}{4} - 2 \equiv 2r\frac{s}{4} - s - 2$, mod 7, folglich vermöge (114)

$$L \equiv 2r\frac{\alpha}{4} - 3\alpha + 2r\frac{s}{4} + 1$$

und darum

$$f \equiv 3\alpha - 2r\frac{\alpha}{4} + p - \delta p - 2r\frac{s}{4} + 3, \text{ mod } 7 = 1, 2, \ldots 7.$$

II. Datum der Osterfeier. Festzahl. Der Abstand b des Osterfestes von der Ostergrenze ist, wie sonst immer, vermöge (176) und (177)

$$b = 8 - f = \mathfrak{R}\frac{1-f}{7},$$

daher hier

(203) $$b = \mathfrak{R}\frac{L - p + \delta p - 3}{7}$$

oder $$b = \mathfrak{R}\frac{2r\frac{a}{4} - 3a - p + \delta p + k}{7}$$

oder auch $$b \equiv 2r\frac{\alpha}{4} - 3\alpha - p + \delta p + 2r\frac{s}{4} - 2, \text{ mod } 7 = 1, 2, \ldots 7.$$

Darnach ist

Ostern od. Ostersonntag $= 21 + p - \delta p + b$ März $= p - \delta p + b - 10$ April oder, wenn man den Abstand des Osterfestes vom 21 März d. i. die Festzahl mit v bezeichnet,

(204) $$v = p - \delta p + b = p - \delta p + 8 - f$$

und

(174) Ostern $= v + 21$ März $= v - 10$ April.

105.

Uebersicht der Berechnung der Osterfeier im gregorianischen Kalender.

Um demnach für ein Jahr a nach Chr. die Festzahl und das Datum der Osterfeier zu berechnen, sucht man vor Allem nach §. 49, III, die goldene Zahl

$$N \equiv a+1, \bmod 19 = \mathrm{r}\frac{a+1}{19}$$
$$\equiv \mathrm{q}\frac{a+1}{20} + \mathrm{r}\frac{a+1}{20}, \bmod 19,$$

die Anzahl der in a enthaltenen Jahrhunderte $s = \mathrm{q}\frac{a}{100}$ und nach §. 103, I, (192) die Hilfszahl

$$M \equiv s - \mathrm{q}\frac{s}{4} - \mathrm{q}\frac{s - \mathrm{q}\frac{s-17}{25}}{3} + 15, \bmod 30.$$

Hierauf berechnet man nach §. 103, I, (191) und (188) die Epakte

$$E \equiv 11N - M + 12, \bmod 30$$

und den vorläufigen Abstand der Ostergrenze vom 21 März

$$p \equiv -E - 7, \bmod 30 = 0, 1, \ldots 29.$$

Oder sobald man die Hilfszahl M kennt, berechnet man sogleich nach §. (103), I, (190) diesen vorläufigen Abstand der Ostergrenze

$$p \equiv -11(N-1) + M \equiv -11\mathrm{r}\frac{a}{19} + M, \bmod 30,$$
$$= 0, 1, \ldots 29,$$

indem man zur etwaigen Abkürzung der Rechnung die Anmerkung in §. 49, III, benützt, daß $\mathrm{r}\frac{a}{19} \equiv \mathrm{q}\frac{a}{20} + \mathrm{r}\frac{a}{20}$, mod 19 ist.

Dazu bestimmt man noch, vermöge §. 103, (200), (195) bis (199), die an dem Abstande p vorzunehmende Verminderung

$$\delta p = \mathrm{q}\frac{p}{28} \cdot \mathrm{q}\frac{7 + \mathrm{r}\frac{-11(M+1)}{30}}{19} = \mathrm{q}\frac{p}{28} \cdot \mathrm{q}\frac{8 + \mathrm{r}\frac{11(M+2)}{30}}{19},$$
$$= 0, 1.$$

Ferner berechnet man nach §. 47, II, (61) die Voreilung des gregorianischen Kalenders vor dem julianischen

$$k = s - \mathrm{q}\frac{s}{4} - 2,$$

sofort nach §. 104 den Wochentag der Ostergrenze

$$f \equiv 3a - 2\mathrm{r}\frac{a}{4} + p - \delta p - k \pm 1, \bmod 7 = 1, 2, \ldots 7,$$

und die Festzahl $\qquad v = p - \delta p + 8 - f;$

oder den Abstand des Ostertages von der Ostergrenze

$$b = 8 - f \equiv 2\mathrm{r}\frac{a}{4} - 3a - p + \delta p + k, \bmod 7$$
$$= 1, 2, \ldots 7$$

und die Festzahl $\quad v = p - \delta p + b.$

Dann ist

Ostern oder Ostersonntag $= v + 21$ März $= v - 10$ April.

Bringt man in Anrechnung, daß das Jahr a nach dem s^{ten} Jahrhunderte das Jahr α, also $a = 100s + \alpha$, und $\alpha = \mathfrak{r}\frac{a}{100}$ ist, so hat man

$$f \equiv 3\alpha - 2\mathfrak{r}\frac{\alpha}{4} + p - \delta p - 2\mathfrak{r}\frac{s}{4} + 3, \text{ mod } 7 = 1, 2, \ldots 7$$

und

$$b \equiv 2\mathfrak{r}\frac{\alpha}{4} - 3\alpha - p + \delta p + 2\mathfrak{r}\frac{s}{4} - 2, \text{ mod } 7 = 1, 2, \ldots 7.$$

Die Berechnung des Osterfestes im julianischen Kalender kann in derselben Weise ausgeführt werden, wenn man $M = 15$, also $\delta p = 0$ und $k = 0$ sein läßt. (§. 103, I.) Man erhält dann zu dieser Rechnung wie im §. 82 und 88, die Gleichungen

$$N = \mathfrak{R}\frac{a+1}{19} \equiv \mathfrak{q}\frac{a+1}{20} + \mathfrak{r}\frac{a+1}{20}, \text{ mod } 19$$

$$p = \mathfrak{r}\frac{-11N-4}{30} \equiv -11\mathfrak{r}\frac{a}{19} \pm 15, \text{ mod } 30$$

$$b = \mathfrak{R}\frac{2\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3a - p}{7}$$

$$v = p + b.$$

106.

Einfluß der Vergrößerung der exceptionellen Epakten auf die Festzahl.

Die Epakten 24 und 25 würden den Osterneumond auf den 6 und 5 April, folglich den Ostervollmond oder die Ostergrenze auf den 19 und 18 April, deren Wochenbuchstaben D und C sind, daher den Abstand der Ostergrenze vom 21 März gleich 29 und 28 angeben. Nach Vermehrung dieser Epakten um einen Tag aber deuten sie den Osterneumond am 5 und 4 April, also die richtige Ostergrenze am 18 und 17 April an. Würden nun jene vorläufig bestimmten Ostergrenzen auf einen Sonntag fallen, was geschähe, wenn der Sonntagsbuchstabe D oder C wäre; so würde nach der Rechnung Ostern auf den nächst folgenden Sonntag, den 26 oder 25 April treffen, folglich die Festzahl 36 oder 35 sein. Allein die richtige Ostergrenze trifft auf den nächst vorhergehenden Tag, also auf Samstag den 18 oder 17 April; folglich wird Ostern schon auf den gleich darnach kommenden Sonntag, den 19 oder 18 April treffen und sonach um eine Woche früher als die Rechnung angibt; daher wird die Festzahl gleichfalls um 7 Tage kleiner anzusetzen sein.

Zu denselben Schlüssen geleitet die Untersuchung der gefundenen allgemeinen Formen. Denn läßt man in obigen Formen die Verbesserung δp weg,

indem man p anstatt $p - \delta p$ oder $\delta p = 0$ sezt, so erhält man die ungefähren Werthe von f, b, v, namentlich

$$f = \mathfrak{R}\frac{p-L-3}{7}$$
$$b = \mathfrak{R}\frac{L-p-3}{7} = 8 - f$$
$$v = p + b = p + 8 - f.$$

Bezeichnet man dagegen ihre berichtigten Werthe mit f', b', v'; so hat man $\delta p = 1$ zu sezen und erhält

$$f' = \mathfrak{R}\frac{p-L+3}{7}$$
$$b' = \mathfrak{R}\frac{L-p-2}{7} = 8 - f'$$
$$v' = p + b' - 1 = p + 7 - f'.$$

Daraus ergibt sich der Unterschied der Festzahlen

$$v' - v = b' - b - 1 = f - f' - 1,$$

und $$b' - b = f - f' = \mathfrak{R}\frac{L-p-2}{7} - \mathfrak{R}\frac{L-p-3}{7},$$

also vermöge Vorbegr. XV, (64)

$$= 1 - 7\mathfrak{Q}\frac{1 + \mathfrak{R}\frac{L-p-3}{7}}{7};$$

mithin ist $$v' - v = -7\mathfrak{Q}\frac{\mathfrak{R}\frac{L-p-3}{7}}{7}.$$

Dieser Quotus ist blos dann nicht 0 sondern 1, folglich die Berichtigung $v' - v$ der Festzahl v nur damals nicht 0 sondern -7, oder die Festzahl v ist nur dazumal nicht richtig, sondern um 7 zu groß, nemlich $v' = v - 7$, wenn

$$\mathfrak{R}\frac{L-p-3}{7} = 7, \text{ also } L \equiv p + 3, \bmod 7$$

ist. In einem solchen Ausnahmsfalle wird jedoch $f = 1, b = 7$ und $f' = 7, b' = 1$; daher $v' = p$.

Insbesondere findet man, daß, wenn $v' = v - 7$ sein soll,
bei $p = 29$, der Sonntagsbuchstabe $L = 4 = D$,
und die richtige Festzahl $v' = 29$, hingegen
bei $p = 28$, der Sonntagsbuchstabe $L = 3 = C$
und die richtige Festzahl $v' = 28$ sein muß.

107.

Abänderung der Osterrechnung.

Will man demnach diese zwei ohnehin seltenen Ausnahmen nicht in die allgemeinen Ausdrücke verflechten, sondern abgesondert behandeln; so kann

man die Berechnung der (gregorianischen oder julianischen) Festzahl v etwas einfacher nach folgendem Zuge von Gleichungen vornehmen:

$$N = \mathfrak{R}\frac{a+1}{19} \equiv \mathfrak{q}\frac{a+1}{20} + \mathfrak{r}\frac{a+1}{20}, \ \mathrm{mod}\,19,$$

$$M \equiv s - \mathfrak{q}\frac{s}{4} - \mathfrak{q}\frac{s - \mathfrak{q}\frac{s-17}{25}}{3} + 15, \ \mathrm{mod}\,30,$$

$$p = \mathfrak{r}\frac{-11(N-1)+M}{30} = \mathfrak{r}\frac{-11\mathfrak{r}\frac{a}{19}+M}{30}$$

$$k = s - \mathfrak{q}\frac{s}{4} - 2$$

$$f = \mathfrak{R}\frac{3a - 2\mathfrak{r}\frac{a}{4} + p - k + 1}{7} \quad \text{und} \quad v = p + 8 - f$$

oder

$$b = \mathfrak{R}\frac{2\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3a - p + k}{7} \quad \text{und} \quad v = p + b.$$

Für die julianische oder alexandrinische Festzahl ist stets $M = 15$ und $k = 0$. Man bemerke jedoch für die gregorianische Festzahl

1. So oft $p = 29$ und $f = 1$ oder $b = 7$ ausfällt, nimmt man die Festzahl v nicht $= 36$, wie sie sich ergibt, sondern um 7 kleiner, nemlich $v = 29$; oder Ostern wird nicht am 26 April, sondern am 19 April gefeiert.

Diese Ausnahme tritt nur in solchen Jahrhunderten ein, wo $\mathfrak{r}\frac{11(M+1)}{30} < 19$, also M eine der 19 Zahlen 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29, 30 ist, und da nur in jenen Jahren, die den Sonntagsbuchstaben D haben. Solche Jahre sind n. Chr.: 1609, 1981, 2076, 2133, 2201, 2296, 2448, 2668, 2725, 2820, u. s. f.

2. So oft $p = 28$ und $f = 1$ oder $b = 7$ ausfällt, und $\mathfrak{r}\frac{11(M+2)}{30} > 10$, also M eine der 8 Zahlen 2, 5, 10, 13, 16, 21, 24, 29 ist, oder aber < 19, $\mathfrak{r}\frac{a}{19} > 10$, folglich $N > 11$ ist; wird die Festzahl v nicht $= 35$, wie sie sich ergibt, sondern gleichfalls um 7 kleiner, nemlich $v = p = 28$ gesezt, daher Ostern nicht am 25 April, sondern am 18 April gefeiert.

Mit dieser Ausnahme ist immer der Sonntagsbuchstabe C verbunden, und sie tritt blos ein in den Jahren n. Chr. 1954, 2049, 2106, 3165, 3260, 3317, 3852, 3909, 4004, u. s. f.

108.

Gaußische Osterrechnung.

Die hier aufgestellte Osterrechnung ist im Wesentlichen diejenige, welche Gauß in des Freiherrn von Zach monatlicher Correspondenz, 1800, August, gegeben hat, und nach welcher Delambre in der Connaissance des tems

1817, pag. 307, später aber **Cisa de Grésy** in einer Abhandlung, die der Turiner Akademie am 15 Januar 1818 vorgelesen wurde und in **Le memorie della reale accademia delle scienze di Torino tome 24, 1820, p. 77—106**, abgedruckt ist, ähnliche arithmetische Osterregeln aufstellten. Nach Gauß setzt man

$$r\frac{a}{19} = A,\ r\frac{a}{4} = B,\ r\frac{a}{7} = C$$

$$p = D,\ b - 1 = E,\ r\frac{k-1}{7} = N$$

also

$$D = r\frac{19A + M}{30}$$

$$E = r\frac{2B + 4C + 6D + N}{7}$$

und findet

$$\text{Ostern} = 22 + D + E \text{ März} = D + E - 9 \text{ April.}$$

Seine Regel lautet daher so:

Man theile das gegebene Jahr nach Chr. der Reihe nach durch 19, 4, 7 und nenne die Reste beziehlich A, B, C; ferner theile man $19A + M$ durch 30 und nenne den Rest D; endlich theile man $2B + 4C + 6D + N$ durch 7 und nenne den Rest E. Dann fällt Ostern auf den $22 + D + E^{ten}$ März oder $D + E - 9^{ten}$ April.

Für den julianischen Kalender gilt diese Vorschrift ohne Ausnahme und immer ist $M = 15,\ N = 6$.

Für den gregorianischen Kalender aber bemerke man:

1. Wenn die Rechnung für den Ostersonntag den 26 April gibt, so muß man immer den 19 April nehmen.

2. Wenn die Rechnung für den Ostersonntag den 25 April gibt, und wenn zugleich $D = 28$ und $A > 10$ ist, so muß man immer den 18 April nehmen.

Ferner ist im gregorianischen Kalender

von	1582,	1700,	1800,	1900,
bis	1699,	1799,	1899,	2099,
M =	22,	23,	23,	24,
N =	2,	3,	4,	5.

109.

Bestimmung der Festzahlen mittels Tafeln.

Zur Bestimmung des Datums der Osterfeier, an dessen Statt wir allgemeiner die Festzahl setzen, wurden von mehreren Gelehrten Tafeln angegeben, welche theils das Gesuchte ohne alle Rechnung liefern, theils die Rechnung unterstützen und abkürzen. Die einfachste und umfassendste darunter dürfte wol

diejenige sein, welche Kulik entworfen und in seinem tausendjährigen Kalender *) veröffentlicht hat, und die wir hier in Tafel 4 des Anhanges, nach Weglassung der für unseren Zweck entbehrlichen Rubriken, einfacher und, indem wir sie, durch Zugabe zweier Columnen, zugleich zu einer vollständigen Tafel der Epakten und Ostergrenzen machen, noch reichhaltiger darstellen.

Das dieser Tafel zum Grunde liegende höchst sinnreiche Princip ist die Zurückführung des Ausdruckes

$$(190) \qquad p \equiv -11(N-1)+M, \text{ mod } 30 = 0, 1, \ldots 29,$$

welcher für die Vorrückung der Ostergrenze p von ihrer frühesten Stelle, dem 21 März, in der lilianischen Osterrechnung, aufgestellt wurde, auf die Gestalt des Ausdruckes

$$(154) \qquad p \equiv -11N-4, \text{ mod } 30 = 0, 1, \ldots 29$$

der nemlichen Größe in der alexandrinischen Osterrechnung.

Man ertheilt darum jenem Ausdrucke die Formen

$$p \equiv -11N+M+11 \equiv -11N+M+15-4,$$

folglich auch $p \equiv -11(N+Z)-4, \text{ mod } 30,$

wofern man die Zahl Z dergestalt bestimmt, daß

$$Z \equiv -11(M \pm 15) \equiv -11(M-15)$$
$$\equiv 11(15-M) \equiv -11M+15, \text{ mod } 30$$

ist. Für den julianischen Kalender oder die alexandrinische Osterrechnung gilt

$$M = 15, \quad \text{also} \quad Z = 0.$$

Auf diese Weise hängen die Zahlen p, δp, $p - \delta p$ und E blos von $N+Z$, und darin der Theil Z, so wie M, nur von s ab. Dann kann die Festzahl v nur von der Summe $N+Z$ und von dem Sonntagsbuchstaben abhängig dargestellt, und diese Abhängigkeit in die angeführte Tafel 4 gebracht werden.

Sucht man nun für ein Jahr a nach Chr. die Epakte oder die Vorrückung der Ostergrenze, so berechnet man im julianischen Kalender blos die goldene Zahl N, sucht diese in der vierten Spalte auf, und nimmt dazu die auf ihrer Zeile stehende Zahl der 5. oder 6. Spalte. Im gregorianischen Kalender bestimmt man noch die Anzahl s der in der Jahrzahl a enthaltenen Hunderte oder die Zahl M; dann hiezu mittels der 3. Spalte die Zahl Z, um welche man die goldene Zahl N zu vermehren hat. Diese Summe $N+Z$ sucht man in der 4. Spalte auf, und dazu die auf ihrer Zeile stehende Zahl der 5. oder 6. Spalte. Z. B. Das Jahr 1850 hat die goldene Zahl 8, daher im julianischen Kalender die Epakte 25 und die Vorrückung der Ostergrenze 28, also die Ostergrenze selbst am 18 April; gerade wie in Tafel 2 des Anhanges. Im gregorianischen Kalender dagegen ist $s = 18$ oder $M = 23$, folglich $Z = 2$. Gibt man dies zur goldenen Zahl 8, so findet man

*) 2. Aufl. 4. Prag, 1834, S. 75, Taf. 11.

die Summe $N + Z = 10$, und auf ihrer Zeile die Epakte 17 und $p = 6$; folglich ist die Ostergrenze der 27 März.

Verlangt man die vollständigen, den Mondkreisen angehörigen, Epakten- oder Ostergrenzenreihen, so gehören im julianischen Kalender für alle Zeiten den in der 4. Spalte verzeichneten 19 goldenen Zahlen die mit ihnen auf einerlei Zeile stehenden Epakten der 5. Spalte oder die Vorrückungen der Ostergrenze in der 6. Spalte zu. Im gregorianischen Kalender findet man dagegen die vom s^{ten} Säcularjahre an durch ein Jahrhundert, d. i. vom Jahre $100s$ bis $100s + 99$, giltige Reihe von Epakten oder Ostergrenzen, indem man zu den Jahrhunderten s die Zahl Z, und zu allen 19 Summen von $Z + 1$ bis $Z + 19$ der 4. Spalte die Epakten aus der 5ten oder die Vorrückungen der Ostergrenze aus der 6. Spalte nimmt. Z. B. Von 1700 bis 1899 ist die Zahl $Z = 2$, daher sind auf den Zeilen 3, 4, 5, . . . 21 der 5. Spalte die Epakten 0, 11, 22, 3, 14, 25, . . . 7, 18 und die Vorrückungen der Ostergrenzen 23, 12, 1, 20, 9, 28, ... 16, 5, welche während jener zwei Jahrhunderte immer wiederkehren.

Ist die Summe aus der goldenen Zahl N und ihrem Zusatze Z gleich 38, und dabei diese goldene Zahl > 11 oder

$$r\frac{11(M+2)}{30} = 11, 12, \ldots . 18,$$

also Z eine der 8 Zahlen 19, 20 bis 26, welche in der 3. Spalte mit einem Accente markirt sind, so ist die Epakte nicht 25 sondern 26, und die Vorrückung der Ostergrenze nicht 28 sondern 27. (§. 103, II.)

Fordert man die Festzahl eines Jahres a nach Chr., so sucht man vorerst wieder die goldene Zahl und den Sonntagsbuchstaben, und dazu im julianischen Kalender mittels der 4. Spalte und der dem Sonntagsbuchstaben angehörigen die Festzahl, wie in Tafel 2 des Anhanges. Im gregorianischen Kalender bestimmt man dagegen noch die Jahrhunderte s oder die Nummer M und dazu den Zusatz Z zur goldenen Zahl N. Die Zeile dieser Summe $N + Z$ und die Spalte des Sonntagsbuchstaben durchkreuzen sich dann in demjenigen Felde, welches die geforderte Festzahl enthält.

Blos wenn die goldene Zahl > 11 und die Summe aus ihr und ihrem Zusatze 38 ist, was nur für jene Werthe von M, bei denen

$$r\frac{a'}{19} = r\frac{11(M+2)}{30} = 11, 12, \ldots 18,$$

also $-11M \equiv 11, 10, \ldots . 4$ ist, folglich bei einem der 8 in der Tafel accentuirten Zusätze $Z = 26, 25, \ldots . 19$ eintritt, ist für den Sonntagsbuchstaben C die Festzahl nicht 35 sondern 28 (§. 106). Z. B. Im Jahre 2106 ist $s = 21$, daher $Z = 21$; die goldene Zahl $N = 17$, folglich $N + Z = 38$, endlich der Sonntagsbuchstabe C; daher ist die Festzahl 28.

Die Epakte 24 und die entsprechende Vorrückung der Ostergrenze 29, zu denen N+Z=27 gehört, wurden sogleich in der Tafel, jene in 25, diese in 28, desgleichen die Festzahl 36 in 29, verbessert.

Auch in dieser Tafel kann man, wie in der Tafel 2 der alexandrinischen Festzahlen, sobald man die Festzahl eines Jahres kennt, zu den ihm, wenigstens in demselben Jahrhunderte, nachfolgenden Jahren die Festzahlen ohne Rechnung finden. Man zählt nemlich den diesem Jahrhunderte entsprechenden Zusaz Z zu den beiden äußersten goldenen Zahlen 1 und 19; dann geben die Zeilen, welche die 19 Summen der 4. Spalte von Z+1 bis Z+19 enthalten, die der Tafel 2 im Anhange ähnliche 19zeilige Tafel, in der man, wie in jener, (nach §. 89) schräg rechts abwärts läuft, um die weiteren Festzahlen zu finden. Nur darf man nicht vergessen, daß die durch 400 nicht theilbaren Säcularjahre keine Schaltjahre sind. Zur sichtbaren Begrenzung dieser Tafel kann man einige, höchstens fünf, Zeilen über der Zeile Z+1 und unter der Zeile Z+19 mit einem Papierstreifen bedecken. Erscheint die Tafel zerstückt, ein Theil oben, der andere unten, so denkt man sich diese zwei Theile an den Zeilen 30 und 31 zusammengestoßen. Z. B. Vom Jahre 2201, wofür Z=10, N=17 und L=4=D ist, und auf der Zeile N+7=27 die Festzahl 29 gefunden wird, übergeht man, weil hier die 19zeilige Tafel von der Zeile 10+1=11 bis 10+19 =29 reicht, auf die nachfolgenden Festzahlen 21, 13; 32, 17, 9, 29; 13,...

Bequemer noch als die Hilfstafeln zur Osterrechnung, jedoch bei gleichem Raume minder umfassend, sind die Verzeichnisse von Festzahlen. Ein solches ist für den gregorianischen Kalender die Tafel 5 im Anhange, deren erste Spalte die Zehner und die oberste Zeile die Einer jener Jahre nach Chr. enthält, von denen sie die gregorianischen Festzahlen angibt.

110.

Beispiele zur lilianischen Osterrechnung.

1. Beispiel. Im Jahre 1488 war man *) in Betreff des Ostertages in großer Verlegenheit. Alle Kalender kündigten ihn auf den 6 April an, die Astronomen aber behaupteten, daß, wenn man sich an diejenigen Vorschriften, welche die Kirche über die Bestimmung des Osterfestes festgesezt hat, streng hält, es am 30 März gefeiert werden müsse. Man war bereits in der Mitte der großen Fasten, als Papst Innocenz VIII von diesem Streite in Kenntniß gesezt wurde. Um nicht diese Fasten um eine Woche, wie es hätte geschehen müssen, zu verkürzen und alle Feste nach Ostern zu verschieben, wovon nur sehr Wenige den Grund eingesehen, ja die von Rom sehr weit

*) Vergl. B. de Zach Correspond. astron. v. 10. p. 421.

entfernten Christen in dieser kurzen Zeit nicht einmal Kenntniß erlangt haben würden; so ließ der Papst dieses Fest am 6 April feiern. Wir wollen untersuchen, auf welcher Seite das Recht war.

Hier hat man $a = 1488$, daher vermöge der Gaußischen Rechnung in §. 108 nach dem julianischen Kalender $A \equiv 1488, \bmod 19 \equiv 74 + 8 \equiv 6$, $B \equiv 1488, \bmod 4 \equiv 0$, $C \equiv 1488, \bmod 7 \equiv 4$; $M = 15$; $D \equiv 19A + M, \bmod 30 \equiv 114 + 15 \equiv 129 \equiv 9$; $N = 6$, $E \equiv 2B + 4C + 6D + N, \bmod 7 \equiv 0 + 16 + 54 + 6 \equiv 2 + 5 + 6 \equiv 6$. Daher traf die Ostergrenze oder der Ostervollmond auf den $21 + D$ März $= 30$ März und Ostern auf den $9 + 6 - 9 = 6$ April.

Allein der wahre Ostervollmond war, in der Mitte von Europa, Donnerstag den 27 März um 3 Uhr Morgens, und der zunächst folgende Sonntag den 30 März; sonach hätten die Astronomen, weil sie von dem ursprünglichen Grundsatze der ersten Christen ausgingen, daß man den nach dem wirklichen Vollmonde unmittelbar folgenden Sonntag zum Osterfeste machen solle, ganz Recht gehabt. Aber die Kirche hat sich nie an die wahren, sondern stets an die zyklischen Mondphasen gehalten, welche freilich in diesem Jahre bereits um 3 bis 4 Tage zu spät angezeigt wurden. Daher kündigten die Kalender den Ostertag, wegen dieser kirchlichen Rechnung, vollkommen richtig am 6 April an.

Aehnliche Streitigkeiten gab es auch in späteren Jahren, selbst jezt noch, wo über die Richtigkeit der Bestimmung des Osterfestes im Jahre 1825 Zweifel erhoben wurden.*)

Hier ist $a = 1825 = 18 . 100 + 25 \equiv 1, \bmod 4 \equiv -2, \bmod 7 \equiv 1, \bmod 19$, $s = 18$, daher $M = 23$, $k = 12$, $p \equiv -11 + 23, \bmod 30 \equiv 12$, $\delta p = 0$, $b \equiv 2 + 6 - 12 + 12, \bmod 7 \equiv 1$. Oder es ist $\alpha = 25 \equiv 1, \bmod 4 \equiv -3, \bmod 7$, $s = 18 \equiv 2, \bmod 4$, daher $b \equiv 2 + 9 - 12 + 4 - 2, \bmod 7 \equiv 1$. Mithin hat man $v = 12 + 1 = 13$ und Ostern am $13 - 10 = 3$ April. Dasselbe gibt auch die Ostertafel 4 im Anhange. Denn die goldene Zahl ist $N \equiv 1826, \bmod 19 \equiv 91 + 6 \equiv 2$, und nach Tafel 1 im Anhange der Sonntagsbuchstabe B; ferner ist $s = 18$, $Z = 2$, $N + Z = 4$, daher $v = 13$.

Allein der Ostervollmond trat in Wirklichkeit an diesem Sonntage, dem 3 April, um 7 Uhr Morgens ein; folglich hätte nach astronomischer Rechnung Ostern erst am nächst folgenden Sonntage, den 10 April, gefeiert werden sollen. Die Kirche blieb jedoch bei ihrer zyklischen Rechnung, und feierte Ostern am 3 April.

2. Beispiel. Im Jahre 1582, in welchem die Kalenderverbesserung vorgenommen wurde, bestand vom 1 Januar bis 4 October noch der julianische Kalender; daher war hier, zu Folge der Rechnung in §. 86 und 88,

*) Vergl. Correspond. astron. v. 11, p. 597.

$a = 1582 \equiv 79 + 2$, mod $19 \equiv 5$, mod $19 \equiv 2$, mod $4 \equiv 0$, mod 7, $p \equiv -55 + 15$, mod $30 \equiv 20$, $b \equiv 4 - 20$, mod $7 \equiv 5$, $v = 20 + 5 = 25$.

Von dem 15 October n. St. an, der unmittelbar nach dem 4 October a. St. kam, war jedoch vermöge §. 105 wegen $s = \mathfrak{q}\frac{1582}{100} = 15$, $M = 22$ und $k = 10$, folglich $p \equiv -55 + 22$, mod $30 \equiv 27$, $\delta p = 0$, $b \equiv 4 - 27 + 10$, mod $7 \equiv 1$; mithin $v = 27 + 1 = 28$.

Auf das Jahr 1582 kamen demnach zwei Festzahlen; und zwar bis zum 4 October a. St. die Festzahl 25, von dem darauf gefolgten 15 October n. St. an dagegen bis ans Ende des Jahres die Festzahl 28.

3. Beispiel. Am Ostermontage des Jahres 1707 wurde bei Almanza in Spanien das verbündete englisch-portugiesische Heer von dem französischen Marschall Berwick auf's Haupt geschlagen. An welchem Monatstage?

Hier ist $a = 1707 \equiv 85 + 7$, mod $19 \equiv 16$, mod $19 \equiv 3$, mod $4 \equiv -1$, mod 7; $s = 17$, $k = 11$, $M = 23$; also $p \equiv -11.\ 16 + 23$, mod $30 \equiv -(16 + 10) + 23 \equiv 4 + 23 \equiv 27$, $\delta p = 0$, $b \equiv 6 + 3 - 27 + 11$, mod $7 \equiv 7$ und $v = 27 + 7 = 34$. Daher ist Ostersonntag $= 34 - 10 = 24$ April und Ostermontag $= 25$ April.

Die Schlacht wurde also am 25 April geliefert.

C. Berechnung der übrigen beweglichen Feste, und sonstige Untersuchungen über die christliche Festrechnung.

111.

Zusammenhang der Festzahl mit dem Sonntagsbuchstaben und der Concurrente.

Ostern fällt immer auf den $v + 21$ März $= v - 10$ April und zugleich auf einen Sonntag. Allein vermöge §. 72 ist allgemein der t^{te} März am Wochentage $\equiv t - L - 3$, mod 7, folglich jener $v + 21$ März am Wochentage $\equiv v + 21 - L - 3$, mod $7 \equiv v - L - 3$, mod 7. Soll nun dieser Wochentag ein Sonntag, also

$$v - L - 3 \equiv 1, \text{ mod } 7$$

sein; so müssen zwischen der Festzahl v und dem Sonntagsbuchstaben L die wechselseitigen Bestimmungsgleichungen bestehen.

$$(205) \qquad v \equiv L + 4, \text{ mod } 7 \equiv L - 3$$

$$= \mathfrak{R}\frac{3 - L}{7} + (0, 7, 14, 21, 28) = 1, 2, \ldots 35.$$

$$L \equiv v + 3, \text{ mod } 7 = \mathfrak{R}\frac{v + 3}{7}.$$

Zu denselben Gleichungen gelangt man auch, wenn man die Congruenz

$$(203) \qquad b \equiv L - p + \delta p - 3, \text{ mod } 7$$

zur Gleichung

$$(204) \qquad v = p - \delta p + b$$

addirt, indem man sogleich

$$v \equiv L - 3, \text{ mod } 7 \text{ erhält.}$$

Daraus läßt sich leicht der Ausdruck der Concurrente durch die Festzahl finden, da vermöge (115)

$$C \equiv -L, \text{ mod } 7,$$

folglich
$$C \equiv -v - 3, \text{ mod } 7 = R\frac{-v-3}{7} \text{ ist.}$$

Da nun die Festzahl das Datum des Osterfestes und dieses wieder das Datum jedes anderen beweglichen Festes bestimmt, überdies die Festzahl auch noch den Sonntagsbuchstaben bedingt, von welchem die Wochentage der Tage des Jahres und der einzelnen Monate bestimmt werden; so kann man in der That die Festzahl als den Schlüssel des christlichen Kalenders ansehen.

112.

Benüzung der Festzahl in der Berechnung der Wochentage.

Führt man in die Ergebnisse der Untersuchungen von §. 72, 74 u. 75 über die Wochentage die Congruenz (205)

$$L \equiv v + 3, \text{ mod } 7$$

zum Ausdruck des Sonntagsbuchstaben durch die Festzahl ein; so findet man Folgendes:

Der d^{te} Tag im Jahre trifft, vermöge §. 72, (140) auf den Wochentag

$$(206) \qquad h \equiv d - i - v - 2, \text{ mod } 7;$$

und vermöge (141) der t^{te} Tag des m^{ten} Monates auf den Wochentag

$$h \equiv t + 3(m-1) - q\frac{5m+1}{12} - (2-i)\, q\frac{m+9}{12} - i - v - 2, \text{ mod } 7.$$

Soll der d^{te} Tag des Jahres auf den Wochentag h treffen, muß vermöge §. 74, (142) die Festzahl

$$v \equiv d - i - h - 2, \text{ mod } 7 = 1, 2, \ldots 35 \text{ sein.}$$

Der n^{te} Wochentag h im Jahre trifft vermöge §. 75, (145) auf den Jahrstag

$$(207) \qquad d = R\frac{v+h+i+2}{7} + 7(n-1),$$

der lezte auf den $24 + R\frac{v+h+i}{7}$ December.

Der n^{te} Wochentag h im m^{ten} Monate, dessen 0. Tag der $d_0{}^{te}$ im Jahre ist, und welcher μ Tage zählt, trifft vermöge §. 75, (146) auf den Tag

$$(208) \qquad t = R\frac{v+h-d_0+i+2}{7} + 7(n-1),$$

der lezte auf den Tag

$$t = \mu - 7 + \mathrm{R}\frac{v+h-d_0-\mu+i+2}{7} \qquad (209)$$

dieses Monates.

Auf dieselbe Weise kann auch in allen weiteren Congruenzen und Resten, deren Modul 7 ist, L durch $v+3$ ersezt werden.

Die Rechnungen in Absicht auf das Zusammentreffen der Wochen- und Monatstage werden durch den in Tafel 6 des Anhanges aufgenommenen immerwährenden Wochentags-Kalender theils ganz erspart, theils bedeutend abgekürzt, welcher seine Erklärung in §. 61, 67, 111, 72 und 76 findet, und in dessen Schlußzeilen durchweg außerordentliche Reste genommen werden.

113.

Tage der beweglichen und unbeweglichen Feste, so wie andere merkwürdige Tage der Christen überhaupt und der Katholiken insbesondere.

Da das Datum des Osterfestes durch die Festzahl bestimmt ist, und die beweglichen Feste von Ostern festgesezte Abstände halten, so lassen sich die Monatstage derselben leicht allgemein durch die Festzahl v ausdrücken. Zum schnelleren Ueberblick aller Feste und der sonst noch merkwürdigen Tage der Christen überhaupt und der Katholiken insbesondere dient das im Anhange in Tafel 7 aufgenommene Verzeichniß derselben nach ihrer Zeitfolge in dem mit dem 1 Januar anfangenden Jahre. Die Angaben dieses Verzeichnisses finden ihre einfache Erläuterung in dem bisher Abgehandelten, blos folgende zwei mögen hier noch erörtert werden.

Wird die Anzahl der Sonntage nach Epiphania durch φ bezeichnet, so fällt der lezte dieser Sonntage auf den $t + 7\varphi = \mathrm{r}\frac{v+i+3}{7} + 7\varphi$ Januar. Der ihm zunächst folgende Sonntag Septuagesimae trifft auf den $v+i+17$ Januar; mithin ist

$$\mathrm{r}\frac{v+i+3}{7} + 7\varphi + 7 = v+i+17$$

und daraus

$$\varphi = \mathrm{q}\frac{v+i+10}{7} = \mathrm{q}\frac{v+i+3}{7} + 1.$$

Man hat Pfingsten $= v+9$ Mai $= v-22$ Juni; daher ist n^{ter} Sonntag nach Pfingsten $= v+7n+9$ Mai $= v+7n-22$ Juni $= v+7n-52$ Juli $= v+7n-83$ August $= v+7n-114$ September $= v+7n-144$ October $= v+7n-175$ November.

Trifft nun ein Sonntag nach dem Pfingstfeste auf den $\mathrm{r}\frac{v+\alpha}{7} + \beta^{ten}$ Tag eines Monates, in welchem der n^{te} Sonntag nach Pfingsten auf den

$v + 7n - \gamma^{ten}$ Tag trifft, und soll jener Sonntag eben dieser n^{te} nach Pfingsten sein, so ist

$$v + 7n - \gamma = \mathfrak{r}\frac{v+\alpha}{7} + \beta,$$

daher

$$= v + \alpha - 7\mathfrak{q}\frac{v+\alpha}{7} + \beta$$

und

$$7n = \alpha + \beta + \gamma - 7\mathfrak{q}\frac{v+\alpha}{7}.$$

Daraus folgt, daß jedesmal $\alpha + \beta + \gamma$ durch 7 theilbar, und sonach

$$n = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{7} - \mathfrak{q}\frac{v+\alpha}{7} \text{ sein muß.}$$

Der Sonntag, welcher auf den $\mathfrak{r}\frac{v+\alpha}{7} + \beta^{ten}$ Tag jenes Monates trifft, ist demnach der $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{7} - \mathfrak{q}\frac{v+\alpha}{7}$te, also wenn er auf den $\mathfrak{r}\frac{v+\alpha}{7} + \beta^{ten}$ Tag trifft, der $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{7} - \mathfrak{q}\frac{v+\alpha}{7}$te Sonntag nach Pfingsten.

Der erste Adventsonntag ist am $\mathfrak{r}\frac{v+1}{7} + 27$ November, daher der ihm unmittelbar vorangehende lezte Sonntag nach Pfingsten am $\mathfrak{r}\frac{v+1}{7} + 20$ November. Folglich hat man hier $\alpha = 1$, $\beta = 20$, $\gamma = 175$, $\alpha + \beta + \gamma = 1 + 20 + 175 = 196 = 7.28$. Mithin ist der lezte Sonntag nach Pfingsten der $28 - \mathfrak{q}\frac{v+1}{7}$te, oder es gibt $28 - \mathfrak{q}\frac{v+1}{7}$ Sonntage nach Pfingsten.

114.

Zeitangaben nach benachbarten Festtagen.

Die Gewohnheit, das Datum eines Ereignisses nach den zunächst eintretenden Festtagen anzugeben, erstreckt sich nicht nur auf die unbeweglichen Feste, wovon in §. 76 Beispiele angeführt wurden, sondern auch auf die beweglichen. Beiderlei Feste finden sich noch heut zu Tage bei den Zeitangaben der verschiedenen Märkte und Messen der meisten Städte benüzt, wie man aus der in Tafel 8 in den Anhang aufgenommenen kurzen Probe ersieht, wo das Datum in allgemeiner arithmetischer Form durch die Festzahl ausgedrückt wird, und, sobald diese für ein beliebiges Jahr berechnet oder aus einem der Verzeichnisse 3 oder 5 im Anhange entnommen ist, äußerst leicht gerechnet werden kann. Von Beispielen, in denen geschichtliche Begebenheiten oder Urkunden, besonders des Mittelalters, nach beweglichen Festen datirt wurden, mögen folgende genügen.

1. Beispiel. Papst Johann XXIII, den das Concilium zu Kostniz i. J. 1415 zur Entsagung auf den päpstlichen Thron zwingen wollte (Vergl. **Histoire générale d'Allemagne du P. Barre, Paris 1748, v. 7, p. 147,** und **de Zach Corresp. astron. v. 10, p. 422**), flüchtete sich und lebte später

als Gefangener des Herzogs Friedrich von Oesterreich zu Freiburg im Breisgau. Das Concilium ließ ihn am Tage der Himmelfahrt Christi für die nächste Sizung vorladen, welche vier Tage nach jenem der Vorladung gehalten werden sollte. Da jedoch Johann vom Tage dieser Vorforderung nichts erfuhr, erklärte ihn das Concilium am folgenden Tage, wegen seines ungehorsamen Wegbleibens, auf unbestimmte Zeit seiner Würde verlustig. Fünfzehn Tage nachher nahm es ihm in seiner zwölften Sizung das Pontificat völlig ab. Nach vier Jahren kam er endlich an demselben Monatstage, an welchem er hätte erscheinen sollen, zu dem in Florenz gehaltenen Concilium, um sich zu den Füßen Martins V. zu werfen, und ihn als wahren Papst anzuerkennen. — Man soll nun die hier vorkommenden Data durch Monat und Tag bezeichnen.

Im Jahre 1415 ist vermöge Verzeichniß 5 im Anhange die Festzahl $v=10$, und nach dem Festkalender 7 im Anhange allgemein Christi Himmelfahrt $= v - 1$ Mai $= v - 32$ Juni; folglich hier $= 10 - 1 = 9$ Mai. Daher ergeben sich folgende Zeitangaben:

1) Papst Johann wurde am 9 Mai 1415 vorgeladen.
2) Er hätte am $9 + 4 = 13$ Mai vor dem Concilium erscheinen sollen.
3) Er wurde, wegen seines Ausbleibens, suspendirt am $13 + 1 = 14$ Mai.
4) Des Pontificats wurde er am $14 + 15 = 29$ Mai entsezt.
5) Er unterwarf sich endlich dem neuen Papste am 13 Mai $1415 + 4 = 1419$.

2. Beispiel. Nach den Jahrbüchern der Kirche zu Lüttich (Vergl. de Zach Corresp. astron. v. 10, p. 423), kam Kardinal Otto, als Legat des Papstes Gregor IX, in diese Stadt im Jahre 1231 an jenem Sonntage, an welchem man in der Messe die Worte sang: **Commovisti terram et perturbasti eam**, d. i. am Sonntage **Sexagesimae**. An welchem Monatstage kam dieser Kardinal nach Lüttich?

Nach dem Festkalender 7 im Anhange ist

Sonntag **Sexagesimae** $= v + i + 24$ Januar $= v + i - 7$ Februar,

und vermöge Verzeichniß 3 im Anhange ist im Jahre 1231 die Festzahl $v = 2$, und $i = 0$; daher dieser Sonntag und der Tag der Ankunft des Kardinals am 26 Januar.

3. Beispiel. In einer Chronik der Normandie, welche **André Duchesne** in seinem Werke, **Historiae Normanorum scriptores antiqui, res ab illis gestas explicantes, ab anno 838 ad annum 1220, Lut. Paris. 1619, in fol.**, zusammen stellte, findet man im Jahre 1170 den Tag der Krönung des Sohnes Königs Heinrich II von England so angegeben:. **Dominica qua cantatur: »Deus omnium exauditor est.«** An welchem Tage wurde dieser König gekrönt?

Man singt diesen Vers am vierten Sonntage nach Pfingsten = v + 6 Juni = v — 24 Jüli; und im Jahre 1170 war die Festzahl v = 15, daher die Krönung am 21 Juni.

4. Beispiel. Der Pater Anselm (eigentlich Pierre de Guibours) gibt, S. 820 des 2. Bandes in seiner Histoire généalogique et chronologique de la maison royale de France etc. Paris 1726 — 33, 9 vol. in fol., ein Vorladungsschreiben des Königs Philipp des Langen an die Pairs von Frankreich, in Bezug auf den Prozeß des Robert d'Artois. Dieser Brief ist datirt den 9 April 1317 und enthält die Worte: Ad diem sabbati post tres septimanas instantis paschatis, videlicet ad diem vigesimam maji. Weil nun der Tag, auf welchen die Richter vorgeladen werden, als der 20 Mai ausdrücklich genannt wird; so ist man bemüssiget, hier einen Fehler in der Jahrzahl anzunehmen, der dadurch verbessert wird, daß man 1318 für 1317 schreibt.

Denn allgemein ist der dritte Sonntag nach Ostern = v + 11 April = v — 19 Mai, also der Sonnabend nach ihm der v + 17 April = v — 13 Mai. Soll dieser bezeichnete Tag auf den 20 Mai treffen, muß v = 20 + 13 = 33 sein. Allein die Festzahl des Jahres 1317 ist nicht 33, sondern 13; wohl aber ist im darauf folgenden Jahre 1318 die Festzahl 33. Mithin hat man diesen Gerichtstag auf den 20 Mai 1318 anzunehmen.

5. Beispiel. In Lünig's deutschem Reichsarchiv 7. Bd. Art. Oesterreich, S. 11, ist die von dem Herzoge Leopold von Oesterreich ausgestellte Renunciation wegen der Succession in Böhmen und Mähren abgedruckt und so datirt: in Brurca die dominica, qua cantatur: Esto mihi, anno dom. 1324.

Allgemein ist der Sonntag Esto mihi oder der lezte Faschingssonntag = v + i Februar = v — 28 März; und im Jahre 1324 ist i = 1, v = 25, daher die Urkunde datirt am 26 Februar.

6. Beispiel. In dem Conversations-Lexicon, Leipzig, 1817, 9. Band, S. 94, wird erzählt, daß den 30 März 1282, am Ostermontage, in der Stunde der Vesper, zu Palermo in Sicilien die unter dem Namen „Sicilianische Vesper" bekannte grausame Niedermezlung der Franzosen, durch die, von dem despotischen Karl von Anjou, gedrückten Sicilianer vollbracht wurde. Es frägt sich, ob beide Zeitangaben zusammen stimmen.

Die Festzahl dieses Jahres 1282 ist 8, daher der Ostermontag am 8 + 22 = 30 März, wie angeführt wird. Denselben Monatstag gibt auch Pölitz in seiner Weltgeschichte 2. Bd., S. 505; daher irrt Becker, wenn er in seiner Weltgeschichte, 3. Aufl. verb. von Woltmann, Berlin, 1819, 5. Bd., S. 61 sagt, es sei dieses Blutbad am dritten Ostertage, d. i. am Osterdinstage,

angerichtet worden, obschon auch er, auf S. 59, den 30 März für diesen Tag angibt.

7. Beispiel. Nach Kollar Anecdot. Vindob. und Pilgram Calend. chronologicum, p. 167, schreibt Kaiser Friedrich IV. in seinem Tagebuche: An dem Liechtmeß Tag unser Frau 1440 pin ich zu romisen Kunig erbelt worden, und die Potschafft ist mir kommen an dem Fasang Tag, der ist gebesen an den achteden Tag nach unser Frauen der Liechtmeß, und ist Sand Apolonie Tag an denselben Fasang Tag gebesen.

Im Jahre 1440 war $v = 6$ und $i = 1$, daher der Fasang-Tag, d. i. die Fastnacht oder der Faschingsdinstag, am $6 + 1 + 2 = 9$ Februar, wirklich am Apollonien-Tage.

8. Beispiel. Dem (in §. 72, Beisp. 5 angeführten) Freundschaftsbündnisse, welches Herzog Albrecht von Oesterreich mit dem böhmischen Könige Georg am 28 December 1459 schloß, folgte (nach dem daselbst citirten Werke von Kurz S. 218) ein anderes, ausgestellt zu Eger 1461 am Mittwoch vor dem Sonntage Invocavit, wodurch sich Georg verpflichtet, dem Herzoge zur Regierung des ganzen Landes Oesterreich zu verhelfen. Zwei Tage später wurde dem Herzoge die Befugniß eingeräumt, den Herzog Sigmund von Tirol in das Bündniß mit aufzunehmen. Zu diesen und anderen Bundesverträgen, welche Albrecht blos in der Absicht einging, um seinem Bruder Friedrich IV, damaligem deutschen Kaiser, alle Freunde zu rauben, und sich durch seinen Untergang zu vergrößern, kam noch ein Testament, worin Albrecht den Herzog Sigmund zum Erben aller seiner Länder erklärte, datirt Insbruck Mittwoch nach dem Palmsonntage 1461. Zugleich verpflichtete er sich, in einer zu Insbruck am Donnerstage nach Ostern ausgefertigten Urkunde dem Herzoge Sigmund, einem früheren Friedensschlusse gemäß, für den dritten Theil der Einkünfte von Oesterreich jährlich 3000 Gulden zu entrichten. — Die Monatstage dieser Zeitangaben sollen gesucht werden.

Im Jahre 1461 war $i = 0$ und $v = 15$; daher wurde
das erste Bündniß geschlossen am $v + i + 3 = 18$ Februar,
Sigmund in den Bund aufgenommen am $v + i + 5 = 20$ Februar,
das Testament verfaßt am $v - 14 = 1$ April,
und der Tribut zugesichert am $v - 6 = 9$ April.

9. Beispiel. In Schönemann's Codex der prakt. Diplomatik, 2. Thl., S. 26, ist der Contract über einen Güterkauf des Bischofs Eberhard von Constanz so datirt: Diz beschach ... an dem Phingistage, darnach wart ez vollebraht ... an dem Meintage nach der Phingistwochun, des jars, do von Gottis gebuorthe waris niuon und sehzich und zwelfhundirt jar.

Im Jahre 1269 war die Festzahl v = 8, daher der Pfingstsonntag am v + 9 = 12 Mai, und der Montag nach der Pfingstwoche oder nach dem Dreifaltigkeitsfeste am v + 17 = 20 Mai. Schönemann irrt demnach, wenn er dafür den 21 Mai ansezt.

115.

Besonderheiten der protestantischen Festrechnung.

Der protestantische Festkalender, oder der seit Ende 1775 angenommene verbesserte Reichskalender (§. 101) unterscheidet sich von dem gregorianischen nur in folgenden unwesentlichen Punkten:

1) Die Protestanten feiern den Aschermittwoch und das Frohnleichnamsfest nicht, dagegen das Reformationsfest am 31 October; und weichen in vielen kleineren Festen, so wie in den Tagen der Heiligen, von den Katholiken ab, und zwar in den verschiedenen protestantischen Ländern so mannigfaltig, daß man darüber nichts Allgemeines aufzustellen vermag.

2) Die Sonntage nach Pfingsten werden bei den Protestanten nicht von diesem, sondern von dem Dreifaltigkeitsfeste gezählt; daher ist ihr

1., 2., 3., 4., ... n^{ter} Sonntag nach Trinitatis der
2., 3., 4., 5., ... $n + 1^{te}$ Sonntag nach Pfingsten

bei den Katholiken.

116.

Eigenheiten der russisch-griechischen Zeit- und Festrechnung.

1) Die griechische Kirche, zu der sich die Griechen, Russen, Albaner, Serbier und Wallachen bekennen, hält sich noch immer an die bis zum Jahre 1582 in der gesammten Christenheit üblich gewesene Zeit- und Festrechnung nach der julianischen Jahrform, oder nach dem jezt sogenannten alten Kalender. Ihre Jahre zählen sie, wie ehedem durchgehends, jezt wenigstens noch in ihrer kirchlichen Rechnung, nach der byzantinischen Weltäre (§. 48, I.) mit dem 1 September anfangend; in ihrem Verkehr mit den übrigen europäischen Nationen aber, die Russen seit 1700, die Neugriechen seit ihrem Befreiungskampfe, 1821, nach der gemeinen christlichen Aere mit dem 1 Januar anfangend; daher ihr julianisches Datum immer um den Kalender-Unterschied von k Tagen hinter dem gregorianischen hergeht.

2) Der Indictions-, Sonnen- und Mondcirkel der griechischen Kirche enthalten zwar dieselben Anzahlen von Jahren, 15, 28, 19, wie in der lateinischen Kirche, heben aber alle drei gleichzeitig mit der Epoche ihrer byzantinischen Weltäre, dem 1 September 5509 vor Chr., an. Daher hat man

griech. oder russ.

Indiction $\equiv$ Jahr d. byzant. Weltäre, mod 15

Sonnencirkel $\equiv$ » » » » mod 28

Mondcirkel $\equiv$ » » » » mod 19;

sie sind nemlich die außerordentlichen Reste des Jahrs der byzantinischen Weltäre nach den Theilern 15, 28, 19. Bezeichnet A dasjenige Jahr der byzantinischen Weltäre, welches im Jahre a nach Chr. endigt, also in seinen letzten zwei Drittheilen mit diesem übereinkommt, so daß ihre Anfänge, der 1 September von jenem und der zunächst nachfolgende 1 Januar von diesem, einander so nahe als möglich liegen; so hat man, vermöge §. 48, I,

$$A = a + 5508$$

und vermöge §. 49, (67), (70), (72)

julian. Indiction $\equiv a + 3$, mod 15

julian. Sonnencirkel $\equiv a + 9$, mod 28

julian. Mondcirkel $\equiv a + 1$, mod 19.

Mithin ist

griech. oder russ.

Indiction $\equiv A$, mod $15 \equiv a + 5508 \equiv a + 3$

$=$ jul. Indiction.

Sonnencirkel $\equiv A$, mod $28 \equiv a + 5508 \equiv a - 8 \equiv a + 20$

$\equiv$ jul. Sonnencirkel $+ 11$, mod 28.

Mondcirkel $\equiv A$, mod $19 \equiv a + 5508 \equiv a - 2$

$\equiv$ jul. Mondcirkel (cyclus decemnov.) $- 3$

$\equiv$ cyclus lunae.

3) Die Wochentage, nicht die nach einander fort laufenden Tage des Jahres, wie bei den occidentalen Christen, werden im Kalender der Russen durch die 7 ersten Buchstaben ihres Alphabetes bezeichnet, als:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,
As,	Wiedi,	Glagol,	Dobro,	Jest,	Selo,	Semla (weich)
od. A,	B,	G,	D,	E,	S,	S,
Sonntag,	Montag,	Dinstag,	Mittwoch,	Donnerstag,	Freitag,	Samstag.

Von diesen Wochentags-Buchstaben oder Wochentagen wird in jedem Jahre derjenige unter der Benennung Wrutzeleto hervor gehoben, welcher auf den 1 September, den alten Jahresanfang, trifft. Das Wrutzeleto eines Jahres a nach Chr. ist demnach der Wochentag seines 1 Septembers und daher einerlei mit der Concurrente dieses Jahres (§. 65).

Bezeichnet S den julianischen und Σ den russischen Sonnencirkel des Jahres a nach Chr., L den julianischen Sonntagsbuchstaben und C die Concurrente oder das Wrutzeleto; so ist vermöge §. 67, (115) und §. 69, (118)

$$C \equiv -L, \text{ mod } 7$$

$$L \equiv -S - \mathfrak{Q}\frac{S}{4}, \text{ mod } 7$$

und nach dem Obigen $\Sigma \equiv S + 11$, mod 28.

Daraus folgt $C \equiv S + \mathfrak{Q}\frac{S}{4}$, mod 7

und $S = \Sigma - 11 + 28\omega$.

Dies gibt ferner

$$\mathfrak{Q}\frac{S}{4} = \mathfrak{q}\frac{S-1}{4} = \mathfrak{q}\frac{\Sigma}{4} - 3 + 7\omega,$$

daher, wenn man diese Ausdrücke substituirt,

$$C \equiv \Sigma + \mathfrak{q}\frac{\Sigma}{4}, \text{ mod } 7.$$

Sucht man demnach das Wrutzeleto des Jahres a nach Chr., so bestimmt man erst den griechischen Sonnencirkel

$$(210) \qquad \Sigma \equiv a - 8, \text{ mod } 28 = \mathfrak{R}\frac{a-8}{28}$$

und dann das Wrutzeleto selbst

$$(211) \qquad C \equiv \Sigma + \mathfrak{q}\frac{\Sigma}{4}, \text{ mod } 7 = 1, 2, \ldots 7.$$

Z. B. Im Jahre 1812 war $\Sigma \equiv 1804$, mod $28 \equiv 60 + 60 + 4 \equiv 4 + 4 + 4 \equiv 12$, und $C \equiv 12 + 3$, mod $7 \equiv -2 + 3 \equiv 1$.

4) Die Epakte (Osnowanie) jedes Jahres a nach Chr. ist bei den Russen mit der julianischen Epakte

$$(181) \qquad e \equiv 11N, \text{ mod } 30$$

einerlei. Da hierin die goldene Zahl

$$(72) \qquad N = \mathfrak{R}\frac{a+1}{19} = \mathfrak{R}\frac{\text{Cyclus lunae} + 3}{19}$$

ist, so findet man

$$(212) \qquad \text{die Osnowanie} \equiv 11\,\mathfrak{R}\frac{\text{Cyclus lunae} + 3}{19}, \text{ mod } 30.$$

Was endlich im russischen Kalender Epakta heißt, ist nichts anderes, als das, was man zur Osnowanie addiren muß, um die Zahl 21 oder 51 zu erhalten.*) Daher hat man

$$(213) \qquad \text{Russische Epakta} \equiv 21 - \text{Osnowanie}, \text{ mod } 30$$

$$\equiv -11\,\mathfrak{R}\frac{\text{Cyclus lunae} + 3}{19} - 9.$$

Die russische oder griechische Festzahl ist immer die alexandrinische im julianischen Kalender (§. 88) und heißt bei den Russen **Klutsch-Granitz** (Kalenderschlüssel).

---

*) So erklärt sie Littrow in seiner theor. und prakt. Astronomie, 2. Theil, Wien 1821, S. 362. Welche Größe sie aber eigentlich vorstellt, konnte ich in keinem mir zu Gesicht gekommenen chronologischen Werke finden.

Sämmtliche genannte Zahlen sind in die Tafel 2 des Anhanges, zur leichteren Bestimmung des russischen oder griechischen Kalenderschlüssels, aufgenommen worden.

117.

Besonderheiten
in den beweglichen Festen der Griechen und Russen.

Annahmen:

v Festzahl oder Kalenderschlüssel (Klutsch - Granitz),
i Anzahl der Schalttage im Jahre; beide nach dem alten Style.

Zeit vom Anfang des Jahres bis zum Triodium.

Die ersten $1 + q\frac{v+i+2}{7}$ Sonntage im Jahre bis zu dem Sonntag vor dem Triodium, am $v + i + 3$ Januar $= v + i - 28$ Februar, einschließlich, werden noch von dem Pfingstfeste des vorhergegangenen Jahres her gezählt. Dieser Sonntag vor dem Triodium ist, wenn V die Festzahl des nächst vorhergehenden Jahres vorstellt, der $34 + \frac{v+i+1-V}{7}$te, also der 32., 33., 36. oder 37. Sonntag nach Pfingsten (Vergl. §. 119, 1.).

Das Triodium.

Darunter begreift man die Zeit, während welcher in den Kirchen die öffentlichen Gebete aus einem Kirchenbuche gelesen werden, welches nur drei Gesänge (τρεις ὠδαι) enthält. Das Triodium dauert durch die 10 Wochen unmittelbar vor Ostern oder beginnt am 10. Sonntage vor Ostern oder am Sonntage vor Septuagesimae.

Anfang des Triodiums Sonntag den $v + i + 10$ Januar $= v + i - 21$ Februar.

Der Sonntag Sexagesimae heißt auch **Mässopust**, ἡ ἀποχρέα, Fleischsonntag, weil mit ihm die Zeit des Fleischessens endigt, welche von Weihnachten (25 December) her dauerte; und der ihm folgende Sonntag Quinquagesima heißt **Süropust**, τυροφάγιας, Kässonntag. Zwischen beiden liegt die **Butterwoche**, ἑβδομάς της τύρινης.

Mit dem Montage nach Süropust beginnt die große 48tägige Fasten, ἡ μεγαλὴ τεσσαρακόστη, deren sechster und lezter Sonntag, der **Palmsonntag**, Waji heißt, und welche sich mit der **Leidenswoche**, Strasnaja, unmittelbar vor Ostern endigt.

Zeit zwischen Ostern und Pfingsten.

Wasserweihe am vierten Mittwoch nach Ostern, den $v + 14$ April $= v - 16$ Mai.

Zeit nach Pfingsten.

Allerheiligen am nächsten Sonntage nach Pfingsten, den $v + 16$ Mai $= v - 15$ Juni.

Mit diesem Sonntage beginnt Petri Fasten, welche erst mit dem 29 Juni, dem Feste des heil. Petrus und Paulus, endet, also $45 - v$ Tage dauert.

Die nach Pfingsten folgenden Sonntage zählt man bis zu dem nächst kommenden Triodium nach ihren fortlaufenden Nummern. Der letzte Sonntag im Jahre ist daher der $38 - \mathfrak{E}\frac{v+1}{7}$te Sonntag nach Pfingsten.

Fasten der Mutter Gottes vom 1 August bis Mariä Himmelfahrt (15 August).

Fasten vor Weihnachten vom 15 November bis zum Christfest (25 December).

Die Sonntage werden auch nach den Evangelisten benannt, deren Evangelien an ihnen gelesen werden.

1) Die 6 Markus-Sonntage sind die 6 Fastensonntage;

2) die 6 Johannis-Sonntage sind die 6 Sonntage nach Ostern;

3) Matthäus-Sonntage heißen die Sonntage nach Pfingsten bis zu dem nächsten Sonntag vor Kreuzerhöhung (14 September);

4) Lukas-Sonntage endlich die Sonntage nach Pfingsten am nächsten Sonntage nach Kreuzerhöhung, dem ersten des griechischen Kirchenjahres, bis Quinquagesimae im folgenden Jahre.

Abweichende unbewegliche Feste.

7 Januar,	Johann der Täufer.
1 März,	Eudokia.
9 März,	40 Märtyrer.
23 April,	Georg.
8 Mai,	Johann der Theolog.
25 Mai,	Haupt Johannis,
26 December,	Mutter Gottes Fest.

118.

Aenderung und Wiederkehr der Festzahlen.

Höchst interessant ist die Untersuchung der, durch den Uebergang von einem Jahre auf ein späteres bewirkten, Aenderung oder Wiederkehr der Festzahl und derjenigeh Größen, durch welche sie bestimmt wird.

Sei a ein Jahr nach Chr. das um Δa spätere $a + \Delta a$; dann ändert sich die Anzahl der Jahrhunderte $\mathfrak{s} = \mathfrak{E}\frac{a}{100}$

um $\Delta s = \mathfrak{q}\frac{\Delta a + \mathfrak{r}\frac{a}{100}}{100}$,

folglich nach §. 47, (62) die Voreilung des neuen Styls oder die Sonnengleichung $k = \mathfrak{q}\frac{3s-5}{4}$

um $\Delta k = \mathfrak{q}\frac{3\Delta s + \mathfrak{r}\frac{-s-1}{4}}{4}$,

ferner vermöge §. 102, (186) die Mondgleichung

$$K = \mathfrak{q}\frac{8(s-14)}{25}$$

um $\Delta K = \mathfrak{q}\frac{8\Delta s + \mathfrak{r}\frac{8(s-14)}{25}}{25}$,

daher zu Folge §. 103, (189) die Nummer der lilianischen Epaktenreihe

$$M = \mathfrak{R}\frac{k-K+12}{30}$$

um $\Delta M = \Delta k - \Delta K - 30\mathfrak{q}\frac{\Delta k - \Delta K + M}{30} = \pm\mathfrak{r}\frac{\pm(\Delta k - \Delta K)}{30}$.

Die in §. 47, (72) ausgedrückte goldene Zahl

$$N = \mathfrak{R}\frac{a+1}{19} = \mathfrak{r}\frac{a}{19} + 1$$

ändert sich um $\Delta N = \Delta\mathfrak{r}\frac{a}{19} = \Delta a - 19\mathfrak{q}\frac{\Delta a + N}{19} = \pm\mathfrak{r}\frac{\pm\Delta a}{19}$;

und nach §. 103, (190) die Vorrückung der Ostergrenze

$$p = \mathfrak{r}\frac{-11(N-1)+M}{30}$$

um $\Delta p = -11\Delta N + \Delta M - 30\mathfrak{q}\frac{-11\Delta N + \Delta M + p}{30}$

$$= \pm\mathfrak{r}\frac{\pm(-11\Delta N + \Delta M)}{30};$$

ihre Verbesserung δp aber um

$$\Delta\delta p = \delta(p + \Delta p) - \delta p = 0 - 0;\ 1 - 0;\ 0 - 1 = 0, 1, -1.$$

Der in §. 66, (113) ausgedrückte Sonntagsbuchstabe

$$L = \mathfrak{R}\frac{2\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3a + k + 3}{7}$$

ändert sich um $\Delta L = 2\Delta\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3\Delta a + \Delta k - 7\mathfrak{q}\frac{2\Delta\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3\Delta a + \Delta k + L}{7}$

$$= \pm\mathfrak{r}\frac{\pm(2\Delta\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3\Delta a + \Delta k)}{7},$$

und darin ist $\Delta\mathfrak{r}\frac{a}{4} = \Delta a - 4\mathfrak{q}\frac{\Delta a + \mathfrak{r}\frac{a}{4}}{4} = \pm\mathfrak{r}\frac{\pm\Delta a}{4}$

$$2\Delta\mathfrak{r}\frac{a}{4} \equiv 2\Delta a - \mathfrak{q}\frac{\Delta a + \mathfrak{r}\frac{a}{4}}{4}, \text{ mod } 7.$$

Dem gemäß ändert sich zu Folge §. 104, (203) der Abstand der Ostern von der Ostergrenze $b = \mathfrak{R}\frac{L-(p-\delta p)-3}{7}$

um $$\Delta b = \Delta L - (\Delta p - \Delta\delta p) - 7\mathfrak{Q}\frac{\Delta L-(\Delta p-\Delta\delta p)+b}{7}$$

$$= \pm\mathfrak{r}\frac{\pm(\Delta L-\Delta p+\Delta\delta p)}{7};$$

daher vermöge (204) die Festzahl

$$v = p - \delta p + b$$

um $$\Delta v = \Delta p - \Delta\delta p + \Delta b.$$

$$= \Delta L - 7\mathfrak{Q}\frac{\Delta L-(\Delta p-\Delta\delta p)+b}{7}.$$

Hiezu bemerke man noch, daß, weil vermöge §. 111, (205)

$$v \equiv L - 3, \text{ mod } 7$$

ist, auch $\Delta v \equiv \Delta L$, mod 7 sein muß.

Im julianischen Kalender ist durchweg, im gregorianischen Kalender aber nur während manches Jahrhunderts oder zuweilen während zweier Jahrhunderte, $\Delta k = \Delta K = \Delta M = 0$, daher

$$\Delta N = \Delta\mathfrak{r}\frac{a}{19} = \Delta a - 19\mathfrak{Q}\frac{\Delta a+N}{19} = \pm\mathfrak{r}\frac{\pm\Delta a}{19}$$

$$\Delta p = -11\Delta N - 30\mathfrak{q}\frac{-11\Delta N+p}{30} = \pm\mathfrak{r}\frac{\mp 11\Delta N}{30}$$

$$\Delta L = 2\Delta\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3\Delta a - 7\mathfrak{Q}\frac{2\Delta\mathfrak{r}\frac{a}{4}-3\Delta a+L}{7} = \pm\mathfrak{r}\frac{\pm\left(2\Delta\mathfrak{r}\frac{a}{4}-3\Delta a\right)}{7}$$

$$2\Delta\mathfrak{r}\frac{a}{4} \equiv 2\Delta a - \mathfrak{q}\frac{\Delta a+\mathfrak{r}\frac{a}{4}}{4}, \text{ mod } 7$$

$$\Delta L = -\Delta a - \mathfrak{q}\frac{\Delta a+\mathfrak{r}\frac{a}{4}}{4} - 7\mathfrak{Q}\frac{-\Delta a-\mathfrak{q}\frac{\Delta a+\mathfrak{r}\frac{a}{4}}{4}+L}{7}$$

$$= \pm\mathfrak{r}\frac{\mp\left(\Delta a+\mathfrak{q}\frac{\Delta a+\mathfrak{r}\frac{a}{4}}{4}\right)}{7}.$$

Kommt dazu noch, was im julianischen Kalender überall, und im gregorianischen fast durchgängig besteht, daß $\Delta\delta p = 0$ ist; so ist

$$\Delta b = \Delta L - \Delta p - 7\mathfrak{Q}\frac{\Delta L-\Delta p+b}{7} = \pm\mathfrak{r}\frac{\pm(\Delta L-\Delta p)}{7}$$

und $$\Delta v = \Delta p + \Delta b.$$

119.

Fortsetzung. Besondere Fälle.

1) Uebergeht man von einem Jahre a auf das nächst folgende a + 1, hat man $\Delta a = 1$; daher

$$\Delta s = q\frac{1 + r\frac{a}{100}}{100}$$

so fast immer $\Delta s = 0$ und blos da $\Delta s = 1$, wo $r\frac{a}{100} = 99$ ist, wo man nem- h von einem 99. Jahre auf das 100ste übergeht.

Ist $\Delta s = 0$, so wird $\Delta k = 0$, $\Delta K = 0$, also auch $\Delta M = 0$.

st aber $\Delta s = 1$, so wird $\Delta k = q\frac{3 + r\frac{s-1}{4}}{4}$,

her gewöhnlich $\Delta k = 1$ und nur dazumal $\Delta k = 0$, wenn $s + 1$ durch 4, mlich das Säcularjahr, auf welches man übergeht, durch 400 theilbar ist.

rner wird, für $\Delta s = 1$, $\Delta K = q\frac{8 + r\frac{8(s-14)}{25}}{25}$,

so $\Delta K = 0$, wenn $r\frac{8(s-14)}{25} < 17$, nemlich $s \equiv 0, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11,$ 2, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, mod 25, dagegen $\Delta K = 1$, wenn $\frac{(s-14)}{25} \geqq 17$, nemlich $s \equiv 1, 4, 7, 10, 13, 17, 20, 23$, mod 25 ist. araus folgt nun $\Delta M = 1 - 30q\frac{1+M}{30}$, also $\Delta M = 1$ für $s = 16, 18, 21,$ 2, 24, 25, 28, 30, 33, 37, 40, 41, 44, 46, 49, 50, ... und $M = -29$ für $M = 30$ d. i. für $s = 34, 36, \ldots$; $\Delta M = 0$ für $s =$, 17, 19, 20, 26, 27, 29, 31, 32, 38, 39, 42, 43, 45, 47, 48, ...; d $\Delta M = -1 - 30q\frac{M-1}{30}$, also $\Delta M = -1$ für $s = 23, 51 \ldots$. dagegen $M = 29$ für $s = 35$. Es ist demnach fast immer $\Delta M = 0$, denn von 1582 5200, also bei 3618 Uebergängen, tritt blos bei 21 Uebergängen auf äcularjahre eine Ausnahme ein (Vergl. Taf. 4 im Anhange und §. 120).

Für die goldene Zahl findet sich $\Delta N = \Delta r\frac{a}{19} = 1 - 19q\frac{N+1}{19} =$ $-19q\frac{N}{19}$, daher für $N < 19$, also fast immer, $\Delta N = 1$, und blos alle 19 hre $\Delta N = -18$, wenn einmal $N = 19$ ist. Daraus folgt

$$-11\Delta N \equiv -\left(11 + q\frac{N}{19}\right), \bmod 30$$

d daher $\Delta p = \Delta M - 11 - q\frac{N}{19} - 30\,q\frac{\Delta M - 11 - q\frac{N}{19} + p}{30}$,

Meistens ist

$\Delta M = 0$ u. $N < 19$, also $\Delta p = -11 - 30q\frac{p-11}{30}$, neml. $\Delta p = -11$ für $p \geqq 11$
oder $\Delta p = 19$ für $p < 11$;

oder $N = 19$, also $\Delta p = -12 - 30q\frac{p-12}{30}$, neml. $\Delta p = -12$ für $p \geqq 12$
oder $\Delta p = 18$ für $p < 12$;

seltner ist

$\Delta M = 1$ oder -29; $N < 19$, $p \geqq 10$, $\Delta p = -10$
$p < 10$, $\Delta p = 20$
$N = 19$, $p \geqq 11$, $\Delta p = -11$
$p < 11$, $\Delta p = 19$;

noch seltner

$\Delta M = -1$ oder 29, $N \leq 19$, $p \geqq 12$, $\Delta p = -12$
$p < 12$, $\Delta p = 18$
$N = 19$, $p \geqq 13$, $\Delta p = -13$
$p < 13$, $\Delta p = 17$.

Man hat demnach $\Delta p = -11, 19$; $-12, 18$; selten $-10, 20$; $-13, 17$.

Ferner ist fast immer $\Delta \delta p = 0$, selten $\Delta \delta p = \pm 1$, namentlich von 1582 bis 3000, vermöge §. 107, für $\genfrac{}{}{0pt}{}{a+1}{\text{und } a} = 1609, 1954, 1981, 2019, 2076, 2106, 2133, 2201, 2296, 2448, 2668, 2725, 2820$.

Bei dem Sonntagsbuchstaben ist

$$\Delta r\frac{a}{4} = 1 - 4q\frac{1 + r\frac{a}{4}}{4} = 1 - 4q\frac{R\frac{a+1}{4}}{4}, \text{ also}$$

$$\Delta L = \Delta k - 1 - q\frac{R\frac{a+1}{4}}{4} - 7Q\frac{\Delta k - 1 - q\frac{R\frac{a+1}{4}}{4} + L}{7}$$

$$\equiv \Delta k - 1 - q\frac{R\frac{a+1}{4}}{4}, \text{ mod } 7;$$

mithin, wie in §. 69, allgemein $\Delta L \equiv -(1 + i)$, mod 7, wenn das Jahr, auf welches man übergeht, i Schalttage enthält, folglich insbesondere

$\Delta L = -1$ oder $+6$, so oft auf ein Gemeinjahr, und

$\Delta L = -2$ oder $+5$, so oft auf ein Schaltjahr übergegangen wird.

Daraus folgt sonach wegen $\Delta v \equiv \Delta L$, mod 7 auch $\Delta v \equiv -(1 + i)$, mod 7.*)

---

*) Dies gibt auch $\Delta v + i + 1 \equiv 0$, mod 7, also wenn i die Anzahl der Schalttage und v die Festzahl eines Jahres, V die Festzahl des nächst vorhergehenden vorstellt, $v - V + i + 1 \equiv 0$, mod 7. (Zu §. 117.)

Variirt man nun die möglichen Werthe von Δs, ΔM, Δp, $\Delta \delta p$ und ΔL mit einander, um jene von Δb und Δv zu bestimmen; so findet man bei genauerer Untersuchung, daß $\Delta \delta p = \pm 1$ nicht mit $\Delta s = 1$ bestehen kann, und folgende Aenderungen zusammen gehören:

Zur Aenderung $\Delta L = -1-i$, $+6-i$,
so oft $\Delta \delta p = 0$ ist, gehört $\Delta v = -8-i$, $+20-i$; $-15-i$, $+13-i$;
» $\Delta \delta p = +1$ » » $\Delta v = +13-i$,
» $\Delta \delta p = -1$ » » $\Delta v = -8-i$.

Uebergeht man daher von einem Jahre auf's nächst folgende, und zwar auf ein Gemeinjahr, so nimmt die Festzahl meistens um 8 ab oder um 20 zu, zuweilen aber wieder um 15 ab oder um 13 zu; übergeht man dagegen auf ein Schaltjahr, so nimmt die Festzahl gewöhnlich um 9 ab oder um 19 zu, bisweilen jedoch wieder um 16 ab oder um 12 zu.

2) Sollen zwei um Δa von einander abstehende Jahre a und $a + \Delta a$ einerlei Festzahl haben, so müssen sie, zu Folge §. 111, (205) auch denselben Sonntagsbuchstaben haben; es kann nemlich nur $\Delta v = 0$ sein, wenn $\Delta L = 0$ ist. Allein vermöge §. 70 kann der Sonntagsbuchstabe frühestens nur nach 5, 6 oder 11 Jahren wiederkehren; daher gilt dasselbe auch von der Festzahl. Nach 5 oder 6 Jahren erfolgt der Wiedereintritt derselben Festzahl selten, wie man sich überzeugen kann, wenn man $\Delta a = 5$ oder 6 annimmt; häufig jedoch schon nach 11 Jahren. Setzt man demnach, um sich davon zu überzeugen, $\Delta a = 11$, jedoch zur Vereinfachung der Untersuchung $\Delta k = 0$, $\Delta M = 0$, $\Delta \delta p = 0$; so findet man

$$\Delta N = 11 - 19\,q\frac{11+N}{19} = 11, \text{ wenn } N \overline{\overline{<}} 8,$$
$$= -8, \text{ wenn } N > 8,$$

$$\Delta p = -1 - q\frac{N+10}{19} - 30\,q\frac{p-1-q\frac{N+10}{19}}{30} = \pm r\frac{\mp\left(1+q\frac{N+10}{19}\right)}{30}$$

$N \overline{\overline{<}} 8$, $\Delta p = -1$, wenn $p > 0$, $\Delta p = 29$, wenn $p = 0$,
$N > 8$, $\Delta p = -2$, wenn $p > 1$, $\Delta p = 28$, wenn $p = 0$ o. 1.

Soll $\Delta L = 0$ sein, muß $2\Delta r\frac{a}{4} \equiv 3\Delta a$, mod $7 \equiv 33 \equiv -2$, also $\Delta r\frac{a}{4} \equiv -1$, mod 7, mithin $\Delta r\frac{a}{4} = -1$ ausfallen. Es ist aber, für $\Delta a = 11 \equiv -1$, mod 4,

$$\Delta r\frac{a}{4} = -1 - 4\,q\frac{r\frac{a}{4}-1}{4} \text{ und dieses } = -1, \text{ wenn}$$

$q\frac{r\frac{a}{4}-1}{4} = 0$, also $r\frac{a}{4} - 1 = 0, 1, 2$ und $r\frac{a}{4} = 1, 2, 3$, mithin a

ein Gemeinjahr ist. Es kann demnach nur einem Gemeinjahre ein um 11 Jahre späteres folgen, das denselben Sonntagsbuchstaben hat.

Die Aenderung der Festzahl

$$\Delta v = \Delta L - 7 \mathfrak{Q} \frac{\Delta L - (\Delta p - \Delta \delta p) + b}{7}$$

übergeht für $\Delta L = 0$ und $\Delta \delta p = 0$ in

$$\Delta v = -7 \mathfrak{Q} \frac{b - \Delta p}{7} = 7 \mathfrak{Q} \frac{\Delta p + 8 - b}{7} = 7 \mathfrak{Q} \frac{\Delta p + f}{7}.$$

Soll $\Delta v = 0$ werden, muß $\Delta p + 8 - b = \Delta p + f = 7, 6, \ldots 1$ sein; dies kann also nur eintreten, wenn $\Delta p = -1$, $f = 7, 6, \ldots 2$ und $b = 1, 2, \ldots 6$ oder $\Delta p = -2$, $f = 7, 6, \ldots 3$ und $b = 1, 2 \ldots 5$ ist.

Es wiederkehrt demnach die Festzahl sehr oft nach 11 Jahren; wovon man sich die Bestätigung verschaffen kann, wenn man in einem der Verzeichnisse von Festzahlen, in Tafel 3 oder 5 des Anhanges, von einer beliebigen Festzahl schräg rechts abwärts auf jene des um 11 späteren Jahres überschreitet.

3) Soll der Sonntagsbuchstabe jeden Falls ungeändert, nemlich $\Delta L = 0$, also $\Delta v \equiv 0$, mod 7 bleiben; so muß, so lange $\Delta k = 0$ ist, $\Delta a \equiv 0$, mod 28, folglich $\Delta a = 28\omega$ sein (§. 68 und 69). Dann findet man

$$\Delta N = 9\omega - 19 \mathfrak{Q} \frac{N + 9\omega}{19} \text{ und für } \Delta M = 0$$

$$\Delta p = -9\omega - \mathfrak{Q} \frac{N + 9\omega}{19} - 30 \mathfrak{Q} \frac{-9\omega - \mathfrak{Q} \frac{N + 9\omega}{19} + p}{30},$$

endlich für $\Delta \delta p = 0$ wie vorher

$$\Delta v = 7 \mathfrak{Q} \frac{\Delta p + 8 - b}{7} = -7 \mathfrak{Q} \frac{b - \Delta p}{7}.$$

Z. B. Für $\omega = 1$, also $\Delta a = 28$ findet man

$\Delta N = 9, \quad -10,$
$\Delta p = -9, \quad 21; \quad -10, \quad 20,$
$\Delta v = -7, -14; 21, 28; -7, -14; 14, 21.$

Bei $\omega = 3$, also $\Delta a = 84$ ergibt sich

$\Delta N = 8, \quad -11,$
$\Delta p = 2, \quad -28; \quad 1, \quad -29,$
$\Delta v = 0, 7, -28; \quad 0, 7; -28.$

Uebergeht man demnach im julianischen Kalender von einem Jahre auf das um 84 spätere, so ändert sich entweder die Festzahl nicht, oder sie steigt um 7 oder fällt um 28.

4) Bleibt im julianischen Kalender die Ostergrenze auf demselben Tage haften, so daß $\Delta p = 0$ ist, so muß $\Delta a = 19\varphi$ sein. Dann ist

$$\Delta r\frac{a}{4} = -\varphi - 4q\frac{r\frac{a}{4} - \varphi}{4} = \pm r\frac{\mp\varphi}{7}$$

$$\Delta L \equiv \pm 2r\frac{\mp\varphi}{4} - \varphi, \text{ mod } 7$$

$$\Delta v = \Delta b = \pm r\frac{\pm\Delta L}{7}.$$

Nun findet man für $\varphi = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \; 5, \ldots$

mod 7) $\Delta L \equiv 5, \quad 2, -1, -4, \; 1, \ldots$

$\qquad -3, -6, -2, \quad 0, \ldots$

also wird ΔL am einfachsten für $\varphi = 5$, oder für $\Delta a = 95$.

In diesem Falle findet man

$$\Delta r\frac{a}{4} = -1 - 4q\frac{r\frac{a}{4} - 1}{4}$$

$$\Delta L \equiv -q\frac{r\frac{a}{4} - 1}{4}, \text{ mod } 7, \quad \Delta v = \pm r\frac{\mp q\frac{r\frac{a}{4} - 1}{4}}{7}.$$

Für $\qquad r\frac{a}{4} = 1, \; 2, \; 3$ ist $\Delta v = 0$,

für $\qquad r\frac{a}{4} = 0$ aber $\Delta v = 1$ oder -6.

Im julianischen Kalender wiederkehren daher die Festzahlen, wie bereits Cyrillus entdeckt hatte, (S. 247) nach 95 Jahren fast periodisch; indem blos alle 4 Jahre, bei dem Ausgange von einem Schaltjahre, das um 95 spätere Jahr eine um 1 größere und nur selten um 6 kleinere Festzahl besitzt.

5) Damit endlich die Festzahlen periodisch wiederkehren, also jeden Falls $\Delta v = 0$ oder $\Delta p - \Delta\delta p + \Delta b = 0$ sei; muß $\Delta p = 0$, $\Delta\delta p = 0$, $\Delta b = 0$ sein. Daraus folgt, weil überhaupt

$\qquad \Delta v \equiv \Delta L$, mod 7

ist, auch $\quad \Delta L \equiv 0$, mod 7,

mithin $\quad \Delta L = 0$,

weil $\quad \Delta L = 0, \; \pm 1, \ldots \pm 6$ ist.

Dann muß aber, vermöge §. 69, (116), $\Delta k = 0$ oder wenigstens $\Delta k \equiv 0$, mod 7 und $\quad \Delta a \equiv 0$, mod 28 sein.

Aus $\Delta p = 0$ folgt ferner $-11\Delta N + \Delta M \equiv 0$, mod 30, daher $\Delta M \equiv 0$, mod 30, und $\Delta N \equiv 0$, mod 30. Sofort ist $\Delta M = 0$ und $\Delta N = 0$, weil beide absolut genommen < 30 sind. Da endlich $\Delta N \equiv \Delta a$, mod 19 ist, so hat man noch $\Delta a \equiv 0$, mod 19. Dies mit obiger Bedingung $\Delta a \equiv 0$, mod 28 verbunden gibt $\Delta a \equiv 0$, mod 532.

Im julianischen Kalender wiederholen sich demnach die Festzahlen periodisch nach 532 Jahren (§. 51).

120.

Berechnung jener Jahrhunderte, in denen eine bezeichnete Reihe lilianischer Epakten oder Ostergrenzen gilt.

Im $s+1^{ten}$ Jahrhunderte nach Chr. und zwar vom Jahre $s100$ bis $s100+99$, wofern nur $s>14$ ist, kommt dem 19jährigen Mondkreise jene Reihe lilianischer Epakten und Ostergrenzen zu, deren Nummern M vermöge §. 103, (189) durch

$$M = \mathrm{R}\frac{k-K+12}{30}$$

ausgedrückt wird. Dabei ist nach §. 47, (61) und (62), §. 102, (184), (186)

$$k = s - \mathrm{q}\frac{s}{4} - 2 = \mathrm{q}\frac{3s-5}{4},\; K = \mathrm{q}\frac{s-\mathrm{q}\frac{s-17}{25}}{3} - 5 = \mathrm{q}\frac{8(s-14)}{25}$$

folglich

$$k - K = \mathrm{q}\frac{75s-125}{100} - \mathrm{q}\frac{32(s-14)}{100}$$

$$= \mathrm{q}\frac{43s+323+\mathrm{r}\frac{32(s-14)}{100}}{100}$$

$$= \mathrm{q}\frac{43s+23+4\mathrm{r}\frac{8(s-14)}{25}}{100} + 3.$$

Daraus ergibt sich nun zur Berechnung von s, wenn man abkürzend

$$k - K - 3 = G$$

setzt,

$$\mathrm{q}\frac{43s+23+4\mathrm{r}\frac{8(s-14)}{25}}{100} = G.$$

Um G aus M zu berechnen, beachte man, daß nach diesen Gleichungen

$$M = \mathrm{R}\frac{G+15}{30}$$

folglich

$$G \equiv M - 15, \text{ mod } 30$$

$$= M - 15 + 30\varphi,\; \varphi = 0, 1, 2, \ldots.$$

sein muß.

Erwägt man nunmehr, daß $\mathrm{r}\frac{8(s-14)}{25} = 0, 1, \ldots 24$

also $4\mathrm{r}\frac{8(s-14)}{25} = 0, 4, \ldots 96$ ist, so findet man

$$\mathrm{q}\frac{43s+23}{100} \leqq G \quad \text{und} \quad \mathrm{q}\frac{43s+23+96}{100} \geqq G.$$

Es ist aber allgemein $d = t\mathrm{q}\frac{d}{t} + \mathrm{r}\frac{d}{t}$

und $\mathrm{r}\frac{d}{t} = 0, 1, \ldots. t-1,$

daher $d \geqq t\mathrm{q}\frac{d}{t}$ und $d \leqq t\mathrm{q}\frac{d}{t} + t - 1.$

Mithin ist im gegenwärtigen Falle

$$43s + 23 \leqq 100G + 99 \text{ und } 43s + 119 \geqq 100G,$$

also
$$s \leqq \frac{100G + 76}{43} \qquad s \geqq \frac{100G - 119}{43}.$$

Daraus ergibt sich, in so fern s eine ganze Zahl werden muß,

$$s \leqq \mathfrak{E}\frac{G100 + 76}{43} \text{ und } s \geqq \mathfrak{E}\frac{(G-2)100+81}{43} + 1$$
$$\geqq \mathfrak{E}\frac{(G-1)100+23}{43}.$$

Der Unterschied beider Grenzen ist

$$= \mathfrak{E}\frac{153 + \mathfrak{E}\frac{(G-1)100+23}{43}}{43} = 3 \text{ oder } 4;$$

folglich bleibt s nur unter 4 oder 5 Werthen auszuwählen. Enger lassen sich die Grenzen nicht ziehen, weil manchmal zu dreien Jahrhunderten dieselbe Nummer M gehört, und wenn s um 1 wächst, zuweilen M wieder abnimmt.

Ist demnach $k - K$ oder M angegeben und $\varphi = 0, 1, 2, \ldots$ gewählt, so sucht man

$$(214) \qquad G = k - K - 3 = M - 15 + 30\varphi,$$

und dann ist einerseits

$$(215) \qquad s \geqq \mathfrak{E}\frac{(G-1)100+23}{43}, \text{ andrerseits } s \leqq \mathfrak{E}\frac{G100+76}{43}.$$

Sowohl die auf, als zwischen diese Grenzen treffenden Zahlen nimmt man sonach für s an, und sieht nach, welche aus ihnen der Bedingungsgleichung

$$(216) \qquad f(s) = s - \mathfrak{E}\frac{s}{4} - \mathfrak{E}\frac{s - \mathfrak{E}\frac{s-17}{25}}{3} = G$$

genügen und daher die geforderten Werthe von s sind.

Beispiel. Sei $M = 22$ und $\varphi = 0$, also $G = 22 - 15 = 7$, so ist $s \geqq \mathfrak{E}\frac{623}{43} = 14$ und $s \leqq \mathfrak{E}\frac{776}{43} = 18$.

Man findet aber für $s = 15, 16, 17, 18$

$$\mathfrak{E}\frac{s}{4} = 3, 4, 4, 4$$

$$\mathfrak{E}\frac{s - \ldots}{3} = 5, 5, 5, 6$$

$$f(s) = 7, 7, 8, 8; \text{ folglich } s = 15 \text{ und } 16.$$

Wählt man aber $\varphi = 1$, so wird $G = 37$, daher $\mathfrak{E}\frac{3623}{43} \leqq s \leqq \mathfrak{E}\frac{3776}{43}$ oder $84 \leqq s \leqq 87$. Es zeigt sich aber für

$$s = 84, 85, 86, 87$$

$$\mathfrak{E}\frac{s}{4} = 21, 21, 21, 21$$

$$\mathfrak{E}\frac{s - \ldots}{3} = 27, 27, 28, 28$$

daher
$$f(s) = 36, 37, 37, 38 \text{ und } s = 85 \text{ oder } 86.$$

Also erst mit dem Jahre 8500 wird die zur Zeit der Kalenderverbesserung bestandene Epaktenreihe wieder zur Osterrechnung verwendet werden. Diese Reihe von Epakten reicht in der Tafel 4 des Anhanges von $N+Z=14$ bis 32, und ist sonach 1, 12, 23, ... 8, 19.

121.

Berechnung der Jahre, denen eine gewisse Festzahl zukommt.

I. Im julianischen Kalender.

Sei die alexandrinische Festzahl v gegeben, und seien diejenigen Jahre a nach Christo zu berechnen, denen sie angehört.

Ein solches Jahr besizt vermöge §. 111, (205) den Sonntagsbuchstaben $L=\mathfrak{R}\frac{v+3}{7}$, und ist nach §. 71, IV, (135) allgemein

$$a \equiv 4\mathfrak{r}\frac{-3L+2}{7}+\mathfrak{a},\ \text{mod } 28,$$

wofern

$$\mathfrak{a} \equiv -11\mathfrak{r}\frac{a}{4},\ \text{mod } 28 \equiv 0,\ 17,\ 6,\ 23$$
$$-11,\ -22,\ -5$$
$$\text{für}\quad \mathfrak{r}\frac{a}{4}=0,\ 1,\ 2,\ 3;$$

daher insbesondere hier

$$a \equiv 4\mathfrak{r}\frac{-3v}{7}+\mathfrak{a},\ \text{mod } 28 \equiv -\left(12v+11\mathfrak{r}\frac{a}{4}\right),$$

und wenn man abkürzend mit a' den Rest von a durch 28 bezeichnet

$$(217)\qquad a'=\mathfrak{r}\frac{a}{28}=\mathfrak{r}\frac{-\left(12v+11\mathfrak{r}\frac{a}{4}\right)}{28},\ \mathfrak{r}\frac{a}{4}=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Ferner ist nach §. 88, (175)

$$v=p+b=1,\ 2,\ \ldots\ 35,$$

und darin $\quad b=1,\ 2,\ \ldots\ 7,\ p=0,\ 1,\ \ldots\ 28.$

Hieraus folgt $\quad b=v-p=v,\ v-1,\ \ldots\ v-28,$

und $\quad p=v-b.$

Sezt man daher diejenigen Werthe $b=1, 2, \ldots 7$, welche nicht größer als v und nicht kleiner als $v-28$ sind, damit $v-b$ weder negativ noch größer als 28 ausfalle; so erhält man alle möglichen zusammen gehörigen Werthe von b und p als Bestandtheile der angegebenen Festzahl v.

Zu jedem so gefundenen Werthe von p, deren Anzahl also höchstens 7 sein kann, gibt die, vermöge §. 82, (156) bestehende Congruenz

$$p \equiv -11\mathfrak{r}\frac{a}{19}\pm 15,\ \text{mod } 30 = 0,\ 1,\ \ldots\ 28;$$

zunächst $\quad 11\mathfrak{r}\frac{a}{19} \equiv -p \pm 15,\ \text{mod } 30$

und dann, wenn man mit 11 multiplicirt,

$$\mathrm{r}\frac{a}{19} \equiv -11p \pm 15, \bmod 30.$$

Bezeichnet man demnach mit a'' den Rest des zu suchenden Jahres a durch 19, folglich alle Werthe des Restes $\mathrm{r}\frac{-11p\pm15}{30}$, welche <19 ausfallen; was durch folgende Darstellung

(218) $\quad a'' = \mathrm{r}\frac{a}{19} = \mathrm{r}\frac{-11p\pm15}{30} < 19$

angedeutet sein soll; so können, weil vermöge Vorbegriffe XXI, 3, unter den 7 möglichen Resten $\mathrm{r}\frac{-11p\pm15}{30} = \mathrm{r}\frac{19p\pm15}{30}$ wenigstens 2 größer als 18 ausfallen müssen, höchstens 5 zulässige Werthe von a'' gefunden werden.

Aus den Resten a' und a'' des zu berechnenden Jahres a nach den Theilern 28 und 19 findet man nunmehr, vermöge Vorbegriffe XX, (113), dies Jahr selbst $\quad a \equiv 19\mathrm{r}\frac{3a'}{28} - 28\mathrm{r}\frac{2a''}{19}, \bmod 532 \equiv 57a' - 56a''$;
mithin alle möglichen Jahre, wenn man jeden der 4 Reste a' mit jedem der Reste a'', deren Anzahl höchstens 5 sein kann, verbindet; weswegen höchstens $4.5 = 20$ Jahre in einem 532jährigen Osterkreise vorkommen können, welche die angewiesene Festzahl v besitzen.

Zur Vereinfachung des Rechnens lassen sich folgende Umstaltungen vornehmen. Es ist nemlich, wegen obigen Ausdrucks von a',

$$19\mathrm{r}\frac{3a'}{28} = 19\mathrm{r}\frac{-\left(8v+5\mathrm{r}\frac{a}{4}\right)}{28} \equiv -\left(19.8v+19.5\mathrm{r}\frac{a}{4}\right), \bmod (19.28)$$
$$\equiv -\mathrm{r}\frac{19.8v}{19.28} - 95\mathrm{r}\frac{a}{4}, \bmod 532$$
$$\equiv -76\mathrm{r}\frac{2v}{7} - 95\mathrm{r}\frac{a}{4}, \bmod 532.$$

Man setze nun

(219) $\quad A \equiv -95\mathrm{r}\frac{a}{4}, \bmod 532,$

(220) $\quad A' \equiv \pm 76\mathrm{r}\frac{\mp 2v}{7} \equiv -152v, \bmod 532;$

so hat man

$$19\mathrm{r}\frac{3a'}{28} \equiv A + A', \bmod 532.$$

Endlich setze man noch

(221) $\quad A'' \equiv -28\mathrm{r}\frac{2a''}{19} \equiv -56a'', \bmod 532;$

dann erhält man die geforderten Jahre

(222) $\quad a \equiv A + A' + A'', \bmod 532,$

indem man jeden Werth von A mit jedem von $A' + A''$ verbindet.

Noch kann man den Ausdruck von a'' durch v und b unmittelbar geben, indem man $p = v - b$ substituirt, und b nach obigen Bedingungen gewählt denkt. Man erhält so

$$(223) \qquad a'' = \mathrm{r}\frac{-11(v-b)\pm 15}{30} = \mathrm{r}\frac{-11v \pm 15 + 11b}{30} < 19.$$

Die Lösung der Aufgabe ist demnach kurz folgende:

Man wählt jene Werthe $b = 1, 2, 3, \ldots 7$, welche nicht größer als die gegebene Festzahl v und nicht kleiner als $v - 28$ sind, damit $v - b$ weder negativ noch größer als 28 ausfalle, nemlich

für $v = 1, 2, \ldots 6$	setzt man		$b = 1, 2, \ldots v$
» $v = 7, 8, \ldots 29$	»	»	$b = 1, 2, \ldots 7$
» $v = 30, 31, \ldots 35$	»	»	$b = v - 28, \ldots 7.$

Hierauf berechnet man zu den Werthen von b oder $v - b$ alle Reste

$$\mathrm{r}\frac{-11v \pm 15 + 11b}{30} = \mathrm{r}\frac{-11(v-b)\pm 15}{30},$$

behält aber blos jene bei, die kleiner als 19 sind, und bezeichnet sie mit a''; nemlich $v - b = 2, 5, 7, 10, 13, 16, 18, 21, 24, 26$ ausschließend, für

$v - b = p =$	0,	1,	3,	4,	6,	8,	9,	11,	12,	14,	15,	17,	19,	20,	22,	23,	25,	27,	28,
$a'' =$	15,	4,	12,	1,	9,	17,	6,	14,	3,	11,	0,	8,	16,	5,	13,	2,	10,	18,	7.

Zu dem Werthe von v oder vielmehr zu jenem von $\mathrm{r}\frac{v}{7}$ bestimmt man

$$(220) \qquad A' \equiv \pm 76\,\mathrm{r}\frac{\mp 2v}{7} \equiv -152v, \ \mathrm{mod}\ 532$$

nemlich für $\mathrm{r}\frac{v}{7} =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,
$A' \equiv$	0,	-152,	-304,	-456,	-76,	-228,	-380
		380,	228,	76,	456,	304,	152;

so wie zu jedem Werthe von a'' die Zahl

$$(221) \qquad A'' \equiv -28\,\mathrm{r}\frac{2a''}{19} \equiv 28\,\mathrm{r}\frac{-2a''}{19} \equiv -56a'', \ \mathrm{mod}\ 532,$$

namentlich für

$a'' \equiv$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18
$A'' \equiv$	0,	476,	420,	364,	308,	252,	196,	140,	84,	28,	504,	448,	392,	336,	280,	224,	168,	112,	56
		$\underline{56}$,	$\underline{112}$,	$\underline{168}$,	$\underline{224}$,	$\underline{280}$,	$\underline{336}$,	$\underline{392}$,	$\underline{448}$,	$\underline{504}$,	$\underline{28}$,	$\underline{84}$,	$\underline{140}$,	$\underline{196}$,	$\underline{252}$,	$\underline{308}$,	$\underline{364}$,	$\underline{420}$,	$\underline{476}$,

wo die Zahlen der zweiten Zeile negativ sind und ihr Zeichen unter sich stehen haben.

Jeden der Werthe von A'' vereinigt man mit dem einen von A' in die Summe $A' + A''$; dabei wählt man von den beiden congruenten Werthen dieser Zahlen A' und A'' immer jene zwei, welche diese Summe so klein als möglich, positiv oder negativ, liefern. Mit jedem Werthe der Summe $A' + A''$, deren Anzahl so wie jene der möglichen Werthe von a'' höchstens 5 sein kann, vereinigt man jeden der vier positiven oder negativen Werthe von

$$(219) \qquad A \equiv -95\,\mathrm{r}\frac{a}{4}, \ \mathrm{mod}\ 532,$$

nemlich für $\mathrm{r}\frac{a}{4} =$	0,	1,	2,	3
$A \equiv$	0,	-95,	-190,	-285
		437,	342,	247.

Dann sind die geforderten Jahre

$$(224)\qquad a \equiv -95 r\frac{a}{4} - 76 r\frac{2v}{7} - 28 r\frac{2a''}{19}, \text{ mod } 532$$

oder

$$(222)\qquad a \equiv A + A' + A'', \text{ mod } 532,$$

nemlich zuvörderst alle positiven, die Zahl 532 nicht übersteigenden Werthe der Summe aus $A' + A''$ und A, oder auch aus A, A' und A'', deren Anzahl äußerstens 20 und wenigstens 4 ist, nebst allen jenen, die sich ergeben, wenn man jeglichen aus ihnen beliebig oft um 532 vergrößert. Findet man es bequemer, so kann man auch durchgehends die kleinsten positiven Werthe von A, A', A'' berechnen, und von ihrer Summe, so oft es angeht, 532 wegwerfen, oder sie nach Gefallen um 532 vermehren.

1. Beispiel. In welchen Jahren n. Chr. nahm jegliches bewegliche Fest in dem julianischen Kalender oder nach der alexandrinischen Osterrechnung seinen mittleren Plaz ein, oder besaß die Festzahl ihren mittleren Werth $(1+35) : 2 = 18$.

Für $\qquad v = 18 \equiv 4$, mod 7 findet man

$$A' \equiv -76 \equiv 456, \text{ mod } 532.$$

und $\qquad -11v + 15 \equiv -18 + 15$, mod $30 \equiv -3$.

Hiezu darf man annehmen

$b =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7;
daher wird $v - b =$	17,	16,	15,	14,	13,	12,	11,
$r\frac{-11v+15+11b}{30} =$	8,	19,	0,	11,	22,	3,	14,
$a'' =$	0,	3,	8,	11,	14,	folglich	
$A'' \equiv$	0,	364,	84,	−84,	−252,	mod 532	
$A' + A'' \equiv$	456,	288,	8,	372,	204.		

Damit $A \equiv 0, -95, -190, -285$ variirt, gibt die geforderten Jahre

mod 532				
$a \equiv 456,$	288,	8,	372,	204
361,	193,	445,	277,	109
266,	98,	350,	182,	14
171,	3,	255,	87,	451.

2. Beispiel. Welche Jahre nach Chr. besizen die beiden äußersten alexandrinischen Festzahlen, die kleinste 1 und die größte 35?

Hier ist $v =$	1,	35	
$\equiv$	1,	0,	mod 7
$A' \equiv$	−152,	0	

dann blos $b \equiv 1, \quad 7$

$v - b \equiv 0, \quad 28$

$-11(v-b) \equiv 0, \quad -8, \quad \bmod 30$

$-11(v-b)+15 \equiv 16, \quad 7$

$a'' \equiv 15, \quad 7$

$A'' \equiv 224, \quad 140, \quad \bmod 532$

$A'+A'' \equiv 72, \quad 140$

dazu $A \equiv 0, \; -95, \; 342, \; 247$
$437,$

gibt die geforderten Jahre

$a \equiv 72, \quad 140$
$509 \quad 45$
$414 \quad 482$
$319 \quad 387.$

Demnach ist im julianischen Kalender die Festzahl $= 1$ in den Jahren
(72*), 319, 414, 509; 604*, 851, 946, 1041;
1136*, 1383, 1478, 1573; 1668*, 1915, 2010, 2105;
2200*, 2447, 2542, 2637; 2732*, 2979, 3074, 3169; u. s. w.
und die Festzahl $= 35$ in den Jahren
(45), (140*), 387, 482; 577, 672*, 919, 1014;
1109, 1204*, 1451, 1546; 1641, 1736*, 1983, 2078; u. s. w.

Anmerkung. Hier und im folgenden werden durch die Sternchen die Schaltjahre kenntlich gemacht.

122.

Fortsetzung.

II. Im gregorianischen Kalender.

Ist eine lilianische Festzahl v gegeben und sind jene Jahre a n. Chr. zu berechnen, denen sie zukommt, so muß man für die einzelnen Jahrhunderte besonders Rechnung halten. Sei nun s die Anzahl der Hunderte des zu suchenden Jahres a, und sei dieses das Jahr α im $s+1^{ten}$ Jahrhunderte, das sich von $s100$ bis $s100+99$ erstreckt, folglich

$$a = 100s + \alpha, \quad \alpha = r\frac{a}{100} = 0, 1, \ldots 99;$$

so läßt sich α in folgender Weise berechnen.

Zuvörderst bestimmen die bekannten Jahrhunderte $s = q\frac{a}{100}$ den Unterschied der Kalender nach der Gleichung

$$(61) \qquad k = s - q\frac{s}{4} - 2$$

oder nach der Tafel in §. 47, II, (S. 131), und die Nummer der lilianischen Epaktenreihe nach der Gleichung

$$(192)\qquad M \equiv s - \mathfrak{q}\frac{s}{4} - \mathfrak{q}\frac{s - \mathfrak{q}\frac{s-17}{25}}{3} + 15, \text{ mod } 30$$

oder nach Tafel 4 im Anhange.

Erste Auflösung. Das geforderte Jahr besizt, vermöge §. 111, (205), den Sonntagsbuchstaben $L = \mathfrak{R}\frac{v+3}{7}$.

Bezeichnet man demnach jene Jahre im $s+1^{ten}$ Jahrhunderte, denen dieser Sonntagsbuchstabe zukommt, mit α', und in der Aere n. Chr. selbst mit a', so daß

$$a' = 100s + \alpha', \quad \alpha' = 0, 1, \ldots 99$$

ist; so findet man α' entweder mittels der Tafel 1 im Anhange oder vermöge §. 71, IV, (133), mittels der Congruenz

$$\alpha' \equiv 4\mathfrak{r}\frac{3(s+k-L+3)}{7} + \mathfrak{a}, \text{ mod } 28$$

$$\equiv 4\mathfrak{r}\frac{3 - \mathfrak{r}\frac{s}{4} - 3L}{7} + \mathfrak{a}, \text{ mod } 28$$

$$\mathfrak{a} \equiv -11\,\mathfrak{r}\frac{\alpha'}{4} \equiv 0, \quad 17, \quad 6, \quad 23$$

$$-11, -22, -5;$$

folglich, nach Einführung des Ausdruckes von L, durch die Congruenz

$$(225)\qquad \alpha' \equiv 4\mathfrak{r}\frac{3(s+k-v)}{7} + \mathfrak{a} \equiv 4\mathfrak{r}\frac{1 - \mathfrak{r}\frac{s}{4} - 3v}{7} + \mathfrak{a}, \text{ mod } 28$$

$$= 0, 1, \ldots 99.$$

Aus dem Ausdrucke der Festzahl

$$(204)\qquad v = p - \delta p + b = 1, 2, \ldots 35$$

folgt, mit Rücksicht auf §. 103, III,

$$p - \delta p = v - b = 0, 1, 2, \ldots 28$$

und

$$b = v - (p - \delta p) = v, v - 1, \ldots v - 28$$

$$= 1, 2, \ldots 7.$$

Man wird demnach auch hier für b aus den Zahlen 1, 2, ... 7 alle jene wählen, welche nicht größer als v und nicht kleiner als $v - 28$ sind, damit der Unterschied $v - b$ weder negativ noch größer als 28 ausfalle. Insbesondere wird man

für $v = 1, 2, \ldots 6$ sezen $b = 1, 2, \ldots v$

» $v = 7, 8, \ldots 29$ » $b = 1, 2, \ldots 7$

» $v = 30, 31, \ldots 35$ » $b = v - 28, \ldots 7$.

20 *

Für die Verbesserung δp des Abstandes p der Ostergrenze vom 21 März ergab sich der Ausdruck $\delta p = UV$, in welchem V von M und U von p abhängt, so daß

(195) $U = \mathfrak{q}\frac{p+\vartheta}{28+\vartheta}$

ist und blos für $p = 28$ und 29 in 1 übergeht, sonst immer 0 bleibt. Nun ist für $p = 29$, nach §. 103, III, jedesmal $U = 1$, folglich $\delta p = 1$ und $p - \delta p = 29 - 1 = 28$; dagegen für $p = 28$ öfter $U = 0$ als $U = 1$, daher auch öfter $\delta p = 0$ als $\delta p = 1$, folglich auch öfter $p - \delta p = 28 - 0 = 28$ als $= 28 - 1 = 27$. So oft demnach $p = 28$ oder 29 ist, wird $p - \delta p = 27$ oder 28; und da dort immer auch $U = \mathfrak{q}\frac{p+\vartheta}{28+\vartheta}$ von 0 auf 1 sich erhebt, so hängt der Factor U von $p - \delta p$ dergestalt ab, daß er für $p - \delta p \geqq 27$ von 0 zu 1 aufsteigt, daher kann man, vermöge Vorbegriffe XXII, 2, auch $U = \mathfrak{q}\frac{p-\delta p+\vartheta}{27+\vartheta}$ setzen; worin man nur noch $p - \delta p = v - b$ zu schreiben hat, und sofort

(226) $U = \mathfrak{q}\frac{v-b+\vartheta}{27+\vartheta}$

erhält.

Man wird daher allgemein

(200) $\delta p = UV$ bestimmen, wofern

(226) $U = \mathfrak{q}\frac{v-b+\vartheta}{27+\vartheta}$, $\vartheta = 0, 1, 2, \ldots$

(196) $V = \mathfrak{q}\frac{18-\psi+\mathfrak{R}\frac{-11(M+1)}{30}}{30-\psi}$, $-\psi = -11, -10, \ldots -1, 0, 1, 2, \ldots$

(198) $= \mathfrak{q}\frac{7+\omega 1+\mathfrak{r}\frac{1(M+2)}{30}}{18+\omega}$, $\omega = 1, 2, 3, \ldots$

oder am einfachsten

(227) $U = \mathfrak{q}\frac{v-b}{27}$, $V = \mathfrak{q}\frac{7+\mathfrak{R}\frac{-11(M+1)}{30}}{19} = \mathfrak{q}\frac{7+\mathfrak{R}\frac{11M-7}{30}}{19}$

gesetzt wird.

Es ist demnach insbesondere blos dann $\delta p = 1$, wenn entweder $v - b = 28$, daher $\mathfrak{r}\frac{11(M+1)}{30} < 19$, nemlich M eine der Zahlen 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29, 30 ist; oder wenn $v - b = 27$ und $\mathfrak{r}\frac{11(M+2)}{30} > 10$ aber < 19, folglich M eine der Zahlen 2, 5, 10, 13, 16, 21, 24, 29 ist; in jedem anderen Falle hat man $\delta p = 0$.

Hat man für die möglichen Werthe von $v - b$ die zugehörigen von δp bestimmt, so ergibt sich

(228) $p = (v - b) + \delta p$.

Eine solche mögliche Vorrückung p der Ostergrenze muß nun einem der bereits gefundenen 14 oder 15 Jahre α' des $s+1^{ten}$ Jahrhundertes, welche den Sonntagsbuchstaben $\mathrm{R}\frac{v+3}{7}$ haben, zukommen, wenn es die Festzahl v besitzen soll.

Allgemein ist aber im Jahre a die Vorrückung der Ostergrenze

$$(190) \qquad p \equiv M - 11\,\mathrm{r}\frac{a}{19}, \ \mathrm{mod}\ 30 = 0, 1, \ldots 29,$$

daher, wenn man die im Jahre α' des $s+1^{ten}$ Jahrhundertes oder im Jahre $a' = 100s+\alpha'$ bestehende mit p' und den Rest von a' durch 19 mit $\bar{a}$ bezeichnet, folglich $\mathrm{r}\frac{a'}{19} = \bar{a}$ setzt,

$$p' \equiv M - 11\bar{a}, \ \mathrm{mod}\ 30 = 0, 1, \ldots 29$$

und hierin ist

$$\bar{a} = \mathrm{r}\frac{a'}{19} \equiv a', \ \mathrm{mod}\ 19 \equiv 100s + \alpha' \equiv 5s + \alpha' = \mathrm{r}\frac{5s+\alpha'}{19}.$$

Man wird demnach zu jedem der gefundenen Jahre α' zunächst den Rest

$$(229) \qquad \bar{a} \equiv 5s + \alpha', \ \mathrm{mod}\ 19 = \mathrm{r}\frac{5s+\alpha'}{19},$$

und darnach die Vorrückung der Ostergrenze

$$(230) \qquad p' = \mathrm{r}\frac{M-11\bar{a}}{30}$$

berechnen. Dann sind alle jene Jahre α', bei denen p' einer der möglichen Vorrückungen p, deren Anzahl höchstens 7 sein kann, gleich ausfällt, die gesuchten Jahre α des $s+1^{ten}$ Jahrhundertes, denen die angegebene Festzahl v zugehört.

123.

Fortsezung.

Zweite Auflösung. Aus den möglichen Vorrückungen p der Ostergrenze kann man auch diejenigen Jahre α'' im $s+1^{ten}$ Jahrhunderte berechnen, denen sie angehören.

Die Congruenz

$$(190) \qquad p \equiv M - 11\,\mathrm{r}\frac{a}{19}, \ \mathrm{mod}\ 30$$

gibt nemlich $11\,\mathrm{r}\frac{a}{19} \equiv M - p$,

folglich wenn mit 11 multiplicirt wird,

$$\mathrm{r}\frac{a}{19} \equiv 11(M-p), \ \mathrm{mod}\ 30.$$

Bezeichnet man nun zur Abkürzung jeden Rest $\mathrm{r}\frac{a}{19}$ oder jeglichen Rest $\mathrm{r}\frac{11(M-p)}{30}$, welcher < 19 ist, durch a'', so daß $a'' = \mathrm{r}\frac{a}{19}$ und

$$(231) \qquad a'' = \mathrm{r}\frac{11(M-p)}{30} < 19;$$

so wird man zu jedem Werthe von p den Rest $\mathrm{r}\frac{11(M-p)}{30}$ berechnen, davon aber blos jene beibehalten und durch a'' bezeichnen, welche kleiner als 19 sind,

Nun ist $a = 100s + \alpha$

daher $\quad r\frac{a}{19} = a'' \equiv 5s + \alpha$, mod 19

und somit, wenn man α mit α'' vertauscht,

$$(232) \qquad \alpha'' \equiv a'' - 5s, \text{ mod } 19 = 0, 1, \ldots 99$$

der allgemeine Ausdruck der Jahre im $s+1^{\text{ten}}$ Jahrhunderte, denen eine der Vorrückungen p zukommt.

Da nunmehr von dem Jahre α, welches die Festzahl v besizt, die Reste nach den Theilern 28 und 19 bekannt sind, so sieht man sich in den Stand gesezt, dies Jahr selbst zu berechnen.

Es ist nemlich, weil $r\frac{\alpha}{28} = r\frac{\alpha'}{28} \equiv \alpha'$, mod 28

und $r\frac{\alpha}{19} = r\frac{\alpha''}{19} \equiv \alpha''$, mod 19

ist, vermöge Vorbegriffe XX, (113),

$$\alpha \equiv 19r\frac{3\alpha'}{28} - 28r\frac{2\alpha''}{19}, \text{ mod } 532.$$

$$\equiv 57\alpha' - 56\alpha'', \text{ mod } 532.$$

Sezt man hierin für α' und α'' die oben gefundenen Ausdrücke, so findet man

$$19r\frac{3\alpha'}{28} = 19r\frac{3.12(s+k-v)+3a}{28}$$

$$= 19r\frac{8(s+k-v)-5r\frac{a}{4}}{28} \equiv 19.8(s+k-v) - 95r\frac{a}{4}, \text{ mod } 532$$

$$\equiv 152s + 76r\frac{2k}{7} - 95r\frac{a}{4} - 76r\frac{2v}{7}, \text{ mod } 532,$$

und $\quad 28r\frac{2\alpha''}{19} = 28r\frac{2(a''-5s)}{19} \equiv 56a'' - 280s$, mod 532

$$\equiv 28r\frac{2a''}{19} - 280s, \text{ mod } 532.$$

Daher ist das geforderte Jahr

$$(233) \qquad \alpha \equiv -100s + 76r\frac{2k}{4} - 95r\frac{a}{4} - 76r\frac{2v}{7} - 28r\frac{2a''}{19}, \text{mod} 532.$$

Sezt man zur Abkürzung

mod 532

$$(234) \qquad A^0 \equiv -100s + 76r\frac{2k}{7} \equiv -100s + 76r\frac{2(s - q\frac{s}{4} - 2)}{7}$$

$$\equiv -100s + 76r\frac{3 - 3r\frac{s}{4} - 2s}{7} \equiv 228 + 52s - 152q\frac{s}{4}$$

$$\equiv \pm 28r\frac{\pm 10s}{19} \pm 76r\frac{\pm 3\left(1 - r\frac{s}{4}\right)}{7}$$

$$(219) \qquad A \equiv -95r\frac{a}{4}$$

$$(220) \qquad A' \equiv -76r\frac{2v}{7} \equiv 76r\frac{-2v}{7}$$

$$(221) \qquad A'' \equiv -28r\frac{2a''}{19} \equiv 28r\frac{-2a''}{19},$$

so findet man

(285) $\alpha \equiv A + A^0 + A' + A''$, mod 532
$= 0, 1, \ldots 99.$

Hierin hat man

für $s = 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24,$
$A^0 = 20, -80, -28, 24, 76, -24, 28, 80, 132, 32,$

und dieselben Werthe von A, A′, A″ wie oben. (S. 304.)

Man wird nun die Werthe von A^0 und A' zu allen Werthen von A'' addiren, und jede sich ergebende Summe $A^0 + A' + A''$ mit jenem oder mit jenen zweien der vier Werthe von A vereinen, welche das Jahr $\alpha < 100$ geben. Am bequemsten wird man rechnen, wenn man die Summen $A^0 + A' + A''$ durchgängig positiv und die Werthe von A insgesammt negativ darstellt. Denn man hat dann von jeder Summe $A^0 + A' + A''$ blos den Zahlwerth einer solchen negativen Zahl A abzuziehen, welcher nicht größer als jene Summe, aber größer als diese um 100 verringerte Summe ist. Solcher Zahlwerthe von A als Vielfache von 95, können demnach höchstens zwei den Anforderungen genügen.

124.

Fortsetzung.

Dritte Auflösung. Aus dem vorher gefundenen Ausdrucke

$$\alpha \equiv 57\alpha' - 56\alpha'', \text{ mod } 532,$$

erhält man $\alpha - \alpha' \equiv 56(\alpha' - \alpha'')$, mod 532

also $\alpha - \alpha' = \pm 28 \mp \frac{\pm 2(\alpha' - \alpha'')}{19}$

und $\mp \frac{\pm 2(\alpha' - \alpha'')}{19} = \frac{\pm(\alpha - \alpha')}{28}$.

Nun kann, da α und α' unter 100 liegen, der stets positive Unterschied $\pm(\alpha - \alpha')$ auch nur kleiner als 100 ausfallen, und da er zugleich durch 28 theilbar sein soll, so kann der Quotient $\pm(\alpha - \alpha')$: 28 höchstens $= \mathfrak{E}\frac{99}{28} = 3$ werden. Bezeichnet man daher diesen Quotienten oder den ihm gleichen Rest mit ω, so hat man

$$\mp \frac{\pm 2(\alpha' - \alpha'')}{19} = \frac{\pm(\alpha - \alpha')}{28} = \omega = 0, 1, 2, 3.$$

Hieraus folgt

$$\alpha - \alpha' = \pm 28\omega$$

und $2(\alpha' - \alpha'') \equiv \pm \omega$, mod 19.

Multiplicirt man diese Congruenz, weil $-9.2 = -18 \equiv 1$, mod 19 ist, mit -9, so erhält man

$\alpha' - \alpha'' \equiv \mp 9\omega$, mod 19 also $\alpha' - \alpha'' = 19\varphi \mp 9\omega$,

und wenn man die erste und letzte Gleichung addirt

$$\alpha - \alpha'' = 19(\varphi \pm \omega).$$

Beachtet man, zur Vereinfachung der Rechnung, blos die unter 28 liegenden Werthe von α' und die unter 19 gelegenen Werthe von α'', so kann nur das obere Zeichen zu ω genommen werden, und $\alpha' - \alpha'' = -18, -17, \ldots 0, \ldots 27$ sein; mithin erhält man

für				
$\omega =$	0,	1,	2,	3,
$\varphi =$	0,	0,	0,	1,
	1,	1,	1,	2,
			2,	
$\alpha' - \alpha'' =$	0,	− 9,	− 18,	− 8
	19,	10,	1,	11
			20,	
$\alpha - \alpha' =$	0,	28,	56,	84
$\alpha - \alpha'' =$	0,	19,	38,	76
	19,	38,	57,	95.
			76,	

Hat man demnach die unter 28 liegenden vier Werthe von α' und die unter 19 gelegenen Werthe von α'', deren höchstens 5 sein können, bestimmt; so zieht man entweder jede Zahl α'' von jeder Zahl α' ab, und notirt nur dazumal den Unterschied, wenn er einer der folgenden neun allein möglichen

$$\alpha' - \alpha'' = -18, -9, -8, \mid 0, \ 1, \ 10, \mid \ 11, \ 19, \ 20$$

ist; oder man zieht jede Zahl α' von jeder Zahl α'' ab, und notirt nur dann den Unterschied, wenn er einen der neun möglichen

$$\alpha'' - \alpha' = 18, \ 9, \ 8, \mid 0, -1, -10, \mid -11, -19, -20$$

ist. Zu jedem so gefundenen Unterschiede nimmt man sofort den mit ihm bestehenden aus den Unterschieden

$$\alpha - \alpha' = 56, \ 28, \ 84, \mid 0, \ 56, \ 28, \mid \ 84, \ 0, \ 56$$

oder aus den Unterschieden

$$\alpha - \alpha'' = 38, \ 19, \ 76, \mid 0, \ 57, \ 38, \mid \ 95, \ 19, \ 76,$$

und addirt zu ihm die bei der betreffenden Subtraction abgezogene Zahl α' oder α'', um das entsprechende Jahr α zu erhalten.

Auch im julianischen Kalender lassen sich sämmtliche drei Auflösungen der Aufgabe anwenden, wenn man $\mathbf{k} = 0$, $\mathbf{M} = 15$, folglich $\mathbf{V} = 0$ und $\delta p = 0$ sezt.

Anmerkung. Die allgemeine Berechnung der Jahre, in denen eine gegebene Festzahl besteht, oder in welchen ein gewisses bewegliches Fest auf einen bestimmten Monatstag trifft, gab der Verfasser am ersten in Crelle's Journal für die Mathematik, Berlin 1828, 3. Band, Seite 342—346.

125.

Fortsetzung. Anwendungen.

1. Beispiel. Baron Zach erzählt in seiner Correspond. astr. vol. 10, p. 439, daß die Kirche des heil. Johann des Täufers zu Lyon bereits seit dem 15. Jahrhunderte das Privilegium besitze, ein besonderes Jubiläum zu feiern, wenn das Frohnleichnamsfest mit dem Geburtsfeste dieses Heiligen (24 Juni) zusammen fällt. In welchen Jahren unseres Jahrhunderts wird dieses Jubiläum Statt finden?

Das Frohnleichnamsfest fällt, nach Tafel 7 im Anhange, jederzeit auf den $v + 20$ Mai $= v - 11$ Juni, daher muß hier $v - 11 = 24$, und sonach $v = 35$ sein. Es frägt sich demnach um jene Jahre, deren lilianische Festzahl 35 ist, insbesondere wenn die Zahl ihrer Hunderte $s = 18$ ist.

In diesem Falle findet man $k = 12$, $M = 23$. Aus $v = 35 > 29$ ergibt sich $v - 28 = 7$, also für b nur der eine Werth $b = 7$; dazu wird

$$v - b = 28.$$

Ferner ist $\quad 11M - 7 \equiv 23 - 10 - 7, \text{ mod } 30 \equiv 6,$

also $\quad V = ᴛ\frac{7+6}{19} = 0$ und sonach $\delta p = 0$.

Daraus folgt $\quad p = 28 + 0 = 28.$

Wählt man, da p blos einen Werth hat, folglich die erste Auflösung weitläufiger als die beiden anderen sein muß, zunächst die zweite Auflösung; so findet man $\quad 11(M - p) \equiv 11. - 5, \text{ mod } 30 \equiv 5,$

daher $\quad a'' = 5$

und $\quad A'' \equiv + 28.9 \equiv 252, \text{ mod } 532.$

Ferner wegen $\quad v = 35 \equiv 0, \text{ mod } 7$ ist $A' \equiv 0$

und wegen $\quad s = 18 \equiv 2, \text{ mod } 4 \equiv -1, \text{ mod } 19$

ist $\quad A^0 \equiv \dot{-}\, 28.10 + 76.4, \text{ mod } 532 \equiv -280 + 304 \equiv 24;$

daher $\quad A^0 + A' + A'' = 24 + 0 + 252 = 276.$

Dazu kommt noch $\quad A \equiv -95 ᴛ \frac{a}{4} \equiv 0, -95, -190, -285,$

folglich $\quad \alpha = 276 - 190 = 86$

und $\quad a = 1886.$

Nach der dritten Auflösung ist $v = 35 \equiv 0, \text{ mod } 7$, $s = 18 \equiv 2$, mod 4, also

$$\alpha' \equiv 4.6 + \mathfrak{a} \equiv 24 + \mathfrak{a}, \text{ mod } 28$$

$$\mathfrak{a} \equiv -11 ᴛ \frac{a}{4} \equiv 0, -11, -22, -5$$

$$\alpha' = 24, 13, 2, 19,$$

Andrerseits ist $\quad M - p = 23 - 28 = -5$

$$11(M - p) \equiv 10 - 5, \text{ mod } 30 \equiv 5$$

$$a'' = 5$$

$$5s = 90 \equiv -5, \text{ mod } 19$$

$$\alpha'' \equiv 5 + 5 \equiv 10, \text{ mod } 19.$$

Daraus folgt $\quad \alpha' - \alpha'' = 14,\ 3,\ -8,\ 9$

also blos brauchbar $\quad \alpha' - \alpha'' = -8.$

Dazu gehört $\quad \alpha - \alpha' = 84$ und $\alpha - \alpha'' = 76,$

addirt man $\quad \alpha' = 2, \qquad \alpha'' = 10,$

so findet man jeden Falls $\quad \alpha = 86 \quad$ und $\quad a = 1886.$

Im laufenden Jahrhunderte hat demnach blos das Jahr 1886 die größte mögliche Festzahl 35. Dehnt man die Rechnung weiter aus, so findet man die gregorianische Festzahl 35 in folgenden Jahren:

1666, 1734, 1886, 1943, 2038, 2190, 2258, 2326, 2410, 2573, 2630, 2782, 2877, 2945, 3002, 3097, 3154, 3249, 3306, 3469, 3537, 3621, 3784*, 3841, 3993, 4088*, 4156*, 4224*, 4376*, 4528*, 4680*, 4748*, 4900, u. s. w.

2. Beispiel. Nach derselben Correspondance astron. vol. 10, p. 447, feiert man in der Kathedralkirche zu Le Puy, der Hauptstadt in dem französischen Departement der oberen Loire, ein Jubiläum, so oft der Charfreitag auf das Fest Mariä Verkündigung (25 März) fällt. In welchen Jahren des laufenden Jahrhunderts tritt dieses Jubiläum ein?

Der Charfreitag fällt, vermöge Tafel 7 im Anhange, allgemein auf den $v + 19$ März $= v - 12$ April; daher muß hier $v + 19 = 25$, und die Festzahl $v = 6$ sein.

Dann ist $\quad b = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,$

$$v - b = 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,$$

$$\delta p = 0,$$

$$p = 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0.$$

Ferner findet man für $s = 18$ die Zahlen $k = 12 \equiv -2$, mod 7 und $M = 23$. Bedient man sich der ersten Auflösung, so erhält man

$$\alpha' \equiv 4\,\mathrm{r}\frac{3(4-2-6)}{7} + \mathfrak{a} \equiv 4.2 + \mathfrak{a}, \text{ mod } 28 \equiv 8 + \mathfrak{a}$$

$$\mathfrak{a} \equiv -11\,\mathrm{r}\frac{a}{4} \equiv 0,\ 17,\ 6,\ -5$$

$$\alpha' \equiv 8,\ 25,\ 14,\ 3, \text{ mod } 28, \text{ folglich}$$

$\alpha' =$	3	8	14	25	31	36	42	53	59	64	70	81	87	92	98
mod 19															
$\alpha' \equiv$	3	8	−5	6	−7	−2	4	−4	2	7	−6	5	−8	−3	3
$5s =$	$90 \equiv -5 \equiv 14$														
$\beta \equiv$	17	3	9	1	7	12	18	10	16	2	8	0	6	11	17

mod 30															
$-11s \equiv$	-7	-3	-9	-11	-17	-12	12	10	4	8	2	0	-6	-1	-7
$M \equiv$	$23 \equiv -7$														
$p' \equiv$	.	.	.	.	.	.	5	3	.	1	.	.	.	.	.

daher $\alpha = 42, 53, 64$ und $a = 1842, 1853, 1864$.

Im laufenden Jahrhunderte wird demnach das angeführte Jubiläum nur in den Jahren 1842, 1853, 1864*, gehalten.

Dehnt man die Rechnung weiter aus, so findet man seit der Kalenderverbesserung die Festzahl 6, folglich den Charfreitag am 25 März, in den Jahren 1622, 1633, 1644*; 1701, 1712, 1785, 1796*; 1842, 1853, 1864*; 1910, 1921, 1932*; . . .

3. Beispiel. Es wurde (§. 106 und 107) gezeigt, daß, so oft $p = 29$, $\delta p = 1$ und $L = 4$, also $b = 1$ ist, man statt $v = 36$ immer $v = 29$ erhalte. Seien nun die Jahre zu suchen, in denen dies eintritt.

Diese Ausnahme erheischt das Zusammentreffen gewisser Werthe von M oder s mit bestimmten Werthen von $r\frac{a}{19} = a''$. Wählen wir, vermöge §. 107 und 103, hier nur die nach der Kalenderverbesserung zunächst bestehenden $M = 22, 24, 25, 27$; und wenden wir die dritte Auflösung an, so erhalten wir folgende Rechnung:

$s =$	15	16	19	20	21	22	24	26	27	28
$M =$	22	22	24	24	24	25	25	27	27	27
$a'' = r\frac{a}{19} =$	13	13	5	5	5	16	16	8	8	8
mod 19										
$-5s \equiv$	1	-4	0	-5	9	-15	-6	3	-2	-7
$\alpha'' \equiv$	14	9	5	0	14	1	10	11	6	1

$$v = 29 \equiv 1, \text{ mod } 7,\ 1 - 3v \equiv -2 \equiv 5, \text{ mod } 7$$

$r\frac{s}{4} =$	3	0	3	0	1	2	0	2	3	0
$\alpha' =$	8	20	8	20	16	12	20	12	8	20
	25	9	25	9	5	1	9	1	25	9
	14	26	14	26	22	18	26	18	14	26
	3	15	3	15	11	7	15	7	3	15
$\alpha' - \alpha'' =$	.	11	.	20	.	11	10	1	.	19
	11	0	20	.	-9	0	.	.	19	.
	0	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\alpha - \alpha'' =$	95	95	76	76	19	95	38	57	19	19
	0	0				0				
$\alpha =$	.	.	81	76	33	96	48	68	25	20
		9				1				

$a = 1609, 1981, 2076^*, 2133, 2201, 2296^*, 2448^*, 2668, 2725, 2820^*,$

4. Beispiel. Eben so kann man nach jenen Jahren fragen, in denen (vermöge §. 106 und 107) $p = 28$, $\delta p = 1$ und $L = 8$, also $b = 1$ und daher $v = 28$ statt 35 ist. Wählt man von denjenigen Werthen von M, welche hier bedungen werden, die, welche nach der Kalenderverbesserung zunächst an die Reihe kommen, nemlich $M = 24, 29, 2$, und dazu die zweite Auflösung, so ergibt sich folgende Rechnung:

$s =$	19	20	21	31	32	33	38	39	40
$M =$	24	24	24	29	29	29	2	2	2
$a'' = r\frac{a}{19} =$	16	16	16	11	11	11	14	14	14
mod 532									
$A'' \equiv$	168	$\equiv -$	364	448	$\equiv -$	84	280	$\equiv -$	252
$v = 28 \equiv 0$, mod 7				$A' = 0$					
mod 19									
$10s \equiv$	0	10	1	6	16	7	0	10	1
$r\frac{s}{4} =$	3	0	1	3	0	1	2	3	0
mod 532									
$A^0 \equiv$	0	280	28	168	448	196	0	280	28
	$+76$	-304	$+0$	76	-304	0	304	76	-304
$\equiv$	76	-24	28	244	144	196	304	356	-276
$A^0 + A' + A'' \equiv$	244	144	196	160	60	112	52	104	4
$-A \equiv 0,$	95,	190,	285						
$-A \equiv$	190	95	190	95	0	95	0	95	0
$\alpha \equiv$	54	49	6	65	60	17	52	9	4

$a = 1954, 2049, 2106, 3165, 3260^*, 3317, 3852^*, 3909, 4004^*$.

126.

Berechnung derjenigen Jahre, in denen die julianischen und gregorianischen Ostern auf einerlei Tag zusammen treffen.

So sehr auch die alexandrinische Osterrechnung nach dem julianischen Kalender von dem Himmel abweicht, mit dem die lilianische oder gregorianische Osterrechnung sehr genau übereinstimmt; so ereignet es sich doch noch immer sehr oft, daß beiderlei Ostern, jene julianischen und diese gregorianischen, auf den nemlichen Tag eintreffen. Die Berechnung solcher Jahre, in denen dies sich ereignet, wurde bisher noch von niemanden versucht, und soll daher wegen ihrer anziehenden Eigenthümlichkeiten hier zum ersten Male gelehrt werden.

Die gregorianischen Ostern treffen auf den $v + 21$ März neuen St. und die julianischen — wenn gleichnamige Größen in beiden Kalendern mit demselben Buchstaben bezeichnet, aber im julianischen durch den angehängten Zeiger 0

unterschieden werden — auf den $v_0 + 21$ März alten St. $= v_0 + 21 + k$ März neuen St. Damit sie zusammen treffen, muß demnach

$$v + 21 = v_0 + 21 + k$$

und

$$(236) \qquad v = v_0 + k, \quad v_0 = v - k \text{ sein.}$$

Da nun v und v_0 von 1 bis 35 sich erstrecken und k von 10 an mit den Jahrhunderten s beliebig weit wächst, so muß wenigstens so lange

$$v = k+1, \quad k+2, \; . \; . \; . \; . \; . \; 35$$

und

$$v_0 = 1, \quad 2, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 35 - k$$

sein, als noch nicht $k + 1 \overline{\gtrless} 36$, folglich $k \overline{\gtrless} 35$ wird. Es wird aber, vermöge §. 47, (63), $k = 35$, wenn $s = 35 + 11 + 3 = 49$ ist; mithin kann ein solches Zusammentreffen beider Ostern blos so lange $s < 49$, also höchstens bis unmittelbar vor das 49. Säcularjahr oder vor 4900, Statt finden. Dieser Zeitraum wird jedoch durch die ferneren Untersuchungen noch bedeutend verkürzt werden.

Ein Jahr α im $s + 1^{ten}$ Jahrhunderte von dieser Eigenschaft wird einerseits im gregorianischen Kalender, vermöge §. 123, (233), durch

$$\alpha \equiv -100s - 152(v-k) - 95\,r\frac{s}{4} - 56a'', \text{ mod } 532$$

und andrerseits im julianischen Kalender, wo $k = 0$ ist und v, a'' mit v_0, a_0'' zu vertauschen ist, durch

$$\alpha \equiv -100s - 152v_0 - 95\,r\frac{s}{4} - 56a_0'', \text{ mod } 532$$

ausgedrückt. Verbindet man damit die obige Gleichung

$$v_0 = v - k,$$

so unterscheiden sich beide Congruenzen blos in den lezten Gliedern $56a''$ und $56a_0''$; und können daher mit einander zugleich nur dann bestehen, wenn $56a'' \equiv 56a_0''$, mod 532, oder $2a'' \equiv 2a_0''$, mod 19, oder $a'' \equiv a_0''$, mod 19, folglich weil a'' und a_0'' positiv und unter 19 sind, wenn $a'' = a_0''$ ist.

Nun fand man aber im gregorianischen Kalender (§. 123)

$$(231) \qquad a'' = r\frac{11(M-p)}{30} < 19,$$

folglich ist im julianischen Kalender, wenn M, a'', p in 15, a_0'', p_0 verwandelt werden,

$$a_0'' = r\frac{11(15-p_0)}{30} < 19,$$

daher, wegen $a'' = a_0''$,

$$r\frac{11(M-p)}{30} = r\frac{11(15-p_0)}{30} = a'' = 0, \; 1, \; . \; . \; . \; 18 < 19.$$

Hieraus folgt $11(M-p) \equiv 11(15-p_0) \equiv a''$, mod 30 und wenn, weil $11.11 = 121 \equiv 1$, mod 30 ist, mit 11 multiplicirt wird,

$$M - p \equiv 15 - p_0 \equiv 11a'', \text{ mod } 30;$$

daher für die 19 Werthe von $a'' = 0, 1, 2, \ldots 18$ im gregorianischen Kalender während des $s+1^{ten}$ Jahrhunderts

$$(190) \qquad p = r\frac{M - 11a''}{30}$$

und im julianischen Kalender zu allen Zeiten

$$(156) \qquad p_0 = r\frac{15 - 11a''}{30};$$

insbesondere

für $a'' = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,$
ist $p_0 = 15, 4, 23, 12, 1, 20, 9, 28, 17, 6, 25, 14, 3, 22, 11, 0, 19, 8, 27.$

Zugleich besteht zwischen den zu dem nemlichen Reste a'' oder zu demselben Jahre a gehörigen Abständen p und p_0 die Beziehung

$$M - p \equiv 15 - p_0, \text{ mod } 30,$$

und daraus findet sich zu jedem p_0 das gleichzeitige

$$p \equiv M - 15 + p_0, \text{ mod } 30 = r\frac{M - 15 + p_0}{30}.$$

Im gregorianischen Kalender ist ferner die Festzahl

$$(204) \qquad v = p - \delta p + b$$

und im julianischen, wo man immer $\delta p = 0$ hat,

$$v_0 = p_0 + b_0;$$

daher, wenn man abzieht, und erwägt, daß

$$(236) \qquad v = v_0 + k$$

ist,
$$k = p - p_0 + b - b_0 - \delta p.$$

Addirt man hiezu die Congruenzen

$$15 - p_0 \equiv M - p, \text{ mod } 30$$

und

$$(189) \qquad M \equiv k - K + 12, \text{ mod } 30;$$

so erscheint
$$3 \equiv -K + b - b_0 - \delta p, \text{ mod } 30,$$

daher
$$K + 3 \equiv b - b_0 - \delta p, \text{ mod } 30$$

und
$$K \equiv b - b_0 - \delta p - 3, \text{ mod } 30.$$

Nun ist
$$b = 1, 2, \ldots 7$$
$$b_0 = 1, 2, \ldots 7$$
$$\delta p = 0, 1;$$

daher
$$b - b_0 - \delta p = -7, -6, \ldots\ldots 0, 1, \ldots 6$$

und
$$K \equiv -10, -9, \ldots -1, 0, 1, 2, 3, \text{ mod } 30.$$

Erwägt man aber, daß nach §. 102, (186) die Mondgleichung

$$K = q\frac{8(s - 14)}{25},$$

weil blos $s \overline{\overline{>}} 15$ sein kann, jederzeit positiv ausfällt; so könnte nur

$$K = 0, 1, 2, 3; \; 20, 21, \ldots 33; \; 50, 51, \ldots 63; \text{ u.s.f. sein.}$$

Nun gibt jedoch obiger Ausdruck von K,

$$8(s-14)=25K+r\frac{8(s-14)}{25}$$

$$=25K,\ 25K+1,\ \ldots\ 25K+24,$$

also

$$s-14=Q\frac{25K}{8}+1,\ldots\ldots q\frac{25K+24}{8}$$

und sonach die Jahrhunderte

$$(237)\qquad s=3K+Q\frac{K}{8}+15,\ldots\ldots,3K+q\frac{K}{8}+17,\geqq 15,$$

zu denen eine bestimmte Mondgleichung K gehört.

Allein nach dem gleich am Eingange der gegenwärtigen Untersuchung Gefundenen muß $s \leqq 48$ sein, und für das höchste zulässige Jahrhundert $s=48$ findet sich $K=q\frac{8\cdot 34}{25}=q\frac{272}{25}=10$. Da nun s und K gleichzeitig wachsen, so kann hiernach blos $K\leqq 10$ sein. Verknüpft man mit dieser Einschränkung der Werthe von K noch die unmittelbar vorher gefundene, so kann lediglich

$$(238)\qquad K=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

nimmermehr aber $K\geqq 20$ sein. Denn schon für $K=20$ ergäbe sich das früheste Jahrhundert $s=60+Q\frac{20}{8}+15=77$, also wirklich >48, und wäre somit nicht mehr zulässig.

Zu den möglichen Werthen von K finden sich jezt leicht jene von s, namentlich

für $K=$ 0, 1, 2, 3,
ist $s=$ 15, 16, 17; 18, 19, 20; 21, 22, 23; 24, 25, 26.

Mithin kann ein Zusammentreffen der julianischen und gregorianischen Ostern seit der Kalenderverbesserung, 1582, nur noch bis zum Jahre 2699 Statt finden.

In diesem Bereiche hat man für die Congruenz

$$(189)\qquad M\equiv k-K+12,\ \text{mod}\ 30$$

den Kalender-Unterschied $k=10,\ 11,\ \ldots\ 18,$
daher $k-K+12=19,\ 20,\ \ldots\ldots\ 30;$
und da immer $M=1,\ 2,\ \ldots\ 30$ ist; so wird diese Congruenz (189) hier auf die Gleichung

$$(239)\qquad M=k-K+12$$

beschränkt.

Desgleichen ist in der Congruenz

$$b-b_0-\delta p\equiv K+3,\ \text{mod}\ 30$$

einerseits $b-b_0-\delta p=-7,\ -6,\ \ldots\ 0,\ 1,\ \ldots\ 6$
und andrerseits $K+3=3,\ 4,\ 5,\ 6;$
mithin kann diese Congruenz blos als Gleichung

$$(240)\qquad b-b_0-\delta p=K+3=3,\ 4,\ 5,\ 6\ \text{bestehen.}$$

Hieraus folgt $\quad b = b_0 + \delta p + (K + 3)$ u. $b_0 = b - \delta p - (K + 3)$.
Verbindet man damit die Bemerkung, daß

$$b \text{ und } b_0 = 1, \; 2, \; . \; . \; 7, \text{ so wie } \delta p = 0, 1$$

ist; so findet man

$$b = 1 + (K + 3), \; . \; . \; . \; . \; . \; 7 = 4 + K, \; . \; . \; . \; . \; 7$$

$$b_0 = 1, \; 2, \; . \; . \; . \; . \; 7 - (K + 3) = 1, \; 2, \; . \; . \; . \; 4 - K.$$

Nimmt man dazu die oben gefundenen Grenzbestimmungen

$$v = k + 1, \; k + 2, \; . \; . \; . \; . \; 35$$

$$v_0 = 1, \quad 2, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 35 - k$$

und die (S. 270) p und $p - \delta p = 0, 1, \ldots 28$; so findet man

$$v - b = p - \delta p = k - 6, \; k - 5, \; . \; . \; . \; . \; 28$$

$$v_0 - b_0 = p_0 \quad = 0, \quad 1, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 34 - k.$$

Für den Zeitraum, in welchem ein Zusammentreffen von beiderlei Ostern möglich ist, findet man insbesondere folgende zusammen gehörige Werthe:

$s =$ 15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$k =$ 10	10	11	12	13	13	14	15	16	16	17	18
$K =$ 0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3
$M =$ 22	22	23	23	24	24	24	25	26	25	26	27
max. $v_0 =$ 25	25	24	23	22	22	21	20	19	19	18	17
max. $b_0 =$ 4	4	4	3	3	3	2	2	2	1	1	1
max. $p_0 =$ 24	24	23	22	21	21	20	19	18	18	17	16
min. $v =$ 11	11	12	13	14	14	15	16	17	17	18	19
min. $b =$ 4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7
max. $\delta p =$ 1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1
min. $p - \delta p =$ 4	4	5	6	7	7	8	9	10	10	11	12.

Um nun in einem bestimmten Jahrhunderte, dem $s + 1^{\text{ten}}$, alle jene Jahre $a = s100 + \alpha$ zu berechnen, in denen die julianischen und gregorianischen Ostern zusammen treffen, vorausgesezt, daß s eine der Zahlen 15, 16, . . . 26 ist, wird man zuvörderst nach §. 47 und 102

$$k = s - \mathfrak{E}\frac{s}{4} - 2, \quad K = \mathfrak{E}\frac{s - \mathfrak{E}\frac{s - 17}{25}}{3} - 5$$

bestimmen. Hierauf nimmt man für p_0 alle seine möglichen Werthe, nemlich aus den Zahlen

$$0, \; 1, \; 2, \; . \; . \; . \; . \; . \; 34 - k,$$

diejenigen, welche den verschiedenen Resten $a'' = 0, 1, \ldots 18$ angehören, namentlich

	$p_0 =$	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	15	17	19	20	22	23	25	27	28
mit	$a'' =$	15	4	12	1	9	17	6	14	3	11	0	8	16	5	13	2	10	18	7.

Zu jedem annehmbaren Werthe von p_0 gesellt man diejenigen von

$$b_0 = 1, 2, \dots . 4 - K,$$

welche die Festzahl

$$p_0 + b_0 = v_0 = 1, 2, \dots . 35 - k$$

liefern, und berechnet aus dem mit p_0 zusammen hängenden Reste $a_0'' = a''$ und aus den gefundenen angehörigen julianischen Festzahlen v_0, diejenigen Jahre α im $s+1^{\text{ten}}$ Jahrhunderte, denen sie zukommen, nach einem der im vorigen Artikel gewiesenen Verfahren, vielleicht am bequemsten nach der zweiten Auflösungsweise.

Will man den Lauf der Berechnung der fraglichen Jahre abändern, so kann man zu k und K auch noch

$$M = k - K + 12$$

berechnen, und für p zuvörderst diejenigen aus den Zahlen

$$k - 6, k - 5, \dots .. 29$$

auswählen, welche $a'' = \mathfrak{R}\frac{11(M-p)}{30} < 19$ liefern,

oder die aus $p = \mathfrak{R}\frac{M - 11a''}{30}$

für $a'' = 0, 1, 2, \dots 18$ entstehen. Dann hat man (vermöge §. 103)

$$(200) \qquad \delta p = UV = \mathfrak{Q}\frac{p}{28}\ \mathfrak{Q}\frac{7 + \mathfrak{R}\frac{-11(M+1)}{30}}{19},$$

und sofort sämmtliche möglichen Werthe von

$$p - \delta p = k - 6,\ k - 5, \dots . 28.$$

Mit jedem derselben verbindet man die Werthe

$$b = 4 + K, \dots 7,$$

so daß man die gregorianischen Festzahlen

$$p - \delta p + b = v = k + 1,\ k + 2, \dots 35$$

erhält, die mit ihnen vereint sein können, und aus denen sich gleichfalls die geforderten Jahre berechnen lassen.

Beispiel. Wenden wir die Rechnung auf das laufende Jahrhundert an, wo $s = 18$, $k = 12$, $K = 1$, $M = 23$, $\delta p = 0$ ist, so wird $34 - k = 22$, daher hat man

$p_0 =$	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	15	17	19	20	22
$a'' =$	15	4	12	1	9	17	6	14	3	11	0	8	16	5	13
$p =$	8	9	11	12	14	16	17	19	20	22	23	25	27	28	0.

Addirt man zu jedem Werthe von p_0 jeden der Werthe von $b_0 = 1, 2, 3$, so finden sich die julianischen Festzahlen

$v_0 =$	1	2	4	5	7	9 u. s. f.
	2	3	5	6	8	10 . . .
	3	4	6	7	9	11 . . .

Zu den Resten a'' gehören

mod 532

$A'' \equiv 224 \quad 308 \quad 392 \quad 476 \quad 28 \quad 112, \ldots$

dann zu $s = 18$ und $k = 0$ die Zahl $A^0 \equiv -1800 \equiv -204 \equiv 328$, also ist

$A^0 + A'' \equiv 20 \quad 104 \quad 188 \quad 272 \quad 356 \quad 440. \ldots$

Obige Werthe von v_0 geben

$A' \equiv$	380	228	−76	−228	0	−304	...
	228	76	304	152	−152	76	..
	76	−76	152	0	−304	−76	...
daher $A^0 + A' + A'' \equiv$	400	332	112	44	356	136	...
	248	180	492	414	204	516	...
	96	28	340	272	52	364	...
$-A \equiv$	.	285	95	0	285	95	...
	190	95	.	.	190	0	...
	95, 0	0	285	190	0	285	...
$\alpha =$	.	47	17	44	71	41	...
	58	85	.	.	14	.	...
	1, 96	28	55	82	52	79	...

Führt man die Rechnung vollständig aus, so findet man die julianischen und gregorianischen Ostern in 34 Jahren des gegenwärtigen Jahrhunderts zusammen treffen; von ihnen sind die nächst folgenden zwölf:

	1844	47	48	51	52	55	58	59	62	65	68	71
mit $v_0 =$	5	2	21	18	9	6	2	22	18	14	10	7
und $v =$	17	14	33	30	21	18	14	34	30	26	22	19.

Im 16. Jahrhunderte trafen beide Ostern in den 6 Jahren 1583, 85, 88, 91, 94, 97 zusammen, und im 27sten und letzten Jahrhunderte, wo dies möglich ist, werden sie in den 11 Jahren 2603, 17, 23, 37, 44, 47, 64, 71, 88, 91, 98, also zum letzten Male im Jahre 2698 am 24 April n. St., übereinkommen.

Dritter Abschnitt.

Zeitrechnung der Aegypter.

Erstes Hauptstück.

Zeitrechnung der alten Aegypter.

127.

Der Tag.

Wann die Aegypter ihren Tag anfingen, läßt sich zwar nicht ganz sicher ermitteln, doch hat die Angabe des Plinius, sie hätten ihn so wie die Römer mit der Mitternacht angefangen, die höchste Wahrscheinlichkeit. Ptolomäus, der in Alexandria, der Hauptstadt Aegyptens, astronomische Beobachtungen anstellte, fängt in seinem Almagest den Tag mit dem Mittage an, was jedoch keineswegs Landessitte war. In Alexandria selbst scheint man, wie sich aus dem Almagest und aus der Astrologie eines anderen Alexandriners, Paulus, entnehmen läßt, den bürgerlichen Tag mit dem natürlichen, also bei Sonnenaufgang angefangen zu haben. Bei unseren Vergleichungen der ägyptischen Tage mit anderen, werden wir den Tag mit derjenigen Mitternacht anfangen lassen, welche seinem alexandrinischen Anfange am Morgen oder Mittage unmittelbar vorhergeht.

Die alterthümliche Eintheilung des Tages und der Nacht in 12 Stunden scheint auch in Aegypten üblich gewesen zu sein.

128.

Die Woche.

Auch die siebentägige Woche scheint den Aegyptern frühzeitig bekannt gewesen zu sein. Doch ist es auffallend, daß erst der römische Schriftsteller Dio Cassius, welcher von 229 bis 251 nach Chr. schrieb, von einem siebentägigen Zeitkreise bei den Aegyptern spricht, jedoch auf eine Weise, die blos den astrologischen Gebrauch desselben voraussezen läßt. Er schreibt nemlich, was später Paulus Alexandrinus in seiner Einleitung zur Astrologie (378 n. Chr.) bestätigt, den ägyptischen Astrologen die Gewohnheit zu, die Stunden und Tage unter den Einfluß der Planeten zu stellen. Zu diesem

Zwecke zählten sie die sieben Planeten nach der ptolomäischen Weltordnung von oben herab, nemlich

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Saturn,	Jupiter,	Mars,	Sonne,	Venus,	Merkur,	Mond;

und wiesen ihnen die Stunden des Tages und der Nacht von der ersten (Tagesstunde) ausgehend an, namentlich die erste dem Saturn, die zweite dem Jupiter u. s. f. nach der hier angegebenen Ordnung, und dann immer wieder von vorn anfangend.

Die h^{te} Stunde des d^{ten} Tages, als die $(d-1)\,24+h^{te}$ Stunde in der fortlaufenden Zählung, kam demnach vermöge Vorbegriffe **XVIII** (77) und (81) unter das Regiment des Planeten

$$p \equiv (d-1)\,24+h, \text{ mod } 7 = 1, 2, .. 7$$

oder

$$(241) \qquad p = \mathfrak{R}\frac{3(d-1)+h}{7};$$

und insbesondere die erste Stunde, für $h = 1$, unter die Herrschaft des Planeten

$$(242) \qquad p = \mathfrak{R}\frac{3d-2}{7},$$

also am	d = 1,	2,	3,	4,	5,	6,	7ten Tage
unter den Planeten							
	p = 1,	4,	7,	3,	6,	2,	5,
d. i. unter	Saturn,	Sonne,	Mond,	Mars,	Merkur,	Jupiter,	Venus.

Nach diesem Regenten der ersten Stunde benannte man nun jeden Tag (§. 46); allein die durch die Astrologie eingeführte Benennung der Tage nach den sieben Planeten hatte noch keineswegs den Gebrauch der Woche im bürgerlichen Leben zur Folge. Es gibt durchaus keine sichere Spur, daß ein solcher bereits vor Erhebung des Christenthums zur Staatsreligion unter Constantin (312 n. Chr.) irgendwo außer Judäa im römischen Reiche bestanden hat.

129.

Das Jahr.

Die Aegypter hatten sehr früh ein *bewegliches Sonnenjahr* von 365 Tagen, das aus zwölf 30tägigen Monaten und 5 Ergänzungstagen bestand. Obschon sie den vernachlässigten Vierteltag frühzeitig gekannt haben, brachten sie ihn doch nicht durch eine Einschaltung nach unserer Weise ein, sondern machten im Gegentheil die Wandelbarkeit des Jahres zu einer Religionsangelegenheit, damit die Opfer nicht immer zu derselben Zeit im Jahre den Göttern dargebracht werden, sondern alle Jahrszeiten durchwandern mögen.

Die Namen der ägyptischen Monate, mit Bemerkung der Anzahl der am Ende eines jeden verflossenen Tage und der wie vielte Tag im Jahre der nullte Tag jedes Monates ist, sind folgende:

	Monat	Tage	Tagsumme	Nullter Monatstag
1)	Thot	30	30	0
2)	Phaophi	30	60	30
3)	Athyr	30	90	60
4)	Chŏak	30	120	90
5)	Tybi	30	150	120
6)	Mechir	30	180	150
7)	Phamenoth	30	210	180
8)	Pharmuthi	30	240	210
9)	Pachon	30	270	240
10)	Payni	30	300	270
11)	Epiphi	30	330	300
12)	Mesori	30	360	330
13)	Ergänzungstage	5	365	360.

130.

Vergleichung der Monats- und Jahrstage.

Nimmt man die 5 Ergänzungstage wie einen 13ten, jedoch nur 5tägigen Monat in Rechnung, so ist der

t^{te} Tag im m^{ten} Monate der $d = 30(m-1) + t^{te}$ Tag im Jahre,

und umgekehrt fällt der

d^{te} Tag des Jahres in den Monat $m = Q\frac{d}{30} + 1$

auf den Tag $t = R\frac{d}{30}$.

Z. B. Der 17 Pachon, d. i. der 17. Tag des 9. Monates, ist der $(9-1)$ $30 + 17 = 257^{ste}$ Tag des Jahres. Der 363. Tag fällt in den $Q\frac{363}{30} + 1$ $= 13^{ten}$ Monat, d. i. in die Ergänzungstage, und ist der $R\frac{363}{30} = 3^{te}$ Ergänzungstag.

131.

Jahrrechnung.

1) Regentenjahre. Im bürgerlichen Leben zählten die Aegypter ihre Jahre nicht in Einem fortlaufend nach einer gewissen Aere, sondern nach der im ganzen Alterthume üblichen Weise von einem Regierungsantritte eines Königs zum anderen; und zwar rechneten sie die Jahre ihrer Herrscher nicht

von dem Tage, an welchem sie zur Regierung kamen, sondern von dem ihrer Proclamation vorhergegangenen 1 Thoth, sollte sie auch erst gegen Ende des ägyptischen Jahres erfolgt sein.

2) Nabonassarische Aere. Ptolomäus wählte für seinen Almagest*) die nabonassarische Aere, welche mit dem Regierungsantritte des babylonischen Königs Nabonassar anfängt und von den astronomischen Beobachtungen der Chaldäer, welche Ptolomäus benützte, unzertrennlich war. Ihre Epoche oder der 1 Thoth des Jahres 1 des Nabonassar wird von den Chronologen einstimmig auf den 26 Febr. 747 vor Chr. gesezt.

Die nabonassarische Aere beginnt demnach an einem Mittwoch und

später	als	die	byzantinische Weltäre	um	1739133	Tage
»	»	»	julianische Periode	»	1448638	»
früher	»	»	Aere der julianischen Kalenderverbesserung	»	256349	»
»	»	»	Aere d. röm. Kaiser	»	262924	»
»	»	»	christliche Aere	»	272786	»

3) Philippische Aere. Außer den Jahren seit Nabonassar finden sich im Almagest auch Jahre seit Alexanders Tode in Verbindung mit ägyptischen Monaten. Die Chronologen nennen diese Jahrreihe die Aere des Philippus, nemlich des Philippus Aridäus, des Stiefbruders und so genannten Nachfolgers Alexanders. Sie fängt gerade 424 ägyptische Jahre später als die nabonassarische an, von der sie nur eine Fortsezung ist. Ihre Epoche ist daher der 1 Thoth des 425. Jahres seit Nabonassar oder der 12 November 324 vor Chr.; und sonach gelten die Reductionsgleichungen

$$\text{Nabonassarisches Jahr} = \text{Philippisches Jahr} + 424$$
$$\text{Philippisches Jahr} = \text{Nabonassarisches Jahr} - 424.$$

132.

Ausführliche Betrachtung der nabonassarischen Aere.

I. In der nabonassarischen Aere ist die unveränderliche Länge des Jahres $l = 365$, daher die Zahl der einzuschaltenden Tage $\Delta l = 0$, und somit ist, vermöge §. 26, (10) der d^{te} Tag des a^{ten} Jahres seit Nabonassar in dieser Aere selbst der Tag

$$(243) \qquad n = 365(a-1) + d$$

und der t^{te} Tag des m^{ten} Monates der Tag der Aere

$$(244) \qquad n = 365(a-1) + 30(m-1) + t.$$

---

*) *Μεγάλη συντάξις*. Paris, 1813.

Umgekehrt sind bis zum n^{ten} Tage der nabonassarischen Aere verflossen

$$a-1=\mathfrak{Q}\frac{n}{365} \text{ Jahre,}$$

und dieser Tag ist im Jahre $a=\mathfrak{Q}\frac{n}{365}+1$

der Tag $\qquad d=\mathfrak{R}\frac{n}{365}$.

Verlangt man den **Wochentag** h dieses Tages, so beachtet man, daß die Aere mit einem Mittwoch anfängt, also hat man in §. 30, (37) $N=1$, $H=\text{Mittwoch}=4$ zu sezen, und sofort ist

$$h\equiv n+3, \bmod 7, \tag{245}$$

oder, weil $\qquad n\equiv a-1+d$ ist,

$$h\equiv a+d+2, \bmod 7, \tag{246}$$

oder auch, da $\qquad d\equiv 2(m-1)+t$,

$$h\equiv a+2m+t, \bmod 7. \tag{247}$$

133.

Fortsezung.

II. Zurückführung eines Datums der nabonassarischen Aere auf die christliche.

Sei der Tag d des Jahres a seit Nabonassar angegeben, so ist er in dieser Aere der Tag

$$n=365(a-1)+d. \tag{243}$$

Die nabonassarische Aere fängt um $g=1739133$ und die christliche um $g'=2011919$ Tage später als die byzantinische Weltäre an; daher ist der angegebene Tag in der christlichen Aere der Tag

$$n'=n+g-g'=n-272786$$
$$=365(a-748)+d-131.$$

Soll er der Tag d' im Jahre a' nach Chr. sein, so ist vermöge §. 56, (91)

das Jahr $\qquad a'=\mathfrak{Q}\frac{4n'}{1461}+1$

und sein Tag $\qquad d'=\left(\mathfrak{R}\frac{4n'}{1461}+\mathfrak{r}\frac{\mathfrak{Q}\frac{4n'}{1461}}{4}\right):4$

oder wenn man abkürzend

$$4(d+56)-a=c \text{ sezt,} \tag{248}$$

$$a'=a-747+\mathfrak{Q}\frac{c}{1461} \tag{249}$$

$$d'=\left(\mathfrak{R}\frac{c}{1461}+\mathfrak{r}\frac{a'-1}{4}\right):4.$$

Einfacher rechnet man a' und d' vermöge §. 56, (90) aus

$$a'=\mathfrak{Q}\frac{n'}{365}+1-\Delta a$$

$$d'=\mathfrak{R}\frac{n'}{365}-\mathfrak{q}\frac{a'-1}{4}+365\Delta a,$$

nemlich aus

$$a' = a - 747 - \Delta a \qquad (250)$$
$$d' = d + 56 - q\frac{a-\Delta a}{4} + 365\Delta a.$$

Man wählt nemlich vorerst in der lezten Gleichung Δa dergestalt, daß d' weder negativ noch größer als 366 ausfällt, was in den meisten Fällen eine ganz einfache Ueberlegung an die Hand gibt. Dann berechnet man leicht a' und d' aus beiden Gleichungen (250).

Endlich findet man vermöge §. 33, (51), wenn man $\Lambda = 365$, $\Lambda' = 365\frac{1}{4}$, $g - g' = -272786$ sezt, den Abstand des angegebenen Tages von der Epoche der christlichen Aere in mittleren julianischen Jahren von $365\frac{1}{4}$ Tagen

$$m' = 0{\cdot}99931554a + 0{\cdot}0027378d - 747{\cdot}8494$$

Dabei betragen

Tage	mittlere jul. Jahre
1	0·002738
2	0·005476
3	0·008214
4	0·010951
5	0·013689
6	0·016427
7	0·019165
8	0·021903
9	0·024641.

1. Beispiel. Ptolomäus führt in seinem Almagest*) die älteste von den Chaldäern beobachtete Mondfinsterniß an, die auf uns gekommen ist. Sie ereignete sich am Abende des 29 Thoth im 27. Jahre seit Nabonassar, war zu Babylon total, und ihr Mittel trat hier um $2\frac{1}{2}$ Stunden vor der Mitternacht ein. An welchem Tage unserer Aere?

Hier ist $a = 27$, $d = 29$ Thoth $= 29$, daher $h \equiv -1 + 1 + 2$, mod $7 \equiv 2$ = Montag. Ferner hat man

$d = 29$ $\qquad a' = 27 - 747 + 0 = -720$, Schaltj. $= 721$ vor Chr.

$\ 56$

$\ 85$ $\qquad d' = (313 + 3) : 4 = \quad 316 : 4 = 79$

$\ 4$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ 0 März $= 60$

340 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $d' = 19$ März.

$a = \ 27$

$c = 313$

*) Lib. IV. 5, pag. 244.

Oder:

$d + 56 = 85$ also ist hier $\Delta a = 0$

$a = 27 = 4.6 + 3$ $a' = 27 - 747 = -720$, Schaltj. $= 721$ v. Chr.

$d' = 85 - 6 = 79 = (79 - 60 =)$ 19 März.

Oder endlich:

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}999315 \\ 72 \\ \hline 199863 \\ 69952 \\ \hline 26{\cdot}9815 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{\cdot}002738 \\ 92 \\ \hline 548 \\ 246 \\ \hline 0{\cdot}0794 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 26{\cdot}9815 \\ 0{\cdot}0794 \\ \hline 27{\cdot}0609 \\ -747{\cdot}8494 \\ \hline -720{\cdot}7885 = -721 + 0{\cdot}2115 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}2115 \\ 0{\cdot}1916 \ldots 70 \text{ Tage} \\ \hline 199 \ldots 7 \\ \hline 77 \text{ Tage.} \end{array} \qquad \begin{array}{l} a' = -721 + 1 = -720 \\ d' = 77 + 1 = 78. \end{array}$$

Aus diesem Beispiele leuchtet zugleich ein, wie weitläufig und unverläßlich die Tittel'sche Vergleichung der Aeren ist.

Nach unserer genauen Rechnung ereignete sich demnach jene Mondfinsterniß Montag den 19 März 721 vor Chr.

2. Beispiel. Auf welchen Tag unserer Zeitrechnung trifft der 9 Athyr 887 seit Nabonassar, an welchem Ptolomäus die Herbstnachtgleiche beobachtet zu haben versichert?

Hier hat man $a = 887$, $m = \text{Athyr} = 3$, $t = 9$, $d = 2.30 + 9 = 69$, also $h \equiv -2 + 6 + 2$, $\text{mod}\, 7 \equiv 6 =$ Freitag.

$$\begin{array}{r} d = 69 \\ 56 \\ \hline 125 \\ 4 \\ \hline 500 \\ a = 887 \\ \hline c = -387 \end{array} \qquad \begin{array}{r} c = 1461.(-1) + 1074 \\ \\ a = 887 \\ -747 \\ -1 \\ \hline a' = 139, \text{ Gemeinj.} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ \\ 1074 \\ 2 \\ \hline d' = 1076 : 4 = 269 \\ 243 = 0 \text{ Sept.} \\ \hline d' = 26 \text{ Sept.} \end{array}$$

Oder: $\left.\begin{array}{l} d + 56 = 125 \\ a = 887 = 221.4 + 3 \end{array}\right\}$ also hat man hier $\Delta a = 1$

$$\begin{array}{r} -747 \\ -1 \\ \hline a' = 139, \text{ Gemeinj.} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 125 \\ 365 \\ \hline 490 \\ -221 \\ \hline d' = 269 = (269 - 243 =) \text{ 26 Sept.} \end{array}$$

Ptolomäus beobachtete daher diese Herbstnachtgleiche Freitags den 26 September 139 n. Chr.

3. Beispiel. Hipparch stellte eine Beobachtung des Mondes im Jahre 197 seit Alexanders Tode am 17 Payni Nachmittags an. Schreibt man dafür das Jahr $197 + 424 = 621$ seit Nabonassar; so findet man nach obigen Vorschriften Samstag den 7 Juli 127 vor Chr. *)

134.

Fortsezung.

III. Zurückführung eines Datums der christlichen Aere auf die nabonassarische.

Soll umgekehrt ein Datum der christlichen Aere — versteht sich nach dem julianischen Kalender, (§. 57) — auf die nabonassarische zurückgeführt werden; so geben entweder die obigen Gleichungen oder §. 31 und 55 folgende Ausdrücke an die Hand.

Der Tag d' des Jahres a' nach Chr. trifft in das Jahr seit Nabonassar

(251) $$a = a' + 747 + \Delta a$$

und auf dessen Tag

(252) $$d = d' + 131 + Q\frac{a'}{4} - 365\Delta a;$$

wofern man Δa so bestimmt, daß d positiv und nicht größer als 365 ausfällt.

Oder sezt man

(253) $$d' + 131 + Q\frac{a'}{4} = c',$$

so findet man das Jahr

(254) $$a = a' + 747 + Q\frac{c'}{365}$$

und dessen Tag

(255) $$d = R\frac{c'}{365}.$$

Beispiel. Auf welchen Tag der nabonassarischen Aere trifft der 25 November 364 nach Chr., an welchem Theon eine Mondfinsterniß beobachtete?

Hier ist $a' = 364 = 4.90 + 4$, Schaltjahr;
$d' = 25$ November $= 25 + 305 = 330$
$c' = 330 + 131 + 90 = 551 = 365.1 + 186$

also $a = 364 + 747 + 1 = 1112$
$d = 186 = 6$ Phamenoth.

Diese Mondfinsterniß ereignete sich demnach am 6 Phamenoth 1112 nach Nabonassar.

135.

Fortsezung.

IV. Sucht man die beiden Jahre a und a+1 seit Nabonassar, welche im Jahre a' nach Chr. wechseln und die Tage d' und d'+1,

*) Vergleiche Ideler Handbuch Bd. 1. S. 98, 104, 107.

in denen das vorangehende a sich endigt und das folgende $a+1$ anfängt; so ist vermöge §. 34 der 0 Januar des Jahres a' n. Chr. der Tag

$$n' = 365(a'-1) + \mathrm{Q}\frac{a'-1}{4}$$

in der christlichen Aere, also wegen $g'-g = 272786$ der Tag

$$n = 365(a'-1) + \mathrm{Q}\frac{a'}{4} + 272786$$

in der nabonassarischen Aere; mithin trifft er in das in diesem Jahre a' nach Chr. ablaufende Jahr seit Nabonassar

$$(256) \qquad a = \mathrm{Q}\frac{n}{365} + 1 = a' + 747 + \mathrm{Q}\frac{c'}{365}$$

darin auf den Tag

$$(257) \qquad d = \mathrm{R}\frac{n}{365} = \mathrm{R}\frac{c'}{365},$$

und auf den Wochentag

$$\mathrm{R}\frac{a+d+2}{7} = \mathrm{R}\frac{a' + \mathrm{Q}\frac{a'}{4} - 2}{7},$$

wenn man Kürze halber

$$(258) \qquad c' = 131 + \mathrm{Q}\frac{a'}{4}$$

setzt. Dasselbe ergibt sich auch aus dem vorigen §. 134, (253), (254), (255), wenn darin $d' = 0$ gesetzt wird.

Da nun in §. 34 für die nabonassarische Aere $l = 365$, $\Delta l = 0$ ist; so endigt sich das nabonassarische Jahr a am Tage

$$d' = 365 - d = 365 - \mathrm{R}\frac{c'}{365} = \mathrm{r}\frac{-c'}{365},$$

und am Wochentage $h' \equiv a + d + 2 + d', \bmod 7 \equiv a + 3$.

Im Jahre a' nach Chr. endigt sich demnach, wenn man

$$(258) \qquad c' = 131 + \mathrm{Q}\frac{a'}{4} \text{ setzt,}$$

das Jahr $\qquad a = a' + 747 + \mathrm{Q}\frac{c'}{365}$

der nabonassarischen Aere am Tage

$$d' = 365 - \mathrm{R}\frac{c'}{365} = \mathrm{r}\frac{-c'}{395}$$

und am Wochentage $h' \equiv a + 3, \bmod 7 \equiv a' + \mathrm{Q}\frac{c'}{365} + 1$;
folglich beginnt am Tage

$$d' + 1 = 366 - \mathrm{R}\frac{c'}{365} = \mathrm{R}\frac{1-c'}{365}$$

und am Wochentage $\equiv h' + 1, \bmod 7 \equiv a - 3, \bmod 7$

das Jahr $\qquad a + 1 = a' + 748 + \mathrm{Q}\frac{c'}{365}$

der nabonassarischen Aere,

Beispiel. Welche nabonassarischen Jahre wechseln im Jahre 1844 nach Chr. und wann?

Hier ist $a' = 1844 = 4 \cdot 460 + 4$, (Schaltjahr)

$$\begin{array}{rrr} a' = 1844 & \begin{array}{r} 131 \\ \hline c' = \quad 591 \end{array} = 365 \cdot 1 + 226 & \\ 747 & & 365 \\ 1 & & \overline{d' = 139} \\ \hline a = 2592 & & 121 = 0 \text{ Mai} \\ h' \equiv 2 + 3, \bmod 7 \equiv 5 = \text{Donnerstag} & & \overline{d' = \quad 18 \text{ Mai.}} \end{array}$$

Im Jahre 1844 endet also Donnerstag den 18 Mai a. St. das J. 2592, und beginnt Freitag den 19 Mai a. St. das Jahr 2593 seit Nabonassar.

Zweites Hauptstück.

Zeitrechnung der neueren Aegypter, der Alexandriner, Kopten und Abyssinier.

136.

Schaltrechnung.

Die alten Aegypter mußten, da sie sich viel mit der Beobachtung beschäftigten, an welchen Monatstagen ihres 365tägigen Jahres die hellsten Sterne, insbesondere der äußerst stark glänzende Hundsstern — Sirius im großen Hunde — kurz vor der Sonne aufgingen oder nach der Sonne untergingen, frühzeitig wahrnehmen, daß jeder Fixstern alle vier Jahre um einen Tag später nach ihrem Kalender aufging. Wenn nemlich Sirius einmal am 1 Thoth kurz vor der Sonne aufgegangen war, so ging er vier Jahre später am 2 Thoth, nach wieder vier Jahren am 3 Thoth auf, u. s. f. Daraus konnten sie leicht abnehmen, daß je 4 ihrer Jahre um einen Tag, also ihr 365tägiges Sonnenjahr um einen Vierteltag zu kurz war.

Es läßt sich gar nicht bezweifeln, daß diese Kenntniß in Aegypten von hohem Alter war. Von den Aegyptern ging sie zu den Griechen und später zu den Römern über, unter denen sie Julius Cäsar seiner Schaltrechnung zu Grunde legte. (§. 40.) In Aegypten selbst wurde sie erst unter Augustus, um das Jahr 30 vor Chr., zur Schaltrechnung verwendet. Um diese Zeit kam nemlich unter den in Aegyptens Hauptstadt, Alexandria, wohnenden Griechen eine Zeitrechnung allmälig in Aufnahme, welche darum die Zeitrechnung

der Alexandriner oder die alexandrinische genannt wird, und mit der altägyptischen Jahrform den julianischen vierjährigen Schaltkreis mit einem Schalttage verbindet.

In dem alexandrinischen Jahre sind nemlich

1) Form und Namen der Monate die ägyptischen;

2) zu den fünf Ergänzungstagen (ἐπαγόμεναι) kommt alle vier Jahre ein sechster;

3) der Anfang des Jahres oder der 1 Thoth trifft gewöhnlich auf den 29 August des julianischen Jahres;

4) eingeschaltet wird immer in demjenigen alexandrinischen Jahre, welches vor dem julianischen Schaltjahre abläuft, und zwar jedesmal am 29 August oder dem 179sten Tage vor dem julianischen Schalttage; weswegen

5) das darnach folgende, mit dem julianischen Schaltjahre größtentheils übereinstimmende, alexandrinische Gemeinjahr nicht am 29, sondern am 30 August anfängt; so daß blos jene alexandrinischen Gemeinjahre am 30 August anfangen, welche sich an ein alexandrinisches Schaltjahr anschließen und in einem julianischen Schaltjahre endigen.

Das bewegliche Jahr scheint noch in der ersten Hälfte des dritten Jahrhundertes nach Chr., wenigstens außer Alexandrien, in Aegypten vorgeherrscht zu haben; und mußte überhaupt so lange sich behaupten, als die christliche Religion sich noch nicht über das ganze Land verbreitet hatte, weil es aufs innigste mit dem alten Cultus verknüpft war. Daher konnte auch das feste Jahr anfangs nur in dem von Griechen bewohnten Alexandrien Wurzel fassen. Durch die römische Besitznahme und Verwaltung des Landes, noch mehr aber durch die Ausbreitung der christlichen Religion, die sich nicht mit dem beweglichen Jahre vertrug, wurde nach und nach das feste Jahr dergestalt verbreitet, daß es seit der zweiten Hälfte des vierten Jahrhundertes nur mehr allein bestand.

137.

Vergleichung der alexandrinischen Datirung mit der julianischen.

Nach dem Gesagten ist es nun leicht, jedes alexandrinische Datum auf das julianische und umgekehrt zurück zu führen. Zur Erleichterung der Rechnung dienen folgende zwei Tafeln, wovon die erste angibt, wie der 1te Tag jedes alexandrinischen Monates im julianischen Kalender, und die andere, wie der 1te Tag jedes julianischen Monates im alexandrinischen Kalender bestimmt wird.

Tafel 1.

	Alexandrinische Monate.	Monate des jul. Jahres, welches im alexandrinischen				
1)	t Thoth	t + 28 + i	August	= t — 3 + i	September	
2)	t Phaophi	t + 27 + i	September	= t — 3 + i	October	
3)	t Athyr	t + 27 + i	October	= t — 4 + i	November	endet
4)	t Chöak	t + 26 + i	November	= t — 4 + i	December	
5)	t Tybi	t + 26 + i	December			
				= t — 5 + i	Januar	
6)	t Mechir	t + 25 + i	Januar	= t — 6 + i	Februar	
7)	t Phamenoth	t + 24 + i	Februar	= t — 4	März	
8)	t Pharmuthi	t + 26	März	= t — 5	April	anfängt.
9)	t Pachon	t + 25	April	= t — 5	Mai	
10)	t Payni	t + 25	Mai	= t — 6	Juni	
11)	t Epiphi	t + 24	Juni	= t — 6	Juli	
12)	t Mesori	t + 24	Juli	= t — 7	August	
13)	t Epagomene	t + 23	August			

i zählt die julianischen Schalttage desjenigen julianischen Jahres, welches im alexandrinischen anfängt, oder in welchem sich das alexandrinische endigt; oder zählt die (alexandrinischen) Schalttage unmittelbar vor dem Anfange des alexandrinischen Jahres.

Tafel 2.

	Julianische Monate	Monate des alexandrinischen Jahres, welches im julianischen Jahre				
1)	t Januar	t + 5 — i	Tybi	= t — 25 — i	Mechir	
2)	t Februar	t + 6 — i	Mechir	= t — 24 — i	Phamenoth	
3)	t März	t + 4	Phamenoth	= t — 26	Pharmuthi	
4)	t April	t + 5	Pharmuthi	= t — 25	Pachon	endet
5)	t Mai	t + 5	Pachon	= t — 25	Payni	
6)	t Juni	t + 6	Payni	= t — 24	Epiphi	
7)	t Juli	t + 6	Epiphi	= t — 24	Mesori	
8)	t August	t + 7	Mesori	= t — 23	Epagomene	
				= t — 28 — j	Thoth	
9)	t September	t + 3 — j	Thoth	= t — 27 — j	Phaophi	anfängt
10)	t October	t + 3 — j	Phaophi	= t — 27 — j	Athyr	
11)	t November	t + 4 — j	Athyr	= t — 26 — j	Chöak	
12)	t December	t + 4 — j	Chöak	= t — 26 — j	Tybi	

i Anzahl der Schalttage des julianischen Jahres,
j » » » » alexandrinischen Jahres,
welches sich im julianischen endiget.

Anmerkung. Solche Tafeln, wie diese zweite, werden wir in der Folge nicht weiter aufnehmen, weil sie selten zur Anwendung kommen und mit Hilfe einer leichten Umkehrung durch die erste ersezt werden können.

138.

Alexandrinische Jahrrechnung.

1. Diocletianische Aere. Auch unter den römischen Imperatoren, so wie unter den Ptolomäern, behalfen sich die Aegypter mit den Regentenjahren. Erst spät fühlten sie das Bedürfniß einer festen Jahrrechnung, die sie, man weiß nicht genau bei welcher Veranlassung, in der diocletianischen erhielten. Wahrscheinlich wurden die Christen durch die furchtbaren Verfolgungen, welche Kaiser Diocletian nach seinem 19. Regierungsjahre über sie verhängte, veranlaßt, ihre Märtyreräre zu bilden, wie sie die nach ihm benannte Aere auch zu nennen pflegten. Die Epoche der diocletianischen Aere ist der Regierungsantritt des Kaisers Diocletian der 29 August 284 nach Chr., ein Freitag, und ist daher um 2115525 Tage später als die Epoche der byzantinischen Weltäre. (Vergl. §. 63, I. Beisp. 1.)

Bezeichnet A ein Jahr des Diocletian, so

beginnt es im Jahre A + 283 nach Chr. am 29 + i August

und endet im Jahre A + 284 nach Chr. am 28 + j August,

wobei $i = G\frac{R\frac{A+284}{4}}{4} = G\frac{R\frac{A}{4}}{4}$ und $j = G\frac{R\frac{A+1}{4}}{4}$ ist. (§. 24, II, Beisp.)

Dieses Jahr A hat j, sein Vorläufer i Schalttage, und ist sonach ein Schaltjahr, wenn es durch 4 getheilt den Rest 3 gibt.

Umgekehrt in einem Jahre a nach Chr.

endigt das Jahr a — 284 des Diocletian am 28 + i August

und beginnt das Jahr a — 283 des Diocletian am 29 + i August,

wobei $i = G\frac{R\frac{a+1}{4}}{4}$ die Anzahl der Schalttage des

ablaufenden alexandrinischen Jahres a — 284 oder

des nachfolgenden christlichen Jahres a + 1 vorstellt.

2. Weltäre des Panodorus. Seit dem fünften Jahrhunderte benüzten die ägyptischen Christen auch die von dem alexandrinischen Mönche Panodorus erdachte Weltäre, welche mit dem 29 August 5493 v. Chr. (§. 48, II), folglich um 5841 Tage später als die byzantinische Weltäre anfing.

Ein Jahr A der panodorischen Weltäre beginnt demnach im Jahre A—5493 nach Chr., und enthält $j = G\frac{R\frac{A+1}{4}}{4}$ Schalttage, sein Vorläufer $i = G\frac{R\frac{A}{4}}{4}$

Schalttage; daher ist es ein Schaltjahr, so oft es durch 4 getheilt 3 zum Reste gibt.

Ferner hat man die Vergleichungen

Diocletianisches Jahr = Weltjahr des Panodorus — 5776

Weltjahr des Panodorus = Diocletianisches Jahr + 5776.

139.

Vergleichung der diocletianischen Aere mit der christlichen.

I. Soll demnach ein Tag eines diocletianischen Jahres A in die christliche Aere übertragen werden, so treffen die ersten vier Monate dieses Jahres in das Jahr A + 283 nach Chr. und die übrigen in das Jahr A + 284 nach Chr.; dabei ist, Tafel 1 in §. 137, $i = \mathfrak{F}\frac{\mathfrak{R}\frac{A}{4}}{4}$, nemlich $i = 1$, wenn A durch 4 theilbar, sonst $i = 0$.

Beispiel. 1. Paulus Alexandrinus lehrt in seiner Einleitung in die Astrologie, wie man erkennen könne, welchem Gott jeder Monatstag angehört, d. i. welcher Wochentag jedem Monatstage entspricht; und hier sagt er, der Tag an welchem er dieses schreibe, ein Mittwoch, sei der 20 Mechir des Jahres 94 der diocletianischen Aere.

Hier ist $A = 94 \equiv 2$, mod 4, also $i = 0$. Dieser 20 Mechir ist demnach der 20 + 0 — 6 Febr. = 14 Febr. des Jahres 94 + 284 = 378 nach Chr., daher nach §. 63, I, in der That ein Mittwoch.

Anmerkung. So wie Paulus in seiner Astrologie eine Belehrung, nach der man den Regenten jedes Monatstages finden könne, ertheilt, welche auf die alexandrinischen Monate und die diocletianische Aere paßt; eben so stellte man die einzelnen nach einander folgenden Jahre dieser Aere unter die astrologische Herrschaft der auf die oben (§. 128) beschriebene Weise geordneten sieben Planeten. Daher ist eines diocletianischen Jahres A astrologischer Regent $= \mathfrak{R}\frac{A}{7}$. Bezeichnet demnach a das in diesem Jahre beginnende und zu zwei Drittheilen mit ihm übereinkommende Jahr nach Chr., so ist $A = a - 284 \equiv a + 3$, mod 7; folglich ist des Jahres a nach Chr. astrologischer Regent $= \mathfrak{R}\frac{a+3}{7}$.

Beispiel. 2. Theios beobachtete eine Berührung der Planeten Mars und Jupiter in der Nacht vom 6 zum 7 Pachon des Jahres 214 seit Diocletian, eine Stunde nach Sonnenuntergang *). — Diese Beobachtung geschah demnach am Abend des 6 — 5 = 1 Mai's im Jahre 214 + 284 = 498 n. Chr.

*) Bulialdus Astronomia Philolaica l. VIII. p. 336.

Beispiel 3. Theon berechnet in seinem Commentar zum Almagest *) eine von ihm beobachtete Mondfinsterniß, welche Beobachtung nach den Alexandrinern im 81ten Jahre Diocletian's am 29 Athyr, nach den Aegyptern im 1112ten der nabonassarischen Aere am 6 Phamenoth angestellt wurde.

Da hier $A = 81 \equiv 1.$ mod 4 ist, so hat man $i = 0$; also fand diese Mondfinsterniß am $29 - 4 = 25$ November des Jahres $81 + 283 = 364$ nach Chr. Statt, welcher nach §. 134 Beisp. wirklich mit dem 6 Phamenoth 1112 seit Nabonassar übereinstimmt.

II. Sollte man umgekehrt ein Datum der christlichen Jahrrechnung auf die diocletianische bringen, so treffen in die ersten acht Monate des Jahres a nach Chr. die lezten acht Monate und die Ergänzungstage des Jahres $a - 284$ seit Diocletian, und dafür ist die Anzahl der Schalttage des christlichen Jahres $i = q\frac{R\frac{a}{4}}{4}$; dagegen treffen in die lezten vier Monate des Jahres a die ersten vier des Jahres $a - 283$ seit Diocletian, und dabei besizt das ablaufende alexandrinische Jahr $j = q\frac{R\frac{a+1}{4}}{4}$ Schalttage.

Beispiel. Derselbe Theon erwähnt **) eine von ihm zu Alexandrien beobachtete Sonnenfinsterniß, und sagt, sie sei im 1112ten Jahre seit Nabonassar am 24sten des ägyptischen Thoth oder am 22sten des alexandrinischen Payni Nachmittags eingetreten.

Für jenes nabonassarische Datum ist $a = 1112$, $d = 24$ Thoth $= 24$, also, nach §. 133, (248) und (249), $c = 4(24 + 56) - 1112 = 320 - 1112 = -792 = -1.1461 + 669$, $a' = 1112 - 747 - 1 = 364$, $d' = (669 + 3) : 4 = 168 - 152$ Juni $= 16$ Juni. Der Beobachtungstag ist demnach der 16 Juni 364 nach Chr.

Derselbe fällt daher in das Jahr $364 - 284 = 80$ seit Diocletian und nach der 2ten Tafel des §. 137 auf den $16 + 6 = 22$ Payni der Alexandriner.

140.
Osterrechnung der Alexandriner nach der alexandrinischen Jahrform.

Die eigentliche Osterrechnung der Alexandriner nach ihrer eigenthümlichen Jahrform, welche häufig in den Werken der Kirchenscribenten vorkommt, läßt sich leicht aus der für den julianischen Kalender (§. 81 bis 88) aufgestellten alexandrinischen Osterrechnung ableiten.

*) l. VI. p. 284, 85.

**) Comment. l. VI. p. 332.

Die Frühlingsnachtgleiche setzten die Alexandriner auf den 25 Phamenoth;

daher die früheste Osterfeier auf den 26 Phamenoth.

Bezeichnet A ein Jahr des Diocletian und a das in ihm anfangende Jahr nach Chr., welches daher mit ihm in den Ostern, also auch allgemein in der Festzahl übereinstimmt, so ist (§. 139, I),

$$a = A + 284,$$

also $$a \equiv A - 1, \bmod 19 \equiv A - 3, \bmod 7 \equiv A, \bmod 4.$$

Daraus folgt demnach für das Jahr A des Diocletian

goldene Zahl $$N = R\frac{A}{19},$$

Vorrückung der Ostergrenze oder Abstand der Ostergrenze von dem 25 Phamenoth

$$p = r\frac{-11N-4}{30} \equiv -11R\frac{A}{19} - 4, \bmod 30;$$

mithin Osterneumond $= p + 12$ Phamenoth $= p - 18$ Pharmuthi,

Ostervollmond (Luna XIV) oder Ostergrenze

$= p + 25$ Phamenoth $= p - 5$ Pharmuthi.

Ferner ist die Concurrente, d. i. der Wochentag des 24 März oder 28 Phamenoth oder auch des 0 Phamenoth, nemlich des letzten Mechir,

$$C \equiv A + q\frac{A}{4} + 2, \bmod 7 \equiv 3A - 2r\frac{A}{4} + 2,$$

daher der Wochentag der Ostergrenze

$$f \equiv p + C - 3, \bmod 7 = 1, 2, \ldots 7$$
$$\equiv p + 3A - 2r\frac{A}{4} - 1.$$

Hieraus folgt der Abstand des Osterfestes von der Ostergrenze

$$b = 8 - f = R\frac{1-f}{7} = R\frac{-(p+C+3)}{7}$$
$$\equiv 2r\frac{A}{4} - 3A - p + 2, \bmod 7,$$

und sein Abstand von der Frühlingsnachtgleiche oder vom 25 Phamenoth, d. h. die Festzahl,

$$v = p + b,$$

daher Ostern $= v + 25$ Phamenoth $= v - 5$ Pharmuthi,

Pfingsten $= v + 14$ Pachon $= v - 16$ Payni.

Will man die Festzahl des Jahres A seit Diocletian aus dem (in Taf. 3 des Anhanges befindlichen) Verzeichnisse alexandrinischer Festzahlen entnehmen, so wird man sie entweder für das mit ihm größtentheils übereinstimmende Jahr $a = A + 284$ n. Chr., oder für das Jahr des christlichen Osterkreises $\equiv a$, mod $532 \equiv A + 284 \equiv A - 248$ ausheben.

Beispiel. In dem Briefe des Ambrosius an die Bischöfe der Provinz Aemilia*) wird die Osterregel: **Si quarta decima luna** (der Ostervollmond) **in Dominicam inciderit, in alteram hebdomadam celebritas paschae est differenda,** durch einige von seiner Zeit entlehnte Fälle als wirklich befolgt dargestellt. Es heißt: **Octogesimo et nono anno ex die imperii Diocletiani, cum quarta decima luna esset nono Kalendas Aprilis, nos celebravimus pascha pridie Kalendas Aprilis. Alexandrini quoque et Aegyptii, ut ipsi scripserunt, cum incidisset quarta decima luna vigesimo et octavo die Phamenoth mensis, celebraverunt pascha quinto die Pharmuthi mensis, quae est pridie Kalendas Aprilis, et sic convenere nobiscum.** — Hier ist nun $A = 89$, $a = 89 + 284 = 373$,

daher $N \equiv 89 \equiv 374, \text{ mod } 19 \equiv 13$

$p \equiv -11.13 - 4, \text{ mod } 30 \equiv 7 - 4 \equiv 3,$

Ostervollmond $= 21 + 3 = 24$ März = **IX Kal. Apr.**

$= 25 + 3 = 28$ Phamenoth.

Ferner ist

$$b \equiv 2\mathfrak{r}\frac{a}{4} - 3a - p, \text{ mod } 7 \equiv 2 - 6 - 3 \equiv 7$$

$$\equiv 2\mathfrak{r}\frac{A}{4} - 3A - p + 2, \text{ mod } 7 \equiv 2 + 6 - 3 + 2 \equiv 7,$$

also $v = p + b = 3 + 7 = 10$, und

Ostern $= 21 + 10 = 31$ März = **pridie Kal. Apr.**

$= 10 - 5 = 5$ Pharmuthi.

Mithin sind alle Data richtig angegeben.

Weiterhin sagt Ambrosius in seinem Briefe: **Septuagesimo sexto anno ex die imperii Diocletiani vigesimo octavo die Pharmuthi mensis, qui est nono Kalendas Maii, dominicam paschae celebravimus sine ulla dubitatione maiorum.** — Da ist

$A = 76$, also $N \equiv 76, \text{ mod } 19 \equiv 19,$

$p \equiv -11.19 - 4, \text{ mod } 30 \equiv 1 - 4 \equiv 27$

$b \equiv 0 + 3 + 1 + 2, \text{ mod } 7 \equiv 6$

$v = 33$; daher im Jahre 76 seit Diocletian

$= 33 - 5 = 28$ Pharmuthi, oder im J. 360 n. Chr.

Ostern $= 28 - 5 = 23$ April = **IX. Kal. Maii;**

wie das Sendschreiben angibt.

141.

Zeitrechnung der Kopten und Abyssinier.

Die alexandrinische Zeitrechnung erhielt sich bis auf den heutigen Tag bei den Nachkommen der alten, mit Griechen und Römern vermischten, Aegypter,

*) **Opp. Tom. II, p. 880,** nach der Angabe der Benedictiner.

die, nach der Eroberung Aegyptens durch die Araber, größtentheils noch in Oberägypten (vormals Thebais) in der Stadt und dem Bezirke Koptos (nordöstlich von dem alten Theben am Nil) sich erhielten und daher **Kopten** genannt werden. Sie sind Christen von besonderer Confession und stehen unter einem Patriarchen zu Kairo. Nebst den koptischen Christen gebrauchen auch die äthiopischen oder abyssinischen Christen, im Süden von Aegypten, die alexandrinische Zeitrechnung, nur ihre Namen der Monate weichen ab, wie folgende Tafel zeigt.

	Aethiopische Monate.	Altägyptische Monate.	Koptische Monate.
1)	Mascaram	Thoth	Thout
2)	Tekemt	Phaophi	Paopi
3)	Hedar	Athyr	Athor
4)	Tachsas	Chŏak	Choiak
5)	Ter	Tybi	Tobi
6)	Jacatit	Mechir	Mechir
7)	Magabit	Phamenoth	Phamenoth
8)	Mijazia	Pharmuthi	Pharmuthi
9)	Ginbot	Pachon	Paschons
10)	Sene	Payni	Paoni
11)	Hamle	Epiphi	Epep
12)	Nahase	Mesori	Mesore
13)	Pagomen	Epagomenai	Pi abot enkagi.

Die Ergänzungstage werden von den Aethiopiern **Paguomen** oder **Pagomen** genannt, was offenbar das entstellte ἐπαγομεναι ist; die **Kopten** nennen sie **Pi abot enkagi**, den kleinen Monat.

Vierter Abschnitt.

Zeitrechnung der Babylonier.

142.

Allgemeines.

Aus dem astronomischen Lehrgebäude des Ptolomäus, dem Almagest, ersieht man, daß die Kaste der babylonischen Priester, der Chaldäer, zu Babylon höchst schäzenswerthe astronomische Beobachtungen anstellte, von denen mehrere in dem Werke des Ptolomäus verzeichnet und ihre Zeitpunkte theils nach der griechischen theils nach der ägyptischen Zeitrechnung angegeben sind. Man kann daraus den Schluß ziehen, daß die Chaldäer eine fest geordnete Zeitrechnung haben mußten. Von welcher Beschaffenheit aber diese Zeitrechnung war, darüber vermag man wenig mehr als Vermuthungen anzuführen; denn nirgends findet man eigenthümliche chaldäische Monate genannt, und bei keinem Geschichtschreiber die Jahre nach einer chaldäischen Aere gezählt; selbst der Charakter der chaldäischen Jahre und Monate ist uns unbekannt.

143.

Bürgerliches Jahr der Babylonier.

Die Chaldäer hatten die mittlere Bewegung des Mondes und die Perioden der Rückkehr seiner Ungleichheiten mit erstaunenswerther Genauigkeit ausgemittelt. So fanden sie den mittleren synodischen Mondmonat nur um $4\frac{1}{2}$ Secunden zu groß. Auch kannten sie die merkwürdige Mondperiode von 223 Mondwechseln, nach welcher die Mondfinsternisse in gleicher Ordnung und Größe wiederkehren, die chaldäische Periode oder die der Finsternisse. Ja sogar den für die Zeitrechnung wichtigen neunzehnjährigen oder metonischen Mondkyklus legt man gewöhnlich den Chaldäern bei.

Bedenkt man, ferner, daß alle semitischen Völker, wie die Hebräer, Syrer und Araber, nach Mondmonaten rechneten, daß die Juden die Namen ihrer jezigen nach dem Monde geregelten Monate höchst wahrscheinlich während der Gefangenschaft von den Babyloniern angenommen haben, und daß die Babylonier unter den Seleukiden nach Mondmonaten mit macedonischen Benennungen datirten, also vermuthlich nur ihrer Zeitrechnung die macedonische Terminologie anpaßten; so kann man es, mit Fréret, für wahrscheinlich

halten, daß die Babylonier im bürgerlichen Leben nach Mondmonaten rechneten. Ihr Mondjahr dürfte zugleich, wie jenes der Hebräer, Syrer und Macedonier, ein gebundenes, mit dem Sonnenlaufe abgeglichenes gewesen sein.

144.

Sonnenjahr der Chaldäer.

Ptolomäus pflegt im Almagest bei den Beobachtungen, die er anführt, ungeachtet er sie sämmtlich auf die ägyptische Zeitrechnung reducirt, zugleich die eigenthümlichen Zeitbestimmungen der Astronomen, von denen sie angestellt wurden, anzugeben. Da er nun die sieben ältesten chaldäischen Beobachtungen blos nach ägyptischen Monaten datirt, so bietet sich am natürlichsten die Annahme dar, daß die Chaldäer — obschon sie im bürgerlichen Leben ein gebundenes Mondjahr gebrauchten — bei ihren astronomischen Beobachtungen und Rechnungen eines Jahres sich bedienten, welches wie das 365tägige ägyptische geformt war und höchstens einen anderen Anfang und verschiedene Monatsnamen hatte, wobei ihre Data äußerst leicht auf die ägyptische Zeitrechnung sich übertragen ließen. Diese Voraussezung wird noch durch den Umstand bestärkt, daß die nabonassarische Aere, welche, wie schon der Name lehrt, babylonischen Ursprungs ist, nach ägyptischen Jahren zählt. Wirklich nehmen auch fast alle Chronologen die Identität der chaldäischen und ägyptischen Zeitrechnung an.

145.

Anfang und Eintheilung des Tages.

Daß die Babylonier ihren bürgerlichen Tag mit dem Aufgange der Sonne angefangen haben, sagen uns die Alten ganz übereinstimmig. Die Chaldäer kannten und gebrauchten auch bereits die Stundeneintheilung des Tages, wie die von ihnen gemachten, uns von Ptolomäus überlieferten Beobachtungen lehren. Selbst den Unterschied zwischen den bürgerlichen Stunden — von denen 12 gleiche auf den natürlichen Tag und 12 andere wieder gleiche auf die Nacht kamen, und deren Dauer sich täglich änderte — und den Aequinoctialstunden — deren 24 gleiche auf den bürgerlichen Tag gerechnet wurden und mit denen erstere nur zur Zeit der Aequinoctien übereinkamen — kannten sie, da beide Arten von Stunden bei ihren Beobachtungen vorkommen.

Fünfter Abschnitt.

Zeitrechnung der Griechen.

Erstes Hauptstück.

Griechische Zeitrechnung überhaupt.

146.

Der Tag.

Im bürgerlichen Tage unterschieden die Griechen anfänglich nur, wie alle auf einer niedrigen Bildungsstufe stehenden Völker, die Tagszeiten, den Morgen, Mittag, Abend, die Mitternacht und dgl. Die Zeiten der Nacht und die Nachtwachen ersahen sie aus dem Stande der Gestirne gegen den Horizont; die Tagszeiten erkannten sie an der Richtung und Länge der Schatten. Später lernten sie im Oriente und in Aegypten die Eintheilung des natürlichen Tages in 12 Stunden mittels der Sonnenuhren und endlich jene des ganzen Tages in 24 Stunden mittels der Wasser- und Sanduhren. Den Anfang des Tages setzten sie auf den Sonnenuntergang. Wir werden ihn auf die nächst folgende Mitternacht verlegen, so oft wir griechische Tage mit anderen vergleichen werden.

147.

Das Jahr.

1. Die Jahrszeiten. Zur Erkennung der Jahrszeiten, d. i. der Zeiten der Saat, der Ernte, der Weinlese, kurz der Hauptzeitpunkte des Landbaues und der Schiffahrt, dienten den Griechen uranfänglich mancherlei Erscheinungen in der Natur, besonders das Kommen und Gehen der Zugvögel, später die Auf- und Untergänge der Sterne in der Morgen- und Abenddämmerung; so daß sie nach und nach die Anfänge der vier Hauptjahrszeiten, des Frühlings, Sommers, Herbstes und Winters, durch Fixsternerscheinungen anzugeben lernten. Als aber diese Beobachtungen, zumal sie durch die Witterung leicht vereitelt wurden, bei steigender Cultur, bei Vervielfachung und Trennung der Geschäfte des bürgerlichen Lebens, zur Ausmessung und Bezeichnung der Zeiten nicht mehr ausreichten, kam es darauf an, dem Jahre eine feste Form zu geben.

II. Monate. Dazu bot sich ihnen nun, wie vielen alten Völkern, die regelmäßige Abwechslung und Wiederkehr der Lichtgestalten des Mondes, der Mondmonat mit seinen in den Abenden wahrnehmbaren Hauptphasen, dem Neumond, ersten Viertel und Vollmond, als natürlichstes Mittel dar. Deswegen hatten sie von Alters her wahre Mondmonate, die sie nicht, wie späterhin, nach Kykeln, sondern unmittelbar nach den Mondphasen anordneten, wornach die Monate der einzelnen griechischen Völkerschaften, so verschieden auch ihre Namen sein mochten, parallel neben einander fortliefen. Zum ersten Monatstage — νουμηνία — machten sie denjenigen, an welchem sie die Mondsichel in der Abenddämmerung erblickten. Von hier an zählten sie die Tage fort, bis sie die Mondsichel vom Neuen wahrnahmen, so daß sie im Zählen bald bis 29, bald — und etwas häufiger — bis 30 kamen. Ungeachtet sie also recht gut wußten, daß der Monat nicht durchgehends 30 Tage hielt, rechneten sie ihn dennoch im Verkehr, wie auch bei uns zu geschehen pflegt, nach dieser runden Zahl.

III. Einschaltung. Die Griechen waren durch Geseze und Orakel angewiesen, ihre Feste nicht nur bei bestimmten Mondphasen, z. B. die Eleusinen und Thesmophorien der Athener, und die mit Spielen verbundenen Olympien sämmtlicher Griechen, um die Zeit des Vollmondes, der jedesmal auf die Mitte des Monates — διχομηνία, — bestimmter auf den vierzehnten Tag des Monates traf, sondern auch in gewissen Jahrszeiten zu feiern. Nun fanden sie, daß ungefähr nach zwölf Mondmonaten dieselben Sterne in der Morgen- und Abenddämmerung auf- oder untergingen, und die mittägigen Schatten wieder ihre frühere größte oder kleinste Länge annahmen; daher legten sie dem Jahre zwölf Mondmonate bei. Allein schon nach Ablauf weniger solcher Mondjahre von 354 oder 355 Tagen mußten sie wahrnehmen, daß sie damit zu früh zu Ende kamen, und zwar durchschnittlich nach drei Jahren um mehr als einen Monat. Sie waren also genöthigt, von Zeit zu Zeit zu den zwölf Monaten noch einen dreizehnten — den Schaltmonat — in das Jahr einzurechnen. Eine feste Regel für die Einschaltung konnte sich bei ihnen aber erst bilden, als sie einen Kyklus von ganzen nach der Sonne abgemessenen Jahren gefunden hatten, der zugleich, wenigstens nahe, eine ganze Zahl synodischer Monate enthielt; was ihnen erst nach mancherlei Versuchen und Fehlgriffen gelang.

148.

Jahrrechnung.

Anfänglich benannten die Griechen ihre Jahre, wie es überall in der alten Welt üblich war, nach ihrer höchsten oder vornehmsten Staatsperson; so zu

Athen nach den Archonten, zu Sparta nach den Ephoren, zu Argos nach der obersten Priesterin der Juno, u. s. w.

Olympische Aere. Erst später bedienten sie sich der von den Ortsverhältnissen unabhängigen Aere der Olympiaden. Die olympischen Spiele, der Sage nach von Herkules gestiftet, wurden nemlich von Iphitus erneuert, aber erst seit Koröbus, der über hundert Jahre später den Preis im Wettlauf davon trug, regelmäßig alle vier Jahre gefeiert, daher man jeden solchen vierjährigen Zeitraum eine Olympiade nannte.

Die Epoche dieser Aere, der Sieg des Koröbus in den olympischen Spielen, fällt nach der einstimmigen Annahme der Chronologen in die Nähe der sommerlichen Sonnenwende des Jahres 776 vor Chr.

Da die olympischen Spiele zur Zeit des Vollmondes gefeiert wurden, der zunächst nach der Sommer-Sonnenwende eintrat; so sollte man bei der Reduction der Olympiadenjahre eigentlich eine Tafel der Vollmonde vor Augen haben. Man wird indessen gewiß selten und wenig von der Wahrheit abweichen, wenn man mit den meisten Chronologen den Anfang der Olympiadenjahre durchweg auf den 1 Julius setzt.

Als der eigentliche Urheber der Olympiadenrechnung ist der Geschichtschreiber Timäus aus Sicilien zu betrachten, der unter Agathokles (317—289 vor Chr.) und Ptolomäus Philadelphus (284—246 vor Chr.) lebte. Sie wurde jedoch, als rein wissenschaftliche Erfindung, nirgends im bürgerlichen Verkehr gebraucht. Uebrigens bestand die Feier der olympischen Spiele ununterbrochen 293 Olympiaden hindurch bis gegen das Ende der Regierung des Kaisers Theodosius (gestorb. 395 n. Chr.).

149.

Vergleichung der periodischen Zählung der Olympiadenjahre mit der gewöhnlichen fortlaufenden Zählung.

In der olympischen Aere zählt man einerseits die Olympiaden fortlaufend, und andrerseits die Jahre derselben periodisch von 1 bis 4. Bei der Datirung nach Jahren der Olympiaden wird demnach angegeben, die wie vielte Olympiade und das wie vielte Jahr in ihr man dazumal zählte. Gibt demnach ein Datum die Olympiade ω und das Jahr α an, so sind bis dahin vergangen $\omega - 1$ Olympiaden oder $4(\omega - 1)$ Jahre, also ist dieses Jahr das $A = 4(\omega - 1) + \alpha$te Jahr der olympischen Aere. Z. B. Das erste Jahr der 87sten Olympiade, oder Ol. 87, 1, das wahrscheinliche Jahr der Einführung des metonischen Kanons, ist das $4.86 + 1 = 345$ste olympische Jahr; und

Ol. 6, 3, nach Varro das Jahr der Erbauung Rom's, ist das $4.5+3 = 23^{ste}$ Jahr der olympischen Aere.

Ist umgekehrt zu suchen die Olympiade ω, in welche, und in ihr das Jahr α, auf welches das olympische Jahr A trifft; so bemerke man, daß aus der Gleichung
$$4(\omega-1)+\alpha=A$$
folgt
$$\omega-1=\mathfrak{Q}\frac{A}{4},\quad \omega=\mathfrak{Q}\frac{A}{4}+1,$$
$$\alpha=\mathfrak{R}\frac{A}{4}.$$

Das olympische Jahr A ist daher in der $\omega=\mathfrak{Q}\frac{A}{4}+1^{ten}$ Olympiade das $\alpha=\mathfrak{R}\frac{A}{4}$te Jahr.

Z. B. Das olympische Jahr 297, worin die Schlacht bei Salamis vorfiel, ist wegen $297=4.74+1$ in der 75. Olympiade das erste Jahr, also Ol. 75, 1.

150.

Vergleichung der Jahre der olympischen Aere mit jenen der christlichen.

Da die Mondjahre der Griechen mit dem Sonnenlaufe nahe richtig abgeglichen wurden, so waren ihre mittleren Jahre den tropischen Sonnenjahren wenigstens so nahe gleich, daß ihre Anfänge von der sommerlichen Sonnenwende nie beträchtlich sich entfernten, und daß auch auf sie die Vergleichungen (49) und (50) in §. 32, III, angewendet werden können. Nimmt man nun dazu noch, daß das erste olympische Jahr im Sommer des Jahres 776 vor Chr. anfing, so findet man folgende Vergleichungen zwischen den olympischen und christlichen Jahren.

1) Ein Jahr A der olympischen Aere
fängt an im Sommer des Jahres A — 776 n. Chr. oder 777 — A vor Chr.
und endet » » » » A — 775 » » 776 — A » »

2) Im Sommer eines Jahres a nach Chr.
endigt sich das olympische Jahr a + 775
und beginnt » » a + 776;
im Sommer eines Jahres a vor Chr. dagegen
endigt sich das olympische Jahr 776 — a
und beginnt » » 777 — a.

1. Beisp. Der römische Geschichtschreiber L. Cincius Alimentus macht die Stadt Rom am jüngsten, indem er sie im vierten Jahre der zwölften Olympiade, also im $4.11+4=48^{sten}$ olympischen Jahre erbauen läßt,

welches sonach im Jahre 777 — 48 = 729 vor Chr. anfing und 776 — 48 = 728 vor Chr. endete; so daß nach ihm Rom im Frühling des Jahres 728 vor Chr. erbaut worden wäre.

2. Beisp. Censorinus bezeichnet das Jahr, wo er das cap. 21 seines liber de die natali schrieb, als das 1014te olympische Jahr, welches im Sommer beginnt, als das 991ste der Stadt Rom, das nach den Parilien (21 April) anfängt, als das 283ste seit der julianischen Kalenderverbesserung, das mit dem 1 Januar anhebt, und als das 265. Jahr der römischen Kaiser, welches gleichfalls mit dem 1 Januar anfängt. — Das Jahr 283 der julianischen Kalenderverbesserung ist nun mit dem Jahre nach Chr. 283 — 45 = 238, und das Jahr 265 der römischen Kaiser mit dem Jahre nach Chr. 265 — 27 = 238, also beide mit dem Jahre 238 nach Chr. identisch. Am 21 April dieses Jahres begann das Jahr 238 + 753 = 991 der Stadt Rom, und im Sommer desselben das olympische Jahr 238 + 776 = 1014. Censorinus schrieb demnach im Jahre 238 nach Chr.

151.

Verdrängung der altgriechischen Zeitrechnung durch die julianisch-römische.

Nachdem Griechenland im Jahre 146 vor Chr. unter die Herrschaft der Römer gekommen war, vorzüglich aber, nachdem Julius Cäsar, 45 vor Chr., und Augustus, 8 vor Chr., die römische Jahrform und Schaltrechnung geregelt hatten, richteten die Griechen ihre Zeitrechnung nach der römischen ein, indem sie theils ihre Mondmonate in Sonnenmonate umschufen, theils ganz die römischen Benennungen der Monate, die Jahrform und Schaltrechnung des Julius Cäsar annahmen, welche sie noch bis auf den heutigen Tag beibehielten.

Zweites Hauptstück.

Zeitrechnung der Athener.

152.

Monate.

Unter den Griechen hatten die Athener die noch am besten geordnete Zeitrechnung, und von dieser sind uns noch die meisten Nachrichten aufbewahrt, daher wir sie hier möglichst ausführlich behandeln wollen.

Die Namen der attischen Monate sind:

	In Schaltjahren
1) **Hekatombäon,**	
2) **Metageitnion,**	
3) **Boëdromion,**	
4) **Pyanepsion,**	
5) **Mämakterion,**	
6) **Poseideon,**	6) **Poseideon I.**
	7) **Poseideon II.**
7) **Gamelion,**	8)
8) **Anthesterion,**	9)
9) **Elaphebolion,**	10)
10) **Munychion,**	11)
11) **Thargelion,**	12)
12) **Skirophorion.**	13)

Im Schaltjahre wurde nemlich ein zweiter **Poseideon** gezählt.

Zählung der Monatstage. Der attische Monat wurde in drei Dekaden getheilt, von denen allein die lezte in den 29tägigen Monaten nur 9 Tage enthielt. Der erste Tag des Monates hieß νουμηνία — Neumond, weil er in der Regel mit der ersten Erscheinung der Mondsichel in der Abenddämmerung seinen Anfang nahm. Die folgenden Tage des Monates wurden der Ordnung nach vom zweiten bis zum zehnten, dem Schlußtage der ersten Dekade, gezählt, mit dem Beisaze ἱσταμένου, des angehenden Monates. Eben so zählte man die Tage der zweiten Dekade, von eins bis neun, mit dem Beisaze ἐπί δέκα, zu oder über zehn. Der zwanzigste hieß εἰκάς. Vom 21sten an zählte man entweder gleichfalls von eins an, mit dem Zusaze ἐπι εἰκάδι, über zwanzig, oder gewöhnlicher dem schwindenden Lichte des Mondes gemäß rückwärts, wie bei den Römern

die Tage vor den Calendae, mit dem Zusatze φθίνοντος, des zu Ende gehenden Monates, um sogleich bemerklich zu machen, wie viel Tage das Mondlicht noch vorhalten werde. So hieß der vorletzte Tag der zweite vom Ende, und der 21. Monatstag entweder der zehnte oder elfte vom Ende, je nachdem der Monat 30 oder 29 Tage hatte, voll oder hohl war. Den letzten Tag nannte man ἕνη καὶ νέα, den alten und neuen, weil er dem alten und neuen Monate zugleich angehört.

153.

Jahranfang und Jahrzählung.

Das bürgerliche Jahr der Athener fing mit dem Hekatombäon im Sommer um die Zeit der Sonnenwende an.

Ihre Jahre benannten sie nach ihrer jeweiligen höchsten Staatsperson. Zuerst wurden sie von Königen, dann von lebenslänglichen Archonten, den Medontiden, weiterhin von zehnjährigen Archonten, und endlich von 9 einjährigen regiert, von denen der vornehmste vorzugsweise der Archon hieß und dem Jahre den Namen gab. Das Chronologische der früheren Geschichte Athens ist in Dunkel gehüllt; erst mit den zehnjährigen Archonten fängt es an zu tagen. Später gebrauchten die attischen Schriftsteller, gleich den übrigen Griechen, die olympische Aere (§. 148).

154.

Schaltrechnung.

I. Aeltere Schaltrechnung. Der erste Schritt, den die Athener zu einer geregelten Zeitrechnung machten, war der, daß sie, auf Solon's Geheiß, um's Jahr 594 vor Chr., den Wechsel der 30 und 29tägigen Monate, von den Griechen μῆνες πλήρεις und κοῖλοι, volle und hohle genannt, einführten, wodurch sie ein Jahr von 354 Tagen erhielten. Um dies nun mit dem Sonnenlaufe auszugleichen, schalteten sie anfangs ein Jahr um's andere einen 30tägigen Monat ein. So entstand ein zweijähriger Schaltkreis — τριετήρις — weil man, nach ihrer Art sich auszudrücken, in jedem dritten Jahre einschaltete. Bald jedoch bildeten sie einen achtjährigen Schaltkreis — ὀκταετήρις, — indem sie in 8 Jahren 3 Mal einschalteten, und zwar im 3., 5. und 8. Jahre, so daß solche 8 Jahre $8.\ 12 + 3 = 99$ Monate oder $8.\ 354 + 3.\ 30 = 2922$ Tage enthielten, daher ihr mittlerer Mondmonat $2922 : 99 = 29\frac{17}{33}$ Tage $= 29$ T. 12 St. 21′ 49″ und ihr mittleres Jahr $2922 : 8 = 365\frac{1}{4}$ Tage dauerte.

II. Meton's Schaltrechnung. Als sie jedoch diesen achtjährigen Schaltkreis, im Vergleiche mit dem Monde, etwas zu kurz erkannten, mußten

sie, um ihre Monatsanfänge an den Neumonden zu erhalten, zuweilen einen Tag einschieben, wobei sie wahrscheinlich so lange ohne bestimmte Regel zu Werke gingen, bis der Athener Meton im ersten Jahre der 87. Olympiade oder 432 vor Chr. (§. 149, Beisp.) die Entdeckung machte, daß 235 Mondmonate bis auf einen geringen Unterschied 19 Sonnenjahre geben. Dieser Astronom construirte nun einen 19jährigen Schaltkyklus — ἐννεακαιδεκαετήρις — von 6940 Tagen, die er so geschickt in Monate einzutheilen verstand, daß diese während des ganzen Kyklus mit den Mondwechseln übereinstimmten. Das mittlere Jahr dieses Kyklus hielt demnach $6940 : 19 = 365\frac{5}{19}$ Tage = 365 T. 6 St. 19′, also um 30 Min. zu viel; und sein mittlerer Monat $29\frac{25}{47}$ Tage = 29 T. 12 St. 45′ 57″, folglich um 1′ 54″ zu viel (§. 13). Da ferner 19 tropische Jahre zu 365 T. 5 St. 48′ 48″ eine Dauer von 6939 T. 14 St. 27′ 12″ und 235 synodische Monate zu 29 T. 12 St. 44′ 2·8288″ eine Dauer von 6939 T. 16 St. 31′ 4·″65 haben, so eilt der metonische Schaltkyklus von 6940 Tagen der Sonne um 9 St. 32′ 48″ und dem Monde um 7 St. 28′ 55·35″ vor. Mit diesem Schaltkreise verband Meton einen Kalender (παραπήγμα oder κανῶν), der außer der Dauer der Monate die Feste, die Erscheinungen am Himmel, die Witterungswechsel u. dgl. angab, und von den Griechen mit großem Beifall aufgenommen ward.

Höchst wahrscheinlich verlegte Meton die 7 Schaltjahre in seinem 19jährigen Schaltkreise während der beiden ersten 8jährigen Zeiträume auf eben die Jahre, an welche sich die Athener bei ihrer Octaeteris gewöhnt hatten, und auf das Schlußjahr des Kyklus, also auf die Jahre 3, 5, 8; 11, 13, 16; 19.

III. Kallippische Schaltrechnung. Der Astronom Kallippus, um 315 vor Chr., ein Zeitgenosse Alexander's d. Gr., fand, daß Meton das Sonnenjahr um $\frac{1}{76}$ Tag zu lang, nemlich in 4 seiner 19jährigen Perioden einen Tag zu viel, angenommen habe. Er stellte deswegen, indem er diesen überflüssigen Tag wegließ, eine 76jährige Schaltperiode auf von $4 . 235 = 940$ Monaten oder von $4 . 6940 - 1 = 27759$ Tagen. Seine Schaltrechnung stimmte sowohl mit der Sonne als auch mit dem Monde besser als die metonische überein; denn sein mittleres Jahr hielt $365\frac{1}{4}$ Tag, wie das julianische, und sein mittlerer Monat 29 T. 12 St. 44′ $25\frac{1}{2}$″, also nur um 22″ zu viel. In den Grundsätzen, nach denen Meton die Schaltjahre vertheilte, scheint Kallippus, nach den Versicherungen des Geminus, nichts geändert zu haben.

IV. Hipparchische Schaltrechnung. Der große Astronom Hipparch, 130 vor Chr., fand, daß Kallippus das Sonnenjahr noch um $\frac{1}{300}$ Tag oder 4′ 48″ zu lang angenommen habe. Nach seiner Bestimmung hielt es demnach 365 T. 5 St. 55′ 12″. Jede 76jährige Periode hielt er demnach um $\frac{76}{300}$

nahe $\frac{1}{4}$ Tag zu lang, deswegen brachte er eine neue aus vier 76jährigen kallippischen Perioden weniger einem Tage bestehende Schaltperiode in Vorschlag. Diese enthielt daher $4.76 = 304$ Jahre in $4.940 = 3760$ Monaten und in $4.27759 - 1 = 111035$ Tagen; ihr mittleres Jahr dauerte daher 365 T. 5 St. 55′ 15″, und ihr mittlerer Monat 29 T. 12 St. 44′ $2\frac{1}{2}$″, fast eben so lang, als Hipparch durch seine Beobachtungen und Rechnungen gefunden hatte. Hipparch's Schaltrechnung scheint jedoch nur wenig oder gar nicht in Gebrauch gekommen zu sein.

A. Metonische Zeitrechnung der Athener.

155.

Vergleichung der metonischen Jahre mit den olympischen.

Sei A ein Jahr der olympischen Aere und a das mit ihm übereinkommende Jahr der metonischen Zeitrechnung, so hat man, wenn man mit Ideler annimmt, daß die metonische Zeitrechnung im ersten Jahre der 87. Olympiade oder im $4.86 + 1 = 345^{\text{sten}}$ olympischen Jahre zu Athen in Gebrauch gekommen ist, vermöge §. 32, (49) die Vergleichungen

$$(259) \qquad a = A - 344, \quad A = a + 344.$$

156.

Vertheilung der metonischen Schaltjahre.

Meton machte, wie Ideler als sehr wahrscheinlich nachweist, in seinem 19jährigen Schaltkreise die 7 Jahre 3, 5, 8, 11, 13, 16, 19 zu Schaltjahren; daher ist jedes metonische Jahr ein Schaltjahr, wenn es durch 19 getheilt eine dieser Zahlen zum außerordentlichen Reste gibt.

Sucht man nun (§. 24, (5) u. XXII, 3) die Anzahl e der vor dem metonischen Jahre a eingeschalteten Monate, so hat man $\varpi = 19$, $\varepsilon = 7$, $\xi = 3, 5, 8, 11, 13, 16, 19$, also $\Sigma\xi \equiv 3 + 5 + 8 - 8 - 6 - 3 + 0$, mod $19 \equiv -1$, mithin $\delta \equiv -4 + 1 \equiv -3$, mod 19. Dieser Werth ist in der That richtig, denn $7\chi \equiv 1$, mod 19 gibt $\chi \equiv -8$, daher $x \equiv 8(z-2)$ $\equiv 8z + 3$, und

sonach ist für	$z = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
die Zahl	$x = 3,\ 11,\ 19,\ 8,\ 16,\ 5,\ 13,$

allen jenen ausgezeichneten Werthen gleich.

Bis zum Jahre a gibt es daher metonische Schaltmonate

$$(260) \qquad e = q\frac{7a - 3}{19};$$

jedes metonische Jahr a ist ein Schaltjahr, wenn

$$r\frac{7a - 3}{19} > 11 \text{ ist;}$$

und überhaupt enthält dieses Jahr a

$$(261)\qquad \Delta e = \mathfrak{q}\frac{7a+4}{19} - \mathfrak{q}\frac{7a-3}{19} = \mathfrak{q}\frac{7+\mathfrak{r}\frac{7a-3}{19}}{19} \text{ Schaltmonate.}$$

Das Jahr a des Meton ist in der

$$\pi = \mathfrak{Q}\frac{a}{19} + 1^{ten} \text{ metonischen Schaltperiode}$$

das

$$\alpha = \mathfrak{R}\frac{a}{19}\text{te Jahr;}$$

also

$$a = 19\,\mathfrak{Q}\frac{a}{19} + \mathfrak{R}\frac{a}{19} = 19(\pi - 1) + \alpha.$$

Mithin gibt es vor ihm

$$(262)\qquad e = 7(\pi - 1) + \mathfrak{q}\frac{7\alpha - 3}{19} \text{ Schaltjahre;}$$

das Jahr a enthält

$$(263)\qquad \Delta e = \mathfrak{q}\frac{7+\mathfrak{r}\frac{7\alpha-3}{19}}{19} \text{ Schaltmonate,}$$

und es ist ein Schaltjahr, so oft $\mathfrak{r}\frac{7\alpha-3}{19} > 11$ ausfällt.

157.

Vertheilung der hohlen Monate in dem metonischen Schaltkreise.

Das Princip, nach welchem Meton die vollen und hohlen Monate in seinem 19jährigen Schaltkyklus wechseln ließ, war nach Geminus *) folgendes.

Unter den 235 Monaten dieses Kyklus mußten aus folgendem Grunde 110 hohl sein. Sind alle Monate voll, so gibt dies für die ganze Periode 235. 30 = 7050 Tage. Sie soll aber nur 6940 halten; es müssen daher 7050 — 6940 = 110 Monate hohl gezählt werden. Damit nun die auszumerzenden Tage möglichst gleichförmig vertheilt werden, dividirte man 7050 durch 110, was sehr nahe 64 gibt. Es ist demnach jeder 64. Tag des Schaltkyklus ein auszumerzender — ἐξαιρέσιμος; weswegen jener Monat hohl genommen wird, auf den der ἐξαιρέσιμος trifft. In μ vollen Monaten oder 30μ Tagen werden daher $30\mu : 64 = 15\mu : 32$ Tage ausgestoßen. Diese Anzahl ist genau eine ganze Zahl ε, nemlich $15\mu : 32 = \varepsilon$, wenn $\mu = 32$ ist, wornach $\varepsilon = 15$ wird. Somit werden unter jeden 32 Monaten 15 hohl anzunehmen sein. Nun fällt der ε^{te} auszumerzende Tag auf den $64\varepsilon^{ten}$ Tag, daher in den $\mu = \mathfrak{Q}\frac{64\varepsilon}{30} + 1 = 2\varepsilon + \mathfrak{Q}\frac{2\varepsilon}{15} + 1^{ten}$ Monat, wenn dieser voll gerechnet wird. Setzt man hierin $\varepsilon = 1, 2, \ldots 15$, so erhält man unter den 32 Monaten

*) Isagoge in Arati phaenomena. Vergl. Ideler Handb. 1. B. S. 298 u. 331.

alle jene 15 Monate, welche hohl zu rechnen sind, nemlich $\mu = 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32$. Unter den 235 Monaten kommen nun solcher 32monatlicher Perioden 7, mit $7.15 = 105$ hohlen Monaten vor. Die achte unvollständige derartige Periode wird daher nur $235 - 7.32 = 11$ Monate enthalten, worunter $110 - 105 = 5$ hohl sein sollen; sie kann daher eben so wie die vollständigen bis zum 11ten Monate gestaltet sein.

Sind nun allgemein vor dem μ^{ten} Monate des metonischen Schaltkreises ε Tage auszustoßen oder ε Monate hohl zu nehmen, so wird man, in Vorbegr. XXII, 3, zu sezen haben $\varpi = 32$, $\varepsilon = 15$, $\xi = 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32$, also $\Sigma\xi \equiv 7$, mod 32 und $\delta = -15$; daher ist nach Geminus

$$\varepsilon = \text{q}\frac{15(\mu-1)}{32}.$$

Ideler nimmt in seinem Entwurfe des metonischen Kanons nicht den 18ten, sondern den 17ten Monat in der 32monatlichen Periode hohl. Zu dieser Abweichung veranlaßt ihn eine Inschrift, von der er völlig überzeugend nachweist, daß sie in ein Schaltjahr zu sezen ist, das mit zwei vollen Monaten anfing. *) Nun nehmen die Jahre

3, 5, 8, 11, 13, 16, 19 des 19jährigen Schaltzyklus, welche Schaltjahre sind, ihren Anfang in den Monaten

25, 50, 87, 124, 149, 186, 223 dieses 235monatlichen Kyklus, also auch in den Monaten

25, 18, 23, 28, 21, 26, 31 des 32monatlichen Kreises.

Mithin läßt sich füglich blos im Schaltjahre 5 der hohle Monat 18 des 32monatlichen Kreises voll machen, und da der ihm folgende 19te Monat voll bleiben muß, so kann man nur den 17ten in einen hohlen umwandeln.

Bei dieser Veränderung vermindert sich $\Sigma\xi$ im unmittelbar Vorhergehenden um 1, und δ wächst um 1, daher wird $\delta = -15 + 1$ und die Zahl der hohlen Monate vor dem μ^{ten} im Schaltkreise nach Ideler

$$(264) \qquad \varepsilon = \text{q}\frac{15(\mu-1)+1}{32}.$$

Die Wiederherstellung des 19jährigen metonischen Kanons, die Vertheilung der Schaltjahre und hohlen Monate in ihm, bleibt zwar bei dem Mangel zureichender Daten immerhin mißlich; allein schon der eine Umstand, den Ideler über allen Zweifel erhebt, daß das 5te Jahr im metonischen Schaltkreise ein Schaltjahr war, und mit zwei vollen Monaten anfing, macht es höchst wahrscheinlich, daß die von diesem kritischen Chronologen angegebene Reihe der 7 metonischen Schaltjahre sowohl als der 15 hohlen Monate richtig sei;

*) Handb. 1. Bd. S. 334, 383 und 343.

zumal keine der Reihen solcher Schaltjahre, die wir in §. 23, II, der allgemeinen Chronologie anführten, mit einer der Reihen von hohlen Monaten, die wir in §. 21, II, kennen lernten, dergestalt sich combiniren läßt, daß ein Schaltjahr mit zwei vollen Monaten anfängt. Wir tragen daher kein Bedenken, sowohl obigen Ausdruck von e als diesen lezten von ε unseren weiteren Forschungen in der attischen Zeitrechnung zum Grunde zu legen.

Vor dem μ^{ten} Monate im metonischen Schaltkreise befinden sich daher

(264) $\varepsilon = \mathfrak{q}\frac{15(\mu-1)+1}{32}$ hohle Monate,

und der μ^{te} Monat selbst wird verkürzt um

(265) $\Delta\varepsilon = \mathfrak{q}\frac{15\mu+1}{32} - \mathfrak{q}\frac{15(\mu-1)+1}{32} = \mathfrak{q}\frac{15+\mathfrak{r}\frac{15\mu-14}{32}}{32}$ Tage,

so daß er allgemein $30 - \Delta\varepsilon$ Tage enthält und sonach hohl ausfällt, so oft

$$\mathfrak{r}\frac{15\mu-14}{32} > 16 \text{ ist.}$$

158.

Zu einem Jahre, Monate und Tage angeben, der wie vielte Tag er in der metonischen Zeitrechnung ist.

Sei der t^{te} Tag des m^{ten} Monates im a^{ten} metonischen Jahre gegeben, und zu bestimmen, der wie vielte er in der metonischen Zeitrechnung ist. Da das Jahr a in der π^{ten} Schaltperiode das Jahr $\alpha = \mathfrak{R}\frac{a}{19}$ ist, so sind in dieser Periode vor ihm $\alpha - 1$ Jahre mit $12(\alpha-1)$ gewöhnlichen und $\mathfrak{q}\frac{7\alpha-3}{19}$ Schaltmonaten; folglich ist sein m^{ter} Monat in derselben Periode der Monat

(266) $\mu = 12(\alpha-1) + \mathfrak{q}\frac{7\alpha-3}{19} + m.$

Bis zu diesem Monate μ verfließen von dem Schaltkreise $\mu - 1$ Monate, die voll gerechnet $30(\mu - 1)$ Tage halten würden, von denen aber ε hohl sind oder um einen Tag weniger haben, daher vergehen im Ganzen $30(\mu - 1) - \varepsilon$ Tage. Jener t^{te} Tag im m^{ten} Monate ist daher in dem π^{ten} Schaltkyklus der Tag

(267) $\delta = 30(\mu-1) - \varepsilon + t = 30(\mu-1) - \mathfrak{q}\frac{15(\mu-1)+1}{32} + t.$

Die $\pi - 1$ Kykeln vor dem π^{ten} enthalten ferner $6940(\pi - 1)$ Tage. Ist demnach jener angegebene Tag der n^{te} in der metonischen Zeitrechnung, so ist

(268) $n = 6940(\pi-1) + \delta.$

Oder man findet den Monat

(269) $\mu = 12(\mathfrak{R}\frac{a}{19} - 1) + \mathfrak{q}\frac{7\mathfrak{R}\frac{a}{19} - 3}{19} + m$

und den Tag

(270) $n = 6940\mathfrak{Q}\frac{a}{19} + 30(\mu-1) - \mathfrak{q}\frac{15(\mu-1)+1}{32} + t.$

Fällt der 0. Tag des Jahres a, also auch seines ersten Monates in den Monat μ' und auf den Tag δ' des π^{ten} Schaltkyklus, so ist, für $m = 1$ und $t = 0$,

$$\mu' = 12(\alpha - 1) + \mathrm{q}\frac{7\alpha - 3}{19} + 1$$

$$\delta' = 30(\mu' - 1) - \mathrm{q}\frac{15(\mu' - 1) + 1}{32}.$$

Daraus folgt $\mu - \mu' = m - 1$

und $$\delta - \delta' = 30(\mu - \mu') - \mathrm{q}\frac{15(\mu - \mu') + \eta}{32} + t,$$

wenn der Kürze halber

$$\eta = \mathrm{r}\frac{15(\mu' - 1) + 1}{32}$$

gesezt wird. Soll aber der angegebene t^{te} Tag im m^{ten} Monate des Jahres a der d^{te} Tag dieses Jahres sein, so ist

$$d = \delta - \delta'$$

also auch $$d = 30(m - 1) - \mathrm{q}\frac{15(m - 1) + \eta}{32} + t,$$

und hierin zählt der Ausdruck $\mathrm{q}\frac{15(m-1)+\eta}{32}$ die hohlen Monate vor dem m^{ten} im Jahre a.

Für η findet man die Ausdrücke

$$\eta \equiv 15(\mu' - 1) + 1, \text{ mod } 32 = 0, 1, \ldots 31$$

$$\equiv -12\alpha + 15\mathrm{q}\frac{7\alpha - 3}{19} + 13,$$

oder, weil $19\mathrm{q}\frac{7\alpha-3}{19} = 7\alpha - 3 - \mathrm{r}\frac{7\alpha-3}{19}$, $19. - 5 = -95 \equiv 1, \text{ mod } 32$

$19. - 75 \equiv 19. - 11 \equiv 15$

also $$15\mathrm{q}\frac{7\alpha - 3}{19} \equiv -13\alpha + 11\mathrm{r}\frac{7\alpha - 3}{19} + 1 \text{ ist,}$$

auch $$\eta \equiv 7\alpha + 11\mathrm{r}\frac{7\alpha - 3}{19} + 14, \text{ mod } 32.$$

Will man sich mit einem angenäherten Werthe von n begnügen, so erwäge man, daß Meton's mittleres Jahr $365\frac{5}{19}$ und sein mittlerer Monat $29\frac{25}{47}$ Tage hält. Da nun bis zum t^{ten} Tage des m^{ten} Monates im a^{ten} Jahre $a - 1$ Jahre und $m - 1$ Monate verflossen sind, so ist angenähert

(271) $$n = 365\tfrac{5}{19}(a - 1) + 29\tfrac{25}{47}(m - 1) + t.$$

Hierin nimmt man für die Summe der beiden ersten Glieder die ihrem Werthe am nächsten kommende ganze Zahl.

159.

Zu einem Tage der metonischen Zeitrechnung das Jahr, den Monat und Tag bestimmen, worauf er trifft.

I. Ist der n^{te} Tag der metonischen Zeitrechnung angegeben, so liefert die bestehende Gleichung (268)

$$6940(\pi - 1) + \delta = n$$

sogleich die Anzahl der vollen Schaltkreise vor ihm

$$(272) \qquad \pi - 1 = \mathfrak{Q}\frac{a}{19} = \mathfrak{Q}\frac{n}{6940}$$

und die Nummer δ dieses Tages in der laufenden

$$\pi = \mathfrak{Q}\frac{a}{19} + 1 = \mathfrak{Q}\frac{n}{6940} + 1^{\text{ten}} \text{ Periode}$$

$$(273) \qquad \delta = \mathfrak{R}\frac{n}{6940}.$$

Dazu gibt nun die Gleichung (267)

$$30(\mu - 1) - \mathfrak{q}\frac{15(\mu-1)+1}{32} + t = \delta \text{ welche, weil}$$

$$\mu = 32\mathfrak{Q}\frac{\mu}{32} + \mathfrak{R}\frac{\mu}{32} \text{ ist, auch in die Form}$$

$$945\mathfrak{Q}\frac{\mu}{32} + 30(\mathfrak{R}\frac{\mu}{32} - 1) - \mathfrak{q}\frac{15(\mathfrak{R}\frac{\mu}{32} - 1)+1}{32} + t = \delta$$

gebracht werden kann,

$$(274) \qquad \mathfrak{Q}\frac{\mu}{32} = \mathfrak{Q}\frac{\delta}{945}$$

und
$$30(\mathfrak{R}\frac{\mu}{32} - 1) - \mathfrak{q}\frac{15(\mathfrak{R}\frac{\mu}{32} - 1)+1}{32} + t = \mathfrak{R}\frac{\delta}{945}.$$

Nimmt man demnach

$$\mathfrak{R}\frac{\mu}{32} - 1 = \mathfrak{Q}\frac{\mathfrak{R}\frac{\delta}{945}}{30} + \Delta\mu,$$

also

$$(275) \qquad \mathfrak{R}\frac{\mu}{32} = \mathfrak{Q}\frac{\mathfrak{R}\frac{\delta}{945}}{30} + 1 + \Delta\mu,$$

wobei $\Delta\mu$ nur eine der Zahlen 0 oder 1 sein kann; so findet man

$$(276) \qquad t = \mathfrak{R}\frac{\mathfrak{R}\frac{\delta}{945}}{30} + \mathfrak{q}\frac{15(\mathfrak{R}\frac{\mu}{32} - 1)+1}{32} - 30\Delta\mu.$$

Man wird daher $\Delta\mu$ unter den Zahlen 0 und 1 so wählen, daß t mindestens 1 und höchstens $30 - \Delta s = 30$ oder 29 wird, wenn man $\Delta s = \mathfrak{q}\frac{15 + \mathfrak{r}\frac{15\mu - 14}{32}}{32} = 0$ oder 1 setzt, und darnach wird man sowohl $\mathfrak{R}\frac{\mu}{32}$ als t bestimmen. Aus diesem $\mathfrak{R}\frac{\mu}{32}$ und dem vorigen $\mathfrak{Q}\frac{\mu}{32}$ findet sich sogleich der Monat

$$\mu = 32\mathfrak{Q}\frac{\mu}{32} + \mathfrak{R}\frac{\mu}{32}.$$

II. Auch folgender Weg führt zur Kenntniß von μ und t. Multiplicirt man die Gleichung (267)

$$30(\mu - 1) - \mathfrak{q}\frac{15(\mu-1)+1}{32} + t - 1 = \delta - 1 \quad \text{mit } 32,$$

so erhält man

$$945(\mu-1) + 32(t-1) + \mathfrak{r}\frac{15(\mu-1)+1}{32} + 1 = 32(\delta - 1) + 2 = 32\delta - 30.$$

Da die drei lezten Glieder im ersten Theile von 1 bis 960 sich erstrecken, so findet man

$$(277) \qquad \mu - 1 = \mathfrak{Q}\frac{32\delta - 30}{945}$$

$$\mu = \mathfrak{Q}\frac{32\delta - 30}{945} + 1,$$

$$t = \left(\mathfrak{R}\frac{32\delta - 30}{945} - \mathfrak{r}\frac{15(\mu - 1) + 1}{32} + 31\right) : 32.$$

Der Monat μ wird verkürzt um $\Delta\varepsilon = \mathfrak{q}\frac{15 + \mathfrak{r}\frac{15\mu - 14}{32}}{32} = 0, 1$ Tage und enthält daher $30 - \Delta\varepsilon$ Tage, mithin kann t blos von 1 bis $30 - \Delta\varepsilon = 29$ oder 30 reichen.

III. Um dann noch $\alpha = \mathfrak{R}\frac{a}{19}$ und m zu berechnen, benützt man die Gleichung (266)

$$12(\alpha - 1) + \mathfrak{q}\frac{7\alpha - 3}{19} + m = \mu,$$

welche sogleich

$$(278) \qquad \alpha - 1 = \mathfrak{Q}\frac{\mu}{12} - \Delta\alpha$$

$$\alpha = \mathfrak{R}\frac{a}{19} = \mathfrak{Q}\frac{\mu}{12} + 1 - \Delta\alpha$$

gibt, wo $\Delta\alpha = 0, 1$ sein kann. Dann ist

$$(279) \qquad m = \mathfrak{R}\frac{\mu}{12} - \mathfrak{q}\frac{7\alpha - 3}{19} + 12\Delta\alpha.$$

Man wählt daher $\Delta\alpha$ so, daß m von 1 bis höchstens $12 + \Delta e = 12$ oder 13 reicht, wobei $\Delta e = \mathfrak{q}\frac{7 + \mathfrak{r}\frac{7\alpha - 3}{19}}{19} = 0, 1$ die Anzahl der Schaltmonate des Jahres a oder α angibt.

IV. Oder multiplicirt man die Gleichung (266)

$$12(\alpha - 1) + \mathfrak{q}\frac{7\alpha - 3}{19} + m = \mu$$

mit 19, so erhält man

$$235(\alpha - 1) - \mathfrak{r}\frac{7\alpha - 3}{19} + 19m = 19\mu - 4$$

also

$$\alpha - 1 = \mathfrak{Q}\frac{19\mu - 4}{235}$$

$$\alpha = \mathfrak{Q}\frac{19\mu - 4}{235} + 1$$

$$m = \left(\mathfrak{R}\frac{19\mu - 4}{235} + \mathfrak{r}\frac{7\alpha - 3}{19}\right) : 19.$$

Kennt man nun $\pi - 1$ und α oder $\mathfrak{Q}\frac{a}{19}$ und $\mathfrak{R}\frac{a}{19}$, so ist das verlangte Jahr

$$a = 19(\pi - 1) + \alpha = 19\,\mathfrak{Q}\frac{a}{19} + \mathfrak{R}\frac{a}{19}.$$

V. Will man a, m, t angenähert erhalten, so gibt die Gleichung (271)

$$365\tfrac{5}{19}(a-1)+29\tfrac{25}{47}(m-1)+t=n$$

sogleich das Jahr

$$(280)\qquad a=\mathfrak{Q}\frac{n}{365\frac{5}{19}}+1$$

den Monat

$$(281)\qquad m=\mathfrak{Q}\frac{\mathfrak{R}\frac{n}{365\frac{5}{19}}}{29\frac{25}{47}}+1$$

und den Tag

$$(282)\qquad t=\mathfrak{R}\frac{\mathfrak{R}\frac{n}{365\frac{5}{19}}}{29\frac{25}{47}}.$$

Man kann diese vorläufig genäherten Werthe von a, m, t benüzen, um durch leicht zu findende Verbesserungen die genauen Werthe dieser Größen zu berechnen.

160.

Vergleichung der metonischen Zeitrechnung mit anderen Zeitrechnungen.

Die metonische Zeitrechnung begann mit dem 1 Hekatombäon des ersten Jahres der 87. Olympiade am Abende des 16 Julius im Jahre 432 vor Chr. Da nun die bürgerlichen Tage der Athener mit dem Sonnenuntergange anfingen, mithin bei ihnen zuerst die Nacht und dann der Tag kam; es aber bei der Vergleichung ihrer Zeitrechnung mit der römischen und christlichen wünschenswerth ist, so wie in dieser den Tag mit der Mitternacht anzufangen: so verlegen wir den Anfang jedes attischen Tages in unserer Rechnung von dem Abende auf die nächst folgende Mitternacht, und lassen sonach den 1 Hekatombäon des Jahres 1 der metonischen Zeitrechnung mit der Mitternacht des 17 Julius 432 vor Chr. anheben, und daher größtentheils mit diesem julianisch-römischen Tage übereinkommen. Auf diesen Unterschied der Tagesanfänge wird man demnach blos bei einer solchen Begebenheit Bedacht zu nehmen haben, welche an einem attischen Tage nach dem Abende, womit er begann, und vor seiner Mitternacht, also ungefähr in seinen ersten sechs Stunden, sich zutrug, und daher nicht in den von der Rechnung angegebenen julianisch-römischen Tag, sondern auf den Abend des nächst vorhergehenden solchen Tages zu sezen kommt.

Die Epoche der metonischen Zeitrechnung trifft demnach in das Jahr der byzantinischen Weltäre $-431+5508=5077$ auf dessen 17 Julius oder 320. Tag; und steht daher von der Epoche dieser byzantinischen Weltäre um $5076.365+\mathfrak{Q}\frac{5076}{4}+319=1854328$ Tage ab.

Soll nun ein Datum aus der metonischen Zeitrechnung in eine andere, oder umgekehrt aus dieser in jene übertragen werden; so wird man sich an das von uns aufgestellte allgemeine Verfahren (in §. 31) halten oder daraus für einzelne Fälle besondere Vorschriften ableiten.

161.

Fortsezung.

Ein solcher Fall tritt bei der **Reduction der Data der metonischen Zeitrechnung auf die christliche** alt. St. ein. Bezeichnet man hier die auf die christliche Zeitrechnung sich beziehenden Zahlen mit accentuirten Buchstaben, so ist

$$g = 1854328, \quad g' = 2011919$$

$$n' = 6940\,\mathfrak{E}\frac{a}{19} + \delta - 157591$$

$$= 365\left(19\,\mathfrak{E}\frac{a}{19} - 432\right) + 5\,\mathfrak{E}\frac{a}{19} + \delta + 89,$$

also wenn man abkürzend

$$(283) \qquad 5\,\mathfrak{E}\frac{a}{19} + \delta + 89 = b$$

sezt,

$$(284) \qquad a' = 19\,\mathfrak{E}\frac{a}{19} - 431 + \mathfrak{E}\frac{b}{365} - \Delta a$$

$$= a - 431 - \mathfrak{R}\frac{a}{19} + \mathfrak{E}\frac{b}{365} - \Delta a$$

$$d' = \mathfrak{R}\frac{b}{365} - \mathfrak{E}\frac{a'}{4} + 365\Delta a.$$

Will man, weil alle in der Astronomie und Weltgeschichte auf uns gekommenen metonischen Data in die Zeit vor Christi Geburt fallen, lieber a′ das entsprechende Jahr vor Chr. andeuten lassen, welches dem Jahre — (a′ — 1) nach Chr. gleich gilt, so hat man oben a′ durch — (a′ — 1) zu ersezen. Darnach findet man

$$(285) \qquad a' = 432 - a + \mathfrak{R}\frac{a}{19} - \mathfrak{E}\frac{b}{365} + \Delta a$$

$$d' = \mathfrak{R}\frac{b}{365} + \mathfrak{E}\frac{a'}{4} + 1 + 365\Delta a.$$

Soll demnach der t^{te} Tag des m^{ten} Monates im a^{ten} metonischen Jahre (welches ein Schaltjahr ist, so oft $\mathfrak{R}\frac{a}{19} = 3, 5, 8, 11, 13, 16, 19$ ausfällt) in die christliche Aere übertragen werden, so sucht man zunächst den in dem laufenden 19jährigen Schaltkreise entsprechenden Monat

$$(269) \qquad \mu = 12\left(\mathfrak{R}\frac{a}{19} - 1\right) + \mathfrak{E}\frac{7\mathfrak{R}\frac{a}{19} - 3}{19} + m$$

und den Tag

$$(267) \qquad \delta = 30(\mu - 1) - \mathfrak{E}\frac{15(\mu - 1) + 1}{32} + t;$$

sezt dann abkürzend

$$(283) \qquad b = 5\,\mathfrak{Q}\frac{a}{19} + \delta + 89$$

und findet für die Zeit nach Chr.

das Jahr $\qquad a' = 19\,\mathfrak{Q}\frac{a}{19} - 431 + \mathfrak{Q}\frac{b}{365} - \Delta a$

$\qquad\qquad = a - 431 - \mathfrak{R}\frac{a}{19} + \mathfrak{Q}\frac{b}{365} - \Delta a$

und den Tag $\qquad d' = \mathfrak{R}\frac{b}{365} - \mathfrak{Q}\frac{a'}{4} + 365\Delta a,$

dagegen für die Zeit vor Chr.

das Jahr $\qquad a' = 432 - 19\,\mathfrak{Q}\frac{a}{19} - \mathfrak{Q}\frac{b}{365} + \Delta a$

$\qquad\qquad = 432 - a + \mathfrak{R}\frac{a}{19} - \mathfrak{Q}\frac{b}{365} + \Delta a$

und den Tag $\qquad d' = \mathfrak{R}\frac{b}{365} + \mathfrak{Q}\frac{a'}{4} + 1 + 365\Delta a.$

Jeden Falls wird hier $\Delta a = 0$, 1 oder — 1 so gewählt, daß d' positiv und nicht größer als die Anzahl der Tage des Jahres a' ausfällt.

Will man sich mit einer ungefähren Bestimmung begnügen, so kann man nach (271)

für die Zeit vor Chr. nehmen

$$a' = 433 - a - \Delta a$$
$$d' = 29\tfrac{25}{47}(m-1) + t + 196 - 365\Delta a.$$

Das Jahr a' wird hier fast immer völlig richtig gefunden, allein d' kann sogar um $2(365 - 354) = 22$ Tage zu groß ausfallen.

Das metonische Jahr a

beginnt nemlich im Sommer des Jahres 433 — a vor Chr.

und endet » » » » 432 — a » »

und umgekehrt im Jahre a' vor Chr.

endigt sich das metonische Jahr 432 — a'

und beginnt » » » 433 — a'.

162.

Fortsezung. Anwendung.

1. Beispiel. Ptolomäus führt im Almagest *) drei von den Chaldäern vor Alexander zu Babylon beobachtete Mondfinsternisse mit ihren attischen und ägyptischen Datis an. So z. B. heißt es, die erste sei unter dem Archon Phanostratus im Monat Poseideon beobachtet, nach den Aegyptern in der Nacht vom 26 zum 27 Thoth des Jahres 366 seit Nabonassar. Die attischen Monatstage anzusezen war überflüssig, da die Athener ohnehin wußten, daß

*) L. IV, c. 10. Ideler Handb. 1. Bd. S. 222, 338.

die Mondfinsternisse um die Mitte, so wie die Sonnenfinsternisse um das Ende ihrer Monate eintrafen, wenn diese anders, was in der Regel gewiß der Fall war, mit einem Neumonde anfingen.

Sucht man nun das attische Datum dieser Mondfinsterniß, so ist (§. 31, 132, 159) $a' = 366$ und $d' = 27$ Thoth $= 27$.
Der 27 Thoth ist hier zu nehmen, weil die Mondfinsterniß in der Nacht oder ersten Hälfte desjenigen attischen Tages sich ereignete, in welchen der Anfang des 27 Thoth fiel, man mag diesen mit Ptolomäus auf den Mittag, oder mit den Alexandrinern auf den Morgen, oder mit den Aegyptern auf die Mitternacht sezen.

Dies gibt $n' = 365.365 + 27 = 133252.$

Ferner ist $g' = 1739133,\ g = 1854328$, daher

$$n = n' + g' - g = n' - 115195 = 18057 = 6940.2 + 4177$$

$$\mathfrak{Q}\frac{a}{19} = 2,\ \delta = 4177 = 945.4 + 397$$

$$\mathfrak{Q}\frac{\mu}{32} = 4,\ \mathfrak{R}\frac{\delta}{945} = 397 = 30.13 + 7$$

$$\mathfrak{R}\frac{\mu}{32} = 14 + \Delta\mu,\ t = 7 + 6 - 30\Delta\mu,\ \Delta\mu = 0$$

$$\mathfrak{R}\frac{\mu}{32} = 14,\ \mu = 4.32 + 14 = 142,\ t = 13.$$

$$\mu = 142 = 12.11 + 10$$

$$\mathfrak{R}\frac{a}{19} = \alpha = 12 - \Delta\alpha,\ m = 10 - \mathfrak{Q}\frac{11}{19} + 12\Delta\alpha,\ \Delta\alpha = 0$$

$$\alpha = 12,\ a = 2.19 + 12 = 50,\ m = 10 - 4 = 6 = \text{Poseideon}.$$

$$A = 50 + 344 = 394 = \text{Ol. } 99, 2.$$

Die Mondfinsterniß wurde demnach in der Nacht, d. i. in der ersten Hälfte, des 13. Poseideon im 50sten metonischen Jahre oder im zweiten Jahre der 99. Olympiade beobachtet, und in diesem Jahre war daher Phanostratus Archon zu Athen, was sich auch sonst bestätigt.

2. Beispiel. So wie die erste der drei erwähnten Mondfinsternisse unter dem Archon Phanostratus in den Poseideon gesezt ist, so wird die zweite unter demselben Archon in den Skirophorion, die dritte unter dem Archon Euandrus in den ersteren Poseideon gesezt. Nach den beigefügten ägyptischen Datis und Jahren der nabonassarischen Aere ist die erste am Morgen des 23 Decembers 383, die zweite am Abende des 18 Junius 382, und die dritte in der Nacht vom 12 zum 13 December desselben Jahres vor Chr. beobachtet worden. Die Reduction zeigt, daß sich alle drei Mondfinsternisse an den 18ten Tagen der attischen Monate ereignet haben. Wenn diese mit dem Himmel vollkommen übereingestimmt hätten, so würden sie an den 14ten Tagen haben eintreffen müssen. Daher sieht man, die Abweichung betrug damals schon einen

vollen Tag, was mit der zu großen Dauer des metonischen Schaltkyklus übereinstimmt (§. 154, II); und diese drei Beobachtungen fügen sich sehr gut in Ideler's Darstellung der metonischen Schaltrechnung.

3. Beispiel. Sei das metonische Datum der Geburt Plato's *), der 7 Thargelion Ol. 87, 3, auf das julianisch-christliche zu bringen.

Hier ist $A = \text{Ol. } 87, 3 = 4.86 + 3 = 347,$

also $a = 347 - 344 = 3 = 19.0 + 3,$ ein Schaltjahr,

folglich $m = \text{Thargelion} = 12.$ Daraus ergibt sich

$$\mu = 2.12 + q\frac{21 - 3}{19} + 12 = 24 + 12 = 36.$$

Ferner ist nach der Angabe $t = 7$, also

$$\delta = 30.35 - q\frac{525 + 1}{32} + 7 = 1050 - 16 + 7 = 1041$$

$$b = 1041 + 89 = 1130 = 365.3 + 35$$

vor Chr. $a' = 432 - 3 + \Delta a = 429 + \Delta a$

$$d' = 35 + 107 + 1 + 365\Delta a, \quad \Delta a = 0,$$

$$a' = 429 \equiv 1, \text{ mod } 4, \text{ ein Schaltjahr,}$$

$$d' = 143 = (143 - 121) \text{ Mai} = 22 \text{ Mai}.$$

Die Geburt Plato's fiel demnach in den attischen Tag, welcher vom Abend des 21 Mai bis zum Abende des 22 Mai 429 vor Chr. dauerte.

163.

Fortsezung. Benüzung von Tafeln.

Beabsichtigt man die Data der metonischen Zeitrechnung mittels Tafeln auf die christliche Zeitrechnung zu bringen, so wird man es am bequemsten finden, wie in den hier unten folgenden zwei Tafeln, einestheils diejenigen Monatstage des julianischen Jahres zusammen zu stellen, mit denen die nullten Tage sämmtlicher 12 oder 13 Monate eines jeden der 19 Jahre des ersten metonischen Kyklus übereinkommen, und anderntheils die Anzahl der Tage zu bestimmen, um welche die Tage der nemlichen Monate und Jahre in den späteren Schaltkykeln sich verschieben, was auf folgende Weise zu Stande gebracht wird.

Es sei ein Tag des Jahres a der metonischen Zeitrechnung in der christlichen Aere der Tag n', und im Jahre a' vor Chr. oder $-(a' - 1)$ nach Chr. der d'^{te} Tag, so ist (§. 55, (86),)

$$(286) \quad n' = -365a' + q\frac{-a'}{4} + d' = -365a' - q\frac{a' + 3}{4} + d'.$$

Derselbe Tag in dem nemlichen Monate und Jahre des $\Delta\pi^{ten}$ späteren Schaltkreises folgt, da $\Delta a = 19\Delta\pi$ ist, und $\Delta a' = -\Delta a$ gesezt werden kann, um $\Delta n' = \Delta n = 6940\Delta\pi$ Tage später.

---

*) Ideler Handb. I. 336,

Die vorige Gleichung gibt dazu

$$\Delta n' = -\ 365\Delta a' - \mathfrak{q}\frac{\Delta a' + \mathfrak{r}\frac{a'+3}{4}}{4} + \Delta d',$$

daher ist

$$(287) \qquad \Delta d' = \mathfrak{q}\frac{\Delta \pi + \mathfrak{r}\frac{a'-1}{4}}{4}.$$

Um diese $\Delta d'$ Tage trifft demnach im julianischen Jahre der nemliche Tag des nachfolgenden Schaltkreises später als der des ersten Kreises. Weil die metonische Zeitrechnung wahrscheinlich nur durch 8 Kykeln oder 152 metonische Jahre, von Ol. 87, 1 bis Ol. 124, 4, oder von 432 bis 281 vor Chr. zu Athen im Gebrauche stand, so ist $\Delta\pi = 1, 2, \ldots 7$, $\mathfrak{r}\frac{a'-1}{4} = 0, 1, 2, 3$, und $\Delta d' = 0, 1, 2$. Derselbe Tag in zwei Kykeln wird daher in der Regel in den nemlichen julianischen Monat fallen.

Nun ist (§. 52, (84),)

$$d' = 31(m'-1) - \mathfrak{q}\frac{5m'+1}{12} - (2-i)\,\mathfrak{q}\frac{m'+9}{12} + t',$$

folglich wegen der Unveränderlichkeit von m',

$$\Delta d' = \mathfrak{q}\frac{m'+9}{12}\Delta i + \Delta t'$$

und hiernach $$\Delta t' = \Delta d' - \mathfrak{q}\frac{m'+9}{12}\Delta i,$$

nemlich im Januar und Februar

$$\Delta t' = \Delta d',$$

und in den übrigen Monaten

$$\Delta t' = \Delta d' - \Delta i.$$

Endlich ist die Anzahl der Schalttage des Jahres a' vor Chr. (§. 55, I.)

$$i = \mathfrak{q}\frac{-(a'-1)}{4} - \mathfrak{q}\frac{-a'}{4} = \mathfrak{q}\frac{a'-1}{4} - \mathfrak{q}\frac{a'-2}{4},$$

folglich $$\Delta i = \mathfrak{q}\frac{\Delta a' + \mathfrak{r}\frac{a'-1}{4}}{4} - \mathfrak{q}\frac{\Delta a' + \mathfrak{r}\frac{a'-2}{4}}{4}$$

$$= \mathfrak{q}\frac{\Delta \pi + \mathfrak{r}\frac{a'-1}{4}}{4} - \mathfrak{q}\frac{\Delta \pi + \mathfrak{r}\frac{a'-2}{4}}{4}.$$

Befindet sich das vorausgehende Jahr im ersten Kyklus, so ist $\pi = 1$, daher $a = 19(\pi - 1) + \alpha = \alpha$ und $a' = 433 - \alpha - \omega$, wenn ω vom Anfang des attischen Jahres bis 31 December $= 0$ und vom 1 Januar bis zum Ende des attischen Jahres $= 1$ ist. Liegt zugleich das nachfolgende Jahr im π^{ten} Kyklus, so ist $\Delta\pi = \pi - 1$,

Man hat demnach

$$\Delta d' = \mathfrak{q}\frac{\pi - 1 + \mathfrak{r}\frac{-(\alpha+\omega)}{4}}{4} = \mathfrak{q}\frac{\pi + 3 - \mathfrak{R}\frac{\alpha+\omega}{4}}{4}$$

$$\Delta i = \mathfrak{q}\frac{\pi - 1 + \mathfrak{r}\frac{-(\alpha+\omega)}{4}}{4} - \mathfrak{q}\frac{\pi - 1 + \mathfrak{r}\frac{-(\alpha+\omega+1)}{4}}{4}$$

$$= \mathfrak{q}\frac{\pi + 3 - \mathfrak{R}\frac{\alpha+\omega}{4}}{4} - \mathfrak{q}\frac{\pi + 3 - \mathfrak{R}\frac{\alpha+\omega+1}{4}}{4}.$$

$$\Delta d' - \Delta i = \mathfrak{q}\frac{\pi + 3 - \mathfrak{R}\frac{\alpha+\omega+1}{4}}{4}.$$

Vom Anfange des metonischen Jahres im Juli oder Juni bis zum Ende des julianischen Jahres ist nun $\omega = 0$ und $m > 2$,

also $$\Delta t' = \Delta d' - \Delta i = \mathfrak{q}\frac{\pi + 3 - \mathfrak{R}\frac{\alpha+1}{4}}{4};$$

während des nachfolgenden Januars und Februars ist $\omega = 1$ und $m = 1, 2$,

daher $$\Delta t' = \Delta d' = \mathfrak{q}\frac{\pi + 3 - \mathfrak{R}\frac{\alpha+1}{4}}{4}$$ = dem vorigen Werthe;

endlich in den übrigen Monaten vom März bis zum Ende des metonischen Jahres im Juli oder Juni ist $\omega = 1$ und $m > 2$,

daher $$\Delta t' = \Delta d' - \Delta i = \mathfrak{q}\frac{\pi + 3 - \mathfrak{R}\frac{\alpha+2}{4}}{4},$$

und sonach gleich dem früheren Werthe im nächst folgenden metonischen Jahre $\alpha + 1$.

Es ist noch gut zu wissen, wann das spätere der beiden verglichenen metonischen Jahre, $19(\pi - 1) + \alpha$, in einem julianischen Schaltjahre sich endigt. Dieses Jahr ist $483 - 19(\pi - 1) - \alpha - 1$ vor Chr., also $\equiv 1$, mod 4, wenn es ein Schaltjahr wird; mithin $\alpha \equiv \pi - 2$, mod 4.

Tafel 1.

Vergleichung des metonischen Kanons mit dem julianischen Kalender.

Jahr des ersten Cyklus 1	0 Hekatombäon	0 Metageitnion	0 Boëdromion	0 Pyanepsion	0 Mämakterion	0 Poseideon I.	0 Poseideon II.	0 Gamelion	0 Anthesterion	0 Elaphebolion	0 Munychion	0 Thargelion	0 Skirophorion
1	16 Jul.	15 Aug.	14 Sep.	13 Oct.	12 Nov.	11 Dec.	.	10 Jan.	8 Feb.	10 Mar.	8 Apr.	8 Mai.	6 Jun.
2	6 Jul.	4 Aug.	3 Sep.	2 Oct.	1 Nov.	30 Nov.	.	30 Dec.	29 Jan.	27 Feb.	29 Mar.	27 Apr.	27 Mai.
ε 3	25 Jun.	25 Jul.	23 Aug.	22 Sep.	21 Oct.	20 Nov.	19 Dec.	18 Jan.	16 Feb.*	17 Mar.	16 Apr.	15 Mai.	14 Jun.
4	13 Jul.	12 Aug.	10 Sep.	10 Oct.	8 Nov.	8 Dec.	.	6 Jan.	5 Feb.	6 Mar.	5 Apr.	4 Mai.	3 Jun.
ε 5	2 Jul.	1 Aug.	31 Aug.	29 Sep.	29 Oct.	27 Nov.	27 Dec.	25 Jan.	24 Feb.	25 Mar.	24 Apr.	23 Mai.	22 Jun.
6	21 Jul.	20 Aug.	18 Sep.	18 Oct.	17 Nov.	16 Dec.	.	15 Jan.	13 Feb.	15 Mar.	13 Apr.	13 Mai.	11 Jun.
7	11 Jul.	9 Aug.	8 Sep.	7 Oct.	6 Nov.	5 Dec.	.	4 Jan.	2 Feb.*	3 Mar.	2 Apr.	1 Mai.	31 Mai.
ε 8	29 Jun.	29 Jul.	27 Aug.	26 Sep.	25 Oct.	24 Nov.	23 Dec.	22 Jan.	20 Feb.	22 Mar.	20 Apr.	20 Mai.	19 Jun.
9	18 Jul.	17 Aug.	15 Sep.	15 Oct.	13 Nov.	13 Dec.	.	11 Jan.	10 Feb.	11 Mar.	10 Apr.	9 Mai.	8 Jun.
10	7 Jul.	6 Aug.	4 Sep.	4 Oct.	3 Nov.	2 Dec.	.	1 Jan.	30 Jan.	1 Mar.	30 Mar.	29 Apr.	28 Mai.
ε 11	27 Jun.	26 Jul.	25 Aug.	23 Sep.	23 Oct.	21 Nov.	21 Dec.	20 Jan.	18 Feb.*	19 Mar.	17 Apr.	17 Mai.	15 Jun.
12	15 Jul.	13 Aug.	12 Sep.	11 Oct.	10 Nov.	9 Dec.	.	8 Jan.	6 Feb.	8 Mar.	6 Apr.	6 Mai.	5 Jun.
ε 13	4 Jul.	3 Aug.	1 Sep.	1 Oct.	30 Oct.	29 Nov.	28 Dec.	27 Jan.	25 Feb.	27 Mar.	25 Apr.	25 Mai.	23 Jun.
14	23 Jul.	22 Aug.	20 Sep.	20 Oct.	18 Nov.	18 Dec.	.	16 Jan.	15 Feb.	16 Mar.	15 Apr.	14 Mai.	13 Jun.
15	12 Jul.	11 Aug.	9 Sep.	9 Oct.	7 Nov.	7 Dec.	.	6 Jan.	4 Feb.*	5 Mar.	3 Apr.	3 Mai.	1 Jun.
ε 16	1 Jul.	30 Jul.	29 Aug.	27 Sep.	27 Oct.	25 Nov.	25 Dec.	23 Jan.	22 Feb.	24 Mar.	22 Apr.	22 Mai.	20 Jun.
17	20 Jul.	18 Aug.	17 Sep.	16 Oct.	15 Nov.	14 Dec.	.	13 Jan.	11 Feb.	13 Mar.	11 Apr.	11 Mai.	9 Jun.
18	9 Jul.	8 Aug.	6 Sep.	6 Oct.	4 Nov.	4 Dec.	.	2 Jan.	1 Feb.	2 Mar.	1 Apr.	30 Apr.	30 Mai.
ε 19	28 Jun.	28 Jul.	26 Aug.	25 Sep.	25 Oct.	23 Nov.	23 Dec.	21 Jan.	20 Feb.*	20 Mar.	19 Apr.	18 Mai.	17 Jun.

ε bezeichnet die metonischen, * die julianischen Schaltjahre.

Tafel 2.

Metonisches Jahr im laufenden Schaltkyklus										Anzahl der Tage, um welche im						
vom Anfange des metonischen Jahres bis lezten Februar					vom ersten März bis zum Ende des metonischen Jahres					2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
										ten metonischen Kyklus jedes Datum später als im ersten Kyklus eintritt.						
1	5	9	13	17		4	8	12	16	0	1*	1	1	1	2*	2
2	6	10	14	18	1	5	9	13	17	0	0	1*	1	1	1	2*
3	7	11	15	19	2	6	10	14	18	0	0	0	1*	1	1	1
4	8	12	16		3	7	11	15	19	1*	1	1	1	2*	2	2

Das 0te Jahr im 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8ten meton. Kyklus
beginnt im Jahre 433, 414, 395, 376, 357, 338, 319, 300 vor Chr.
endet im Jahre 432, 413, 394, 375, 356, 337, 318, 299 vor Chr.

Beispiel. Welcher Tag der christlichen Zeitrechnung entspricht dem metonischen 1 Hekatombäon Ol. 112, 3, des ersten Jahres der kallippischen Zeitrechnung? — Hier ist $A =$ Ol. $112, 3 = 4.111 + 3 = 447$, daher $a = 447 - 344 = 103 = 19.5 + 8$. Dies Jahr ist demnach das $\alpha = 8^{te}$ im $\pi = 5 + 1 = 6^{ten}$ metonischen Kyklus. Nun ist, vermöge Tafel 1, im ersten Kyklus der 0 Hekatombäon des 8. Jahres der 29 Juni; und nach Tafel 2 trifft er im 8. Jahre des sechsten Kyklus um 2 Tage später, also am 1 Juli; folglich ist der 1 Hekatombäon der 2 Juli. Das entsprechende Jahr vor Chr. ist endlich $777 - 447 = 338 - 8 = 330$. Mithin traf Meton's 1 Hekatombäon Ol. 112, 3 auf den 2 Juli 330 vor Chr., und fing am Abende des 1 Juli an.

B. Kallippische Zeitrechnung der Athener.

164.

Vergleichung der kallippischen Jahre mit den olympischen.

Nach Ideler kam die kallippische Zeitrechnung zu Athen mit dem 1 Hekatombäon des 1. Jahres der ersten kallippischen Periode, am dritten Tage vor Meton's 1. Hekatombäon des 8. Jahres im 6. Kyklus oder des Jahres Ol. 112, 3 d. i. des 447. olympischen Jahres in Gebrauch. Bezeichnet daher a ein Jahr des Kallippus und A das mit ihm übereinstimmige olympische, so ist

$$(288) \qquad a = A - 446 \text{ und } A = a + 446.$$

165.

Vertheilung der Schaltjahre und hohlen Monate in der kallippischen Periode.

Die Anordnung der Schaltmonate traf Kallippus in den vier 19jährigen Kreisen seiner 76jährigen Periode, wie Geminus angibt, gerade so wie Meton; daher gelten auch hier die Ausdrücke von e und Δe in (260) bis (268)

des §. 156. Auch die metonische Vertheilung der hohlen Monate, nach welcher von je 32 Monaten 15, nemlich der 3., 5., 7., 9., 11., 13., 15., 17., 20, 22., 24., 26., 28., 30., 32te hohl sind, behielt er so weit als möglich bei. Seine 4. 235 = 940monatliche Periode mit 4. 110 + 1 = 441 hohlen Monaten bestand daher aus 29 solchen 32monatlichen Kreisen mit 29. 15 = 435 hohlen Monaten, und noch aus 12 übrigen Monaten, unter denen 441 — 435 = 6 hohl sein sollten, mithin entweder lauter gerade oder ungerade Stellen einnehmen mußten. Natürlich ist es, mit Ideler in seinem Entwurfe des kallippischen Kanons *), einen der beiden vollen Monate, womit jeder 32monatliche Kreis anfängt, wegzulassen; folglich statt obiger Reihe der hohlen Monate die in §. 21, II, angeführte zweckmäßigste 2, 4, 6, 8, 10, 12, zu wählen.

Dies führt aber zu demselben Ergebnisse, als ließe man den ersten 32monatlichen Zeitkreis nicht mit, sondern nach dem ersten Monate in der ganzen Reihe von Monaten anheben, oder als zählte man diesen ersten Monat als den nullten. Daher ist in dem, für die Anzahl ε der vor dem μ^{ten} Monate ausgemerzten Tage, aufgestellten Ausdrucke

$$(264) \qquad \varepsilon = Q\frac{15(\mu-1)+1}{32}$$

die Zahl μ um 1 zu vergrößern, also μ durch $\mu+1$ zu ersetzen, und sofort

$$\varepsilon = Q\frac{15\mu+1}{32}.$$

Da nun dieser lezte Ausdruck erst nach dem 29sten 32monatlichen Zeitkreise, mithin von dem 29. 32 + 1 = 929sten Monate an, in Anwendung kommt, so hat man μ allgemein um $Q\frac{\mu}{929}$ zu vermehren; folglich gilt für Ideler's Entwurf des kallippischen Kanons der allgemeine Ausdruck

$$(289) \qquad \varepsilon = Q\frac{15(\mu + Q\frac{\mu}{929} - 1)+1}{32}.$$

166.

Zu einem Jahre, Monate und Tage bestimmen, der wie vielte Tag er in der kallippischen Zeitrechnung ist.

Sei der t^{te} Tag des m^{ten} Monates im a^{ten} kallippischen Jahre der n^{te} in der kallippischen Zeitrechnung selbst, so findet man, wie in §. 158, wenn man 19 mit 76 und 6940 mit 27759 vertauscht,

$$(290) \qquad \pi = Q\frac{a}{76}+1,\quad \alpha = R\frac{a}{76}$$

$$\mu = 12(\alpha-1) + Q\frac{7\alpha-3}{19} + m$$

*) Handb. I. S. 390, lezte Zeile.

$$\delta = 30(\mu - 1) - \mathfrak{q}\frac{15\left(\mu + \mathfrak{q}\frac{\mu}{929} - 1\right) + 1}{32} + t$$

$$n = 27759\,\mathfrak{Q}\frac{a}{76} + \delta.$$

167.

Zu einem Tage der kallippischen Zeitrechnung das Jahr, den Monat und Tag bestimmen, worauf er trifft.

Soll umgekehrt der n^{te} Tag der kallippischen Zeitrechnung der t^{te} Tag im m^{ten} Monate des a^{ten} kallippischen Jahres sein, so findet man, nach dem in §. 159 gewiesenen Verfahren

(291) $$\pi - 1 = \mathfrak{Q}\frac{a}{76} = \mathfrak{Q}\frac{n}{27759},\quad \delta = \mathfrak{R}\frac{n}{27759}$$

(292) $$\mathfrak{Q}\frac{\mu}{32} = \mathfrak{Q}\frac{\delta}{945},\quad \mathfrak{R}\frac{\mu}{32} = \mathfrak{Q}\frac{\mathfrak{R}\frac{\delta}{945}}{30} + 1 + \Delta\mu,\quad \Delta\mu = 0 \text{ o. } 1$$

$$\mu = 32\,\mathfrak{Q}\frac{\mu}{32} + \mathfrak{R}\frac{\mu}{32},\quad t = \mathfrak{R}\frac{\mathfrak{R}\frac{\delta}{945}}{30} + \mathfrak{q}\frac{15\left(\mathfrak{R}\frac{\mu}{32} + \mathfrak{q}\frac{\mu}{929} - 1\right) + 1}{32} - 30\Delta\mu$$

oder

(293) $$\mu = \mathfrak{Q}\frac{32\delta - 30}{945} + 1$$

$$t = \left(\mathfrak{R}\frac{32\delta - 30}{945} - \mathfrak{r}\frac{15\left(\mu + \mathfrak{q}\frac{\mu}{929} - 1\right) + 1}{32} + 15\,\mathfrak{q}\frac{\mu}{929} + 31\right) : 32$$

ferner

(294) $$\alpha = \mathfrak{R}\frac{a}{76} = \mathfrak{Q}\frac{\mu}{12} + 1 - \Delta\alpha,\quad \Delta\alpha = 0,\ 1,$$

$$m = \mathfrak{R}\frac{\mu}{12} - \mathfrak{q}\frac{7\alpha - 3}{19} + 12\Delta\alpha$$

oder $$\alpha = \mathfrak{R}\frac{a}{76} = \mathfrak{Q}\frac{19\mu - 4}{235} + 1$$

$$m = \left(\mathfrak{R}\frac{19\mu - 4}{235} + \mathfrak{r}\frac{7\alpha - 3}{19}\right) : 19,$$

folglich

(295) $$a = 76(\pi - 1) + \alpha = 76\,\mathfrak{Q}\frac{a}{76} + \mathfrak{R}\frac{a}{76}.$$

168.

Vergleichung der kallippischen Zeitrechnung mit anderen.

Die kallippische Zeitrechnung nahm ihren Anfang mit dem (kallippischen) 1 Hekatombäon oder mit dem dritten Tage vor Meton's 1 Hekatombäon des dritten Jahres der 112. Olympiade oder des 447. olympischen Jahres, mithin am Abende des 28 Juni 330 vor Chr., (§. 163, Beispiel); wofür wir (§. 146), um die attischen Tage mit denjenigen julianischen zu vergleichen,

auf die sie mit ihren lezten drei Viertheilen treffen, die Mitternacht oder den mitternächtlichen Anfang des 29 Juni 330 vor Chr. oder des 302. Tages im Jahre 5508 — 329 = 5179 der byzantinischen Weltäre sezen. Die Epoche der kallippischen Zeitrechnung liegt daher hinter jener der byzantinischen Weltäre um $5178 . 365 + \mathfrak{q}\frac{5178}{4} + 301 = 1891565$ Tage.

Die kallippische Zeitrechnung wurde in Athen durch drei 76jährige Perioden oder 228 kallippische Jahre, mithin vom Sommer des Jahres 330 bis 102 vor Chr. gebraucht. Ob sie nachher noch unverändert geblieben, oder ob die Verbesserung, welche sie durch den Astronomen Hipparch, der während ihrer dritten Periode beobachtete, erfahren haben soll (§. 154, IV), zu Athen oder sonst irgendwo in's Leben getreten ist, wissen die Chronologen nicht mit Sicherheit.

Die Reduction der Data aus der kallippischen Zeitrechnung in eine andere oder umgekehrt geschieht überhaupt nach den in der allgemeinen Chronologie (§. 31, 32 und 33) aufgestellten Vorschriften.

169.

Fortsezung. Vergleichung der kallippischen Zeitrechnung mit der julianisch-christlichen.

Das mittlere kallippische Jahr hält $365\frac{1}{4}$ Tage wie das julianische, daher fängt, vermöge §. 31, (49) und (50), das kallippische Jahr $a = 1, 2, \ldots 228$ oder das olympische $A = a + 446 = 447, \ldots 674$
im Sommer des Jahres $331 - a = 777 - A$ vor Chr. an
und endigt im Jahre $330 - a = 776 - A$ vor Chr.;
und umgekehrt im Jahre a vor Chr.
beginnt das kallippische Jahr $331 - a$
und endet » » $330 - a$.

Soll ein vollständiges kallippisches Datum, nemlich der t^{te} Tag des m^{ten} Monates im a^{ten} kallippischen Jahre (welches ein Schaltjahr ist, so oft $\mathfrak{R}\frac{a}{19} = 3, 5, 8, 11, 13, 16, 19$ wird), auf die julianisch-christliche Zeitrechnung gebracht werden, so sucht man zunächst nach den Gleichungen (290)

$$\mu = 12\left(\mathfrak{R}\frac{a}{76} - 1\right) + \mathfrak{q}\frac{7\mathfrak{R}\frac{a}{76} - 3}{19} + m$$

und

$$\delta = 30(\mu - 1) - \mathfrak{q}\frac{15(\mu + \mathfrak{q}\frac{\mu}{929} - 1) + 1}{32} + t.$$

Trifft jener Tag auf den n'^{ten} der christlichen Aere und zwar auf den d'^{ten} des Jahres a' vor Chr., so hat man

$$n' = -365a' - \mathfrak{q}\frac{a'+3}{4} + d'$$
$$= 27759\,\mathfrak{Q}\frac{a}{76} + \delta + 1891565 - 2011919$$
$$= 365\left(76\,\mathfrak{Q}\frac{a}{76} - 330\right) + 19\,\mathfrak{Q}\frac{a}{76} + \delta + 96$$

und $$19\,\mathfrak{Q}\frac{a}{76} = 19\,\mathfrak{q}\frac{a-1}{4.19} = 19\,\mathfrak{q}\frac{\mathfrak{q}\frac{a-1}{4}}{19} = \mathfrak{Q}\frac{a}{4} - \mathfrak{r}\frac{\mathfrak{Q}\frac{a}{4}}{19}.$$

Setzt man demnach

$$(296)\qquad b = 19\,\mathfrak{Q}\frac{a}{76} + \delta + 96 = \mathfrak{Q}\frac{a}{4} - \mathfrak{r}\frac{\mathfrak{Q}\frac{a}{4}}{19} + \delta + 96,$$

so findet man das Jahr vor Chr.

$$(297)\qquad a' = 330 - 76\,\mathfrak{Q}\frac{a}{76} - \mathfrak{Q}\frac{b}{365} - \Delta a$$
$$= 330 - a + \mathfrak{R}\frac{a}{76} - \mathfrak{Q}\frac{b}{365} - \Delta a$$

und darin den Tag

$$(298)\qquad d' = \mathfrak{R}\frac{b}{365} + \mathfrak{Q}\frac{a'}{4} + 1 - 365\Delta a.$$

Beispiel. Timocharis beobachtete eine Fixsternbedeckung zu Alexandria am Morgen des 25 Poseideon im 36. Jahre der ersten kallippischen Periode.*) Sucht man dazu das julianische Datum, so ist hier

$$a = 36,\quad m = \text{Poseideon} = 6,\quad t = 25.$$

Daraus folgt $\mathfrak{Q}\frac{a}{76} = 0$, $\mathfrak{R}\frac{a}{76} = 36 \equiv 17$, mod 19,

a ein Gemeinjahr.

$$7\,\mathfrak{R}\frac{a}{76} - 3 = 249 = 19.13 + 2$$
$$\mu = 12.35 + 13 + 6 = 439$$
$$30(\mu - 1) = 13140,\quad 15(\mu - 1) + 1 = 6571 = 32.205 + 11$$
$$\delta = 13140 + 25 - 205 = 12960$$
$$b = 12960 + 96 = 13056 = 365.35 + 281$$
$$\begin{array}{r} 1095 \\ \hline 2106 \\ 1825 \\ \hline 281 \end{array}$$
$$a' = 330 - 35 - \Delta a \qquad d' = 281 + 74 - 365\Delta a$$
$$= 295 - \Delta a$$

$\Delta a = 0$, $a' = 295$, Gemeinj., $d' = 355 = 355 - 334$ Decemb. $= 21$ Dec.

Diese Fixsternbedeckung wurde daher am Morgen des 21 Decembers 295 vor Chr. beobachtet.

---

*) Almagest VII, 3. Ideler Handb. I. S. 349.

Drittes Hauptstück.

Zeitrechnung der Macedonier, der Kleinasiaten und Syrer.

A. Zeitrechnung der Macedonier.

170.

Die Macedonier fingen den Tag höchst wahrscheinlich, wie alle anderen Griechen, des Abends an.

Ihre Monate, über deren Namen und Anordnung nie ein Streit unter den Chronologen geherrscht hat, waren folgende, und entsprachen den beigesetzten attischen Monaten.

Macedonische Monate	Entsprechende attische Monate. Vor Alexander	Seit Alexander 336 vor Chr.
1) Dios	6) Poseideon	4) Pyanepsion
2) Apelläos	7) Gamelion	5) Mämakterion
3) Audynäos	8) Anthesterion	6) Poseideon
4) Peritios	9) Elaphebolion	7) Gamelion
5) Dystros	10) Munychion	8) Anthesterion
6) Xanthikos	11) Thargelion	9) Elaphebolion
7) Artemisios	12) Skirophorion	10) Munychion
8) Däsios	1) Hekatombäon	11) Thargelion
9) Panemos	2) Metageitnion	12) Skirophorion
10) Loos	3) Boëdromion	1) Hekatombäon
11) Gorpiäos	4) Pyanepsion	2) Metageitnion
12) Hyperberetäos	5) Mämakterion	3) Boëdromion.

Die macedonischen Monate waren Mondmonate wie jene der anderen Griechen, und liefen diesen parallel; nur sind sie, wahrscheinlich durch einen königlichen Machtspruch, bald nach dem Regierungsantritte Alexander's, welcher von 336 bis 323 vor Chr. Macedonien beherrschte, aus ihrer ursprünglichen Stellung gegen die attischen um zwei Monate zurück geschoben worden.

Die Macedonier hatten, gleich allen übrigen Griechen, ein gebundenes Mondjahr, das sie seit Alexander um die Herbstnachtgleiche anfingen. Ueber ihre Schaltrechnung läßt sich jedoch nichts Sicheres, ja sogar nichts Wahrscheinliches angeben.

171.

Verbreitung der macedonischen Zeitrechnung nach Asien.

Durch die Eroberungen Alexander's (334 bis 325 vor Chr.) wurde die macedonische Zeitrechnung weit über Asien verbreitet, besonders seitdem seine Feldherren sich in sein großes Reich getheilt und in den vornehmsten, theils vorgefundenen theils neuerbauten, Städten militärische Kolonien eingeführt hatten. Die asiatischen Völker machten sich nun, nebst anderen Einrichtungen, auch die Jahrform und Monatnamen der Macedonier eigen. Später aber, als sie unter römische Botmäßigkeit kamen, und nach ihrem Uebertritte zum Christenthume hielten sie sich theils an die julianisch-römische, theils an die alexandrinisch-ägyptische Jahrform, indem sie ihre früher gebrauchten Mondmonate in Sonnenmonate umstalteten. Besonders häufig trifft man die macedonischen Monate in Kleinasien und Syrien seit dem ersten Jahrhunderte unserer Zeitrechnung an, wo sie bereits in julianische Sonnenmonate umgeprägt erscheinen.

B. Macedonisch-julianische Zeitrechnung der kleinasiatischen Griechen.

172.

Ursprünglich hatten die in Kleinasien angesiedelten griechischen Kolonien, die Jonier, Dorier, Lesbier, Aeolier u. a., die Zeitrechnung ihres Mutterlandes. Ihre Unterjochung durch Alexander zwang sie jedoch, mit Beibehaltung ihrer Monatnamen, die macedonische Zeitrechnung anzunehmen; die sie endlich unter der Herrschaft der Römer mit der durch Julius Cäsar verbesserten römischen Zeitrechnung vertauschten.

Nach dem florentiner Hemerologium *) bestanden seit dem ersten Jahrhunderte nach Chr. folgende Vergleichungen der kleinasiatisch-macedonischen Zeitrechnungen nach Sonnenjahren mit der römischen; wofern angenommen werden darf, daß in beiden Zeitrechnungen in einerlei Jahr und Monat, allgemein 1 Tage eingeschaltet wurden.

*) Ideler Handb. 1. B. S. 410.

a) Jahrform der Asianer.*)

	Monat	Tage	t^{ter} Tag des Monates	
1)	Käsarios	30	t + 23 Sept.	= t — 7 Oct.
2)	Tiberios	31	t + 23 Oct.	= t — 8 Nov.
3)	Apaturios	31	t + 23 Nov.	= t — 7 Dec.
4)	Poseidaon	30	t + 24 Dec.	= t — 7 Jan.
5)	Lenäos	29 + i	t + 23 Jan.	= t — 8 Feb.
6)	Hierosebastos	30	t + 21 + i Feb.	= t — 7 März
7)	Artemisios	31	t + 23 März	= t — 8 Apr.
8)	Euangelios	30	t + 23 Apr.	= t — 7 Mai
9)	Stratonikos	31	t + 23 Mai	= t — 8 Jun.
10)	Hekatombäos	31	t + 23 Jun.	= t — 7 Jul.
11)	Anteos	31	t + 24 Jul.	= t — 7 Aug.
12)	Laodikios	30	t + 24 Aug.	= t — 7 Sept.

b) Jahrform der Ephesier,

welche in Asien weit verbreitet gewesen sein muß, und deren Monate durchaus macedonische Namen trugen.

	Monat	Tage	t^{ter} Tag des Monates	
1)	Dios	30	t + 23 Sept.	= t — 7 Oct.
2)	Apelläos	31	t + 23 Oct.	= t — 8 Nov.
3)	Audynäos	31	t + 23 Nov.	= t — 7 Dec.
4)	Peritios	30	t + 24 Dec.	= t — 7 Jan.
5)	Dystros	29 + i	t + 23 Jan.	= t — 8 Febr.
6)	Xanthikos	30	t + 21 + i Feb.	= t — 7 März
7)	Artemisios	31	t + 23 März	= t — 8 Apr.
8)	Däsios	30	t + 23 Apr.	= t — 7 Mai
9)	Panemos	31	t + 23 Mai	= t — 8 Jun.
10)	Loos	31	t + 23 Jun.	= t — 7 Jul.
11)	Gorpiäos	30	t + 24 Jul.	= t — 7 Aug.
12)	Hyperberetäos	31	t + 23 Aug.	= t — 8 Sept.

c) Jahrform der Bithynier.

	Monat	Tage	t^{ter} Tag des Monates	
1)	Heräos	31	t + 22 Sept.	= t — 8 Oct.
2)	Hermäos	30	t + 23 Oct.	= t — 8 Nov.
3)	Metroos	31	t + 22 Nov.	= t — 8 Dec.
4)	Dionysios	31	t + 23 Dec.	= t — 8 Jan.
5)	Herakleios	28 + i	t + 23 Jan.	= t — 8 Feb.
6)	Dios	31	t + 20 + i Feb.	= t — 8 März
7)	Bendidäos	30	t + 23 März	= t — 8 Apr.
8)	Strateios	31	t + 22 Apr.	= t — 8 Mai
9)	Periepios	30	t + 23 Mai	= t — 8 Jun.
10)	Areios	31	t + 22 Jun.	= t — 8 Jul.
11)	Aphrodisios	30	t + 23 Jul.	= t — 8 Aug.
12)	Demetrios	31	t + 22 Aug.	= t — 9 Sept.

*) Hierunter begreift man die Bewohner der jonischen Städte im Bereiche der einst von Attalus beherrschten Monarchie, welche von den Römern mit dem Worte Asia in seiner engsten Bedeutung bezeichnet wurde.

d) Bei dieser großen Verschiedenheit der in Kleinasien gebräuchlich gewesenen Monatnamen muß daselbst frühzeitig zur Erleichterung des gegenseitigen Verkehrs der Städte und Provinzen die Gewohnheit aufgekommen sein, die Monate nach den Stellen zu zählen, die sie in dem macedonisch-asiatischen, um die Herbstnachtgleiche anfangenden, Sonnenjahre einnahmen. Auch scheint sich die kleine Abweichung in der Dauer der Monate allmälig ausgeglichen und folgende allgemein giltige kleinasiatische Jahrform ausgebildet zu haben, wie sie von Usher und Noris zusammengestellt worden ist. Die Kleinasiaten schalteten mit den Römern in einerlei Jahr ein, sezten aber den Schalttag an das Ende ihres zwölften Monates.

Kleinasiatische Jahrform.

	Tage	iter Tag im Monate	
Erster Monat	30	t + 23 Sept.	= t — 7 Oct.
Zweiter —	30	t + 23 Oct.	= t — 8 Nov.
Dritter —	31	t + 22 Nov.	= t — 8 Dec.
Vierter —	30	t + 23 Dec.	= t — 8 Jan.
Fünfter —	30	t + 22 Jan.	= t — 9 Feb.
Sechster —	31	t + 21 Feb.	= t — 7 — i März
Siebenter —	31	t + 24 — i März	= t — 7 — i Apr.
Achter —	30	t + 24 — i Apr.	= t — 6 — i Mai
Neunter —	30	t + 24 — i Mai	= t — 7 — i Jun.
Zehnter —	31	t + 23 — i Jun.	= t — 7 — i Jul.
Elfter —	31	t + 24 — i Jul.	= t — 7 — i Aug.
Zwölfter —	30 + i	t + 24 — i Aug.	= t — 7 — i Sept.

Beispiel. Der Verfasser der dem Chrysostomus unterschobenen sieben Osterreden sezt in der lezten derselben *) das Osterfest des Jahres, worin er schrieb, auf den 2. Tag des 8. Monates, und die Osterfeste der drei folgenden Jahre auf den 17., 9. und 29. Tag des 7. Monates. Ist obiger Entwurf richtig, so traf im ersten Jahre Ostern am 26 — i April. Allein Ostern kann spätestens nur am 25 April treffen, folglich muß i = 1, nemlich das erste Jahr ein Schaltjahr und seine Festzahl 25 + 10 = 35 sein. Solche Schaltjahre waren bisher (§. 121, 2. Beisp.) die Jahre nach Chr. 140, 672, 1204, 1736, . . .; und von diesen ist 140 zu früh, dagegen 1204 zu spät, also kann jener Anonymus nur im Jahre 672 nach Chr. geschrieben haben. In den drei folgenden Jahren, die sonach Gemeinjahre sein müssen, traf nach seinen Angaben

*) Opera Chrysostomi t. 8, der Pariser Ausgabe, inter Spuria, p. 284. Ideler Handb. 1. Bd. S. 424.

Ostern auf den 17 — 7 = 10 April, 9 — 7 = 2 April und 29 — 7 = 22 April, oder ihre Festzahlen waren 20, 12 und 32; und diese kamen in der That den Jahren 673, 674 und 675 nach Chr. zu.

C) Macedonisch-julianische Zeitrechnung der Syrer.

173.

Jahrform.

I. Vornehmste Jahrform. Einen zweiten Hauptgebrauch von den macedonischen Monaten finden wir in Syrien. Hier war seit den ersten Jahrhunderten unserer Zeitrechnung, und ist bis zur Stunde bei den Christen, ein Jahr gebräuchlich, dessen Monate von den Griechen mit macedonischen, von den Syrern mit einheimischen Namen bezeichnet, den römischen ganz so parallel laufen, wie folgende Tafel zeigt.

Macedonische Namen	Syrische	Römische
1) Hyperberetäos	Erster Thischri	10) October
2) Dios	Zweiter Thischri	11) November
3) Apelläos	Erster Kanun	12) December
4) Audynäos	Zweiter Kanun	1) Januar
5) Peritios	Schebat	2) Februar
6) Dystros	Adar	3) März
7) Xanthikos	Nisan	4) April
8) Artemisios	Ijar	5) Mai
9) Däsios	Hasiran	6) Juni
10) Panemos	Thamus	7) Juli
11) Loos	Ab	8) August
12) Gorpiäos	Elul	9) September

Diese Jahrform galt zwar Anfangs nicht allgemein in Syrien, verdrängte aber zuletzt jede andere; denn bei den griechischen Kirchenscribenten, die in Syrien lebten, bei den arabischen Geschichtschreibern und Astronomen ist nie von anderen syrischen Monaten die Rede, wenn sie Data des Sonnenjahres angeben.

II. Besondere Jahrformen. So lange das seleukidische Reich bestand, scheinen die Syrer einerlei Zeitrechnung gebraucht zu haben, nemlich ein gebundenes Mondjahr, das sie mit den Macedoniern um die Herbstnachtgleiche anfingen. Als aber das Land unter römische Herrschaft kam, und viele syrische Städte die Autonomie, d. i. die Freiheit sich nach eigener Verfassung zu regieren, erhielten, eigneten sich zwar alle die von Julius Cäsar verbesserte

römische Jahrform an, jedoch mit mancherlei Abweichungen, die im gegenseitigen Verkehr eine große Verwirrung zur Folge haben mußten. So war nach dem florentiner Hemerologium

a) das Jahr der Tyrer

in Phönicien folgender Maßen geordnet,

	Monat	Tage	t^{ter} Tag im Monate
1)	**Hyperberetäos**	30	t + 18 Oct. = t — 13 Nov.
2)	**Dios**	30	t + 17 Nov. = t — 13 Dec.
3)	**Apelläos**	30	t + 17 Dec. = t — 14 Jan.
4)	**Audynäos**	30	t + 16 Jan. = t — 15 Feb.
5)	**Peritios**	30 + i	t + 15 Feb. = t — 13 — i März
6)	**Dystros**	31	t + 17 März = t — 14 Apr.
7)	**Xanthikos**	31	t + 17 Apr. = t — 13 Mai
8)	**Artemisios**	31	t + 18 Mai = t — 13 Jun.
9)	**Däsios**	31	t + 18 Jun. = t — 12 Jul.
10)	**Panemos**	31	t + 19 Jul. = t — 12 Aug.
11)	**Loos**	30	t + 19 Aug. = t — 12 Sept.
12)	**Gorpiäos**	30	t + 18 Sept. = t — 12 Oct.

b) Die Jahrform zu Heliopolis

in Cölesyrien war folgende:

	Monat	Tage	t^{ter} Tag im Monate
1)	**Ab**	30	t + 22 Sept. = t — 8 Oct.
2)	**Ilul**	30	t + 22 Oct. = t — 9 Nov.
3)	**Ag**	31	t + 21 Nov. = t — 9 Dec.
4)	**Thorin**	30	t + 22 Dec. = t — 9 Jan.
5)	**Gelon**	30 + i	t + 21 Jan. = t — 10 Feb.
6)	**Chanu**	31	t + 20 + i Feb. = t — 8 März
7)	**Sobath**	30	t + 23 März = t — 8 Apr.
8)	**Adad**	31	t + 22 Apr. = t — 8 Mai
9)	**Neisan**	31	t + 23 Mai = t — 8 Jun.
10)	**Iarar**	30	t + 23 Juni = t — 7 Jul.
11)	**Ezer**	30	t + 23 Jul. = t — 8 Aug.
12)	**Thamiza**	31	t + 22 Aug. = t — 9 Sept.

Die Monatnamen sind die syrischen, wenn gleich zum Theil entstellt, nur der erste Thischri und Kanun heißen hier **Ag** und **Gelon**.

174.

Jahrrechnungen der Syrer.

Eben so verschieden, wie die Monate, waren die Epochen, von denen die autonomen syrischen Städte ihre Jahre zählten. Die wichtigste unter allen syrischen Aeren war

1) die seleukidische Aere. Sie datirt von dem Siege, den Seleukus, nachmals Nikator genannt, einer der Statthalter im großen von Alexander hinterlassenen Reiche, von Ptolomäus Lagi unterstüzt, über den Antigonus bei Gaza erfocht, und von seiner Wiedereroberung Babylon's, wodurch er den Grund zu seiner späteren großen Macht legte; nicht aber, wie einige Chronologen meinen, von der Gründung des seleukidischen Königreiches, welches sich vom Indus bis zum Hellespont erstreckte. Ihr Anfang fällt in den Herbst des Jahres 312 vor Chr. oder 5198 der byzantinischen Aere und zwar, wenn man, wie gewöhnlich, mit dem Hyperberetäos oder ersten Thischri das Jahr anhebt, auf den 1 October; dagegen, wenn man, wie es einzelne Geschichtschreiber ausnahmsweise thun, das Jahr mit dem Elul oder Gorpiäos anfangen läßt, auf den 1 September. Sie beginnt daher im ersteren Falle um 1898234, im anderen um 1898204 Tage später als die byzantinische Weltäre.

Der Jahranfang mit dem 1 Elul oder September schreibt sich von den Indictionen, den Jahren des 15jährigen Indictionskreises, her, nach denen man seit der Mitte des vierten Jahrhundertes nach Chr. häufig datirt findet, und welche, wie die Jahre der byzantinischen Weltäre, mit dem 1 September anfingen. Diese im byzantinischen Reiche gesezlich bestandene Zeitrechnung nach Indictionen muß die alte Jahrepoche, welche auf den 1. Tag des ersten Thischri oder des Octobers traf, allmälig aus den öffentlichen Acten, wenn auch nicht aus dem Volksgebrauche, verdrängt haben.

Dieser berühmten Aere der Seleukiden bedienten sich die Syrer, und unter der syrischen Herrschaft die Hebräer; sie erscheint auf den Münzen mehrerer syrischen Städte und in den Werken der arabischen Astronomen, welche sie die Aere Alexanders des Zweigehörnten nennen.

Vergleichung der seleukidischen Aere mit der christlichen. Da die Monate und Jahre der Syrer den julianischen parallel laufen, so fallen immer die Anfangsmonate des seleukidischen Jahres bis zum Apelläos oder ersten Kanun, welcher mit dem December übereinkommt, noch in den Schluß des vorausgehenden julianischen oder christlichen Jahres; die übrigen Monate dagegen, vom Audynäos oder zweiten Kanun an, welcher mit dem Januar übereinstimmt, auf die ersten 9 oder 8 Monate des nachfolgenden julianischen oder christlichen Jahres.

Das seleukidische Jahr a

beginnt daher im Jahre 313 — a vor Chr. oder a — 312 nach Chr.

und endigt sich » » 312 — a » » » a — 311 » »

Es ist daher ein Schaltjahr, so oft es durch 4 getheilt 3 zum Reste gibt.

Umgekehrt im Jahre a vor Chr.

endigt sich das seleukidische Jahr 312 — a

und beginnt » » 313 — a,

dagegen im Jahre a nach Chr.

endet das seleukidische Jahr 311 + a

und beginnt » » 312 + a.

2) Pompejanische Aere. Die meisten Aeren der syrischen Städte fangen bei dem Zeitpunkte an, wo diese die Autonomie erlangten, was besonders da geschah, als Pompejus und Julius Cäsar mit ihren Heeren in Syrien standen. Jener zwang im Jahre 64 vor Chr. den Tigranes, König von Armenien, Syrien, das er einige Zeit behauptet hatte, wieder zu räumen, wobei er einigen Städten, weil sie sich für ihn erklärt hatten, die Freiheit schenkte. Die Aeren nun, welche sich damals bildeten und mit dem Herbste theils des Jahres 64 vor Chr., theils auch erst des nachfolgenden 63 vor Chr., also mit dem Jahre 249 oder 250 der Seleukiden ihren Anfang nahmen, werden von den numismatischen Chronologen mit dem gemeinschaftlichen Namen **Aera Pompeiana** bezeichnet. Nach Eckhel *) haben dieselbe vom Jahre 64 vor Chr. an folgende Städte gebraucht: **Abila, Antiochia ad Hippum, Canatha, Dium, Gadara, Pella** und **Philadelphia.**

Sofort ist

seleukidisches Jahr = pompejanisches Jahr + 248 oder 249.

3) Antiochenische Aere. Die Hauptstadt Syriens, Antiochia, welche von Pompejus gleichfalls die Autonomie erhalten hatte, begann aber erst im Jahre 705 der Stadt Rom, oder 49 vor Chr. oder 264 der Seleukiden die ihr eigenthümliche Jahrrechnung, welche nächst der seleukidischen unter den syrischen die berühmteste ist. Vermuthlich wählten die Antiochener, dem Julius Cäsar zu Ehren, welcher ihnen dafür, daß sie sich nach der Schlacht bei Pharsalus für ihn erklärt hatten, mancherlei Begünstigungen zugestand und die Autonomie bestätigte, die Epoche ihrer Aere dergestalt, daß der 9 Sextilis des Jahres 706 der Stadt Rom, der Siegestag ihres Wohlthäters bei Pharsalus, in ihr erstes Jahr fiel, das im Herbste 705 anfing.

Sonach ist

seleukidisches Jahr = antiochenisches Jahr + 263;

---

*) Doctrina Nummorum. vol. 3. pag. 345 — 351.

und ein antiochenisches Jahr a

fängt an im Jahre 50 — a vor Chr. oder a — 49 nach Chr.
und endet » » 49 — a » » » a — 48 » »

Beispiele. Der antiochenische Schriftsteller Euagrius *) sagt, der Kaiser Justinus sei zur Regierung gekommen am 9 Panemos oder Julius, als die Stadt des Antiochus das 566. Jahr zählte, d. i. demnach im Jahre 566 — 48 = 518 nach Chr. — Ein anderer Antiochener, Malelas **), berichtet, der Kaiser Julianus sei getödtet worden am 26 Däsios oder Junius des Jahres 411 der Antiochener, also im Jahre 411 — 48 = 363 nach Chr.

4) Cäsarische Aere. Manche Chronologen nennen die antiochenische Aere die Aera Caesariana, während die Mehrzahl unter dieser Benennung alle die syrischen Jahrrechnungen begreift, welche sich an Cäsar's Anwesenheit in Syrien knüpfen. So z. B. begann Laodicea am Meere, eine bedeutende Stadt Obersyriens, und Ptolomäis in Galiläa ihre cäsarische Aere mit dem Herbste des Jahres 706 d. St. Rom oder 48 vor Chr., Gabala dagegen, unweit Laodicea, erst im Herbste 707 d. St., 47 vor Chr. Daher ist

seleukidisches Jahr = Jahr der Laodiceer + 264
= Jahr der Gabaler + 265.

5) Actische Aere. Mehrere syrische Städte, als Antiochia und das benachbarte Seleukia in Pierien, fielen auf die Nachricht von der Schlacht bei Actium von Antonius ab und erklärten sich für den Sieger Octavianus. Sie begannen nun mit dem Herbste des Jahres 723 d. St., 31 vor Chr., eine neue Aere, die Aera actiaca, deren Jahre auf den antiochenischen Münzen Jahre des Sieges genannt werden. Sonach ist

seleukidisches Jahr = actisches Jahr + 281.

6) Tyrische Aere. Tyrus in Phönicien datirte zuerst nach der Aere der Seleukiden, später nach einer eigenen Aere, deren Epoche auf den Herbst 628 d. St. R., 126 vor Chr. traf. Sonach ist

Jahr der Seleukiden = Jahr der Tyrer + 186.

D) Macedonisch-alexandrinische Zeitrechnung in Asien.

175.

Nebst der julianischen Form des Sonnenjahres wurde auch die alexandrinische im westlichen Asien, theils mit den macedonischen, theils mit eigenthümlichen oder den alten babylonischen und persischen Monatnamen, gebraucht; weil das altägyptische 365tägige Sonnenjahr vermuthlich durch die Perser in

*) Hist. Eccl. IV. 1.
**) Hist. chron. P. II. p. 20 u. 22.

dem von ihnen unterjochten Aegypten kennen gelernt und auch in die kleinasiatischen und syrischen Provinzen verpflanzt wurde.

1) Gaza und Ascalon, Städte in Palästina, unfern der Grenze Aegyptens, welche lange den Ptolomäern unterworfen waren, bedienten sich ganz der alexandrinischen Jahrform, nur unter macedonischer Benennung der Monate, und wie die Macedonier das Jahr mit dem Herbste anfangend, daher sie die Ergänzungstage nicht am Schlusse des Jahres hatten.

Monate zu Gaza	zu Ascalon	Alexandrinische Monate
1) Dios	Hyperberetäos	3) Athyr
2) Apelläos	Dios	4) Chöak
3) Audynäos	Apelläos	5) Tybi
4) Peritios	Audynäos	6) Mechir
5) Dystros	Peritios	7) Phamenoth
6) Xanthikos	Dystros	8) Pharmuthi
7) Artemisios	Xanthikos	9) Pachon
8) Däsios	Artemisios	10) Payni
9) Panemos	Däsios	11) Epiphi
10) Loos	Panemos	12) Mesori
11) Epagomenä	Epagomenä	13) Epagomenä
12) Gorpiäos	Loos	1) Thoth
13) Hyperberetäos	Gorpiäos	2) Phaophi.

Die Bewohner von Gaza zählten ihre Jahre vom Herbste des Jahres 692 d. St., 62 vor Chr.;

daher beginnt das Jahr a der Stadt Gaza

im Jahre 63 — a vor Chr. oder a — 62 nach Chr.,

und endigt sich im Jahre 62 — a vor Chr. oder a — 61 nach Chr.;

mithin ist es ein Schaltjahr (§. 136), wenn es sich vor einem julianischen Schaltjahre endigt, also $(a+1)-61 \equiv 0$, mod 4 oder $a \equiv 0$, mod 4 ist, nemlich wenn es durch 4 theilbar ist.

Die Einwohner von Ascalon rechneten erst nach der seleukidischen Aere, nachmals vom Jahre 650 d. St. Rom, 104 vor Chr., von dem jüdisch-ägyptischen Kriege, wo sie die Freiheit errangen, welche sie lange unter den Römern zu behaupten wußten.

Das Jahr a der Stadt Ascalon

beginnt demnach im Jahre 105 — a vor Chr. oder a — 104 nach Chr.

und endet » » 104 — a » » » a — 103 » »

folglich ist es ein Schaltjahr, wenn $(a+1)-103 \equiv 0$, mod 4 oder $a \equiv 2$, mod 4 ist.

2) Die kleinasiatische Landschaft **Capadocia** scheint früher ein bewegliches Sonnenjahr von 365 Tagen von den Persern, denen sie lange unterworfen war, erhalten zu haben; daher sie nebst macedonischen auch persische Monatnamen gebrauchte. Später benützte sie die alexandrinische Einschaltung des sechsten Ergänzungstages.

Wenn i die Anzahl der Schalttage eines capadocischen Jahres und des mit ihm fast ganz übereinkommenden julianischen Jahres bezeichnet, so lassen sich die capadocischen Monatstage in folgender Weise auf die julianischen zurück führen.

Capadocische Monate	Tage	t^{ter} Tag im Monate	
1) **Lytanos**	30	t + 11 Dec.	= t — 20 Jan.
2) **Arteys**	30	t + 10 Jan.	= t — 21 Feb.
3) **Adraostata**	30	t + 9 Feb.	= t — 19 — i März
4) **Teirei**	30	t + 11 — i März	= t — 20 — i Apr.
5) **Amarpata**	30	t + 10 — i Apr.	= t — 20 — i Mai
6) **Xanthikos**	30	t + 10 — i Mai	= t — 21 — i Jun.
7) **Myar**	30	t + 9 — i Jun.	= t — 21 — i Jul.
8) **Apomyle**	30	t + 9 — i Jul.	= t — 22 — i Aug.
9) **Athra**	30	t + 8 — i Aug.	= t — 23 — i Sept.
10) **Dathu**	30	t + 7 — i Sept.	= t — 23 — i Oct.
11) **Osman**	30	t + 7 — i Oct.	= t — 24 — i Nov.
12) **Sonda**	30	t + 6 — i Nov.	= t — 24 — i Dec.
13) **Epagomenä**	5 + i	t + 6 — i Dec.	

3) Die Bewohner des **peträischen Arabiens** (**Arabia petraea**, mit der ihm den Beinamen gebenden Hauptstadt **Petra**), besonders die der St. **Bostra**, welche, nachdem das Land unter Trajan im Jahre 105 nach Chr. eine römische Provinz geworden war, als Siz einer Legion zu besonderer Wichtigkeit gelangte, gebrauchten das alexandr. Jahr mit den maced. Monatnamen in folgender Weise.

Monate	Tage	t^{ter} Tag im Monate.	
1) **Xanthikos**	30	t + 21 März	= t — 10 Apr.
2) **Artemisios**	30	t + 20 Apr.	= t — 10 Mai
3) **Däsios**	30	t + 20 Mai	= t — 11 Jun.
4) **Panemos**	30	t + 19 Jun.	= t — 11 Jul.
5) **Loos**	30	t + 19 Jul.	= t — 12 Aug.
6) **Gorpiäos**	30	t + 18 Aug.	= t — 13 Sept.
7) **Hyperberetäos**	30	t + 17 Sept.	= t — 13 Oct.
8) **Dios**	30	t + 17 Oct.	= t — 14 Nov.
9) **Apelläos**	30	t + 16 Nov.	= t — 14 Dec.
10) **Audynäos**	30	t + 16 Dec.	= t — 15 Jan.
11) **Peritios**	30	t + 15 Jan.	= t — 16 Feb.
12) **Dystros**	30	t + 14 Feb.	= t — 14 — i März
13) **Epagomenä**	5 + i	t + 16 — i März.	

Sechster Abschnitt.

Zeitrechnung der Juden.

176.

Jüdische Eintheilung des Tages.

Den **Tag** (jom) theilen die Juden, wie sonst üblich, in 24 Stunden, welche sie in Einem fort bis 24 zählen. Sie fangen den Tag um 6 Uhr Abends, folglich sechs Stunden früher als die Christen an; wodurch die Mitternacht auf das Ende ihrer 6ten, und der Mittag auf das Ende ihrer 18. Stunde trifft. Dieser Zählung bedienen sie sich jedoch nur in ihrer Festrechnung; denn im gewöhnlichen Leben halten sie sich an die Zählweise der Völker, unter denen sie leben.

Die **Stunde** (schaah) theilen sie in 1080 Chlakim, **Theile**, von denen auf unsere Minute $\frac{1080}{60} = 18$ gehen, und deren jeder $\frac{60}{18} = 3\frac{1}{3}$ Secunden beträgt. Die Zahl 1080 ist wahrscheinlich wegen der ansehnlichen Menge ihrer Theiler gewählt worden, da $1080 = 2^3.\,3^3.\,5$ ist, mithin die Anzahl der, von ihr und 1 verschiedenen, Theiler derselben $(3+1)(3+1)(1+1) - 2 = 30$ beträgt.

Vergleicht man diese Eintheilung des Tages mit der, bei den ägyptischen Astronomen üblichen, folglich den Begründern der jüdischen Zeitrechnung bekannt gewesenen Sexagesimaltheilung; so findet man, weil $60 = 2^2.\,3.\,5$ ist,

$$1 \text{ Tag} = 24 \times 1080 = 2^3.\,3 \times 2^3.\,3^3.\,5 = 2^6.\,3^4.\,5 \text{ Chlakim,}$$

$$= 60^4 = (2^2.\,3.\,5)^4 = 2^8.\,3^4.\,5^4 \text{ Sexagesimalen der 4. Ordnung;}$$

daher ist

$$1 \text{ Chelek} = \frac{2^8.\,3^4.\,5^4}{2^6.\,3^4.\,5} = 2^2.\,5^3 = (2.\,5)^2.\,5 = 500 \text{ Sexages. d. 4. Ordn.}$$

Der **Chelek** wird wieder in 76 **Regaïm**, **Augenblicke**, getheilt. Diese Zahl hat die Factoren 4 und 19, von denen der leztere in der jüdischen Zeitrechnung höchst bedeutsam ist.

Der **Rega** ist demnach $\frac{500}{76} = \frac{125}{19} = 6\frac{11}{19}$ Sexagesimalen der vierten Ordnung, und $3\frac{1}{3} : 76 = \frac{10}{228} = \frac{1}{22.8}$ beiläufig $\frac{1}{23}$ unserer Secunde.

177.

Die Woche der Juden.

Die Woche (schebua von scheba, sieben) hat 7 Tage, welche die Juden blos mit den Ordnungszahlen benennen, als: erster, zweiter, ... siebenter Wochentag. Den siebenten Wochentag, welchen sie nach einem alten Herkommen, das bereits vor Moses bestand und von ihm nur eingeschärft wurde, als Ruhetag feiern, nennen sie, so wie jeden anderen mit Enthaltung von aller Arbeit zu feiernden Tag, Sabbath (schabbath, Ruhe).

Die Juden fangen ihre Woche an unserem Samstage Abends um 6 Uhr an; weswegen ihr erster Wochentag auch mit unserem ersten Wochentage, dem Sonntage, mithin auch jeder ihrer Wochentage mit dem gleichvielten unseren, nach den ersten 6 Stunden, also in den lezten drei Vierteln seiner Dauer übereinstimmt.

178.

Der Monat der Juden.

Der jüdische Monat (chodesch) ist ein Mondmonat, und heißt entweder voll (male) oder mangelhaft (chassar), je nachdem er 30 oder 29 Tage erhält.

Auf den ersten Tag eines jeden Monates hat Moses ein Opferfest und Gebet angeordnet, dessen richtiger Zeitpunkt seinem noch unwissenschaftlichen Volke nur die wiederkehrende Mondsichel zu erkennen geben konnte; daher jeder Monat mit einem Neumonde (moled, Geburt — des neuen Lichtes) anfangen soll. Unter Neumond versteht man aber hier nicht die Conjunction des Mondes mit der Sonne, wie in der Astronomie, sondern den Zeitpunkt nach der Conjunction, wo der Mond zuerst wieder in der Abenddämmerung sichtbar wird.

Der Anfang des neuen Mondes wurde ehedem, nach Moses Anordnung, zu Jerusalem durch unmittelbare Beobachtung der ersten Erscheinung der Mondsichel in der Abenddämmerung bestimmt; und wenn die Witterung sie zu beobachten hinderte, dem abgelaufenen Monate als Maximum eine Dauer von 30 Tagen beigelegt. Weil aber die Kunde von dieser Beobachtung mittels der ausgesandten Boten, welche man statt der früher üblich gewesenen Signalfeuer einführte, zu den von Jerusalem weit entfernten Juden nicht schnell genug gelangen konnte; wurde festgesezt, daß überall, wohin die Boten nicht zu rechter Zeit kamen, nach Ablauf von 29 Monatstagen, der folgende Tag Rosch chodesch, Anfang des Monates, heißen sollte. War nun der abgelaufene Monat mangelhaft, so galt der Rosch chodesch für den ersten Tag des neuen Monates; war er hingegen voll, so führte auch noch sein lezter Tag

diesen Namen, und es wurden dann zwei Tage **Rosch chodesch** genannt, der lezte des abgelaufenen Monates und der erste des neuen. Doch durfte dies während 12 Monaten nicht weniger als 4 und nicht öfter als 8 Mal geschehen. Die beiden **Rosch chodesch** wurden durch erster und anderer unterschieden. Zugleich wurden alle wichtigen Feste verdoppelt, damit, wenn in den Provinzen ein mangelhafter Monat für voll oder umgekehrt genommen worden war, das Fest wenigstens an einem von beiden Tagen überall zugleich gefeiert werden möchte. Diese Einrichtung besteht bis auf den heutigen Tag, ungeachtet die Dauer der Monate jezt völlig bestimmt ist. Da sie jedoch blos für die von Jerusalem entfernteren Juden getroffen war, so sind in Palästina selbst die Feste, das des Neujahrs ausgenommen, von jeher nur einen Tag gefeiert und die **Rosch chodesch** nicht verdoppelt worden.

Später — wahrscheinlich im vierten Jahrhunderte nach Chr. durch den Rabbi Hillel **Hanassi** — wurde die kyklische Berechnung der Neumonde eingeführt. Man sezte dabei — wie der Thalmud und Maimonides angeben — die mittlere Dauer des synodischen Mondmonates zu 29 Tagen 12 Stunden 793 Chlakim (= 44 Minuten 3 Secunden 20 Terzen) oder zu 4 Wochen 1 T. 12 Stunden 793 Chl. voraus. Dies ist äußerst genau Hipparch's Bestimmung des synodischen Monates, welche nach dem Almagest des Ptolomäus 29 Tage und in Sexagesimalen des Tages 31 der ersten, 50 der zweiten, 8 der dritten und 20 der vierten Ordnung beträgt. Sie ist nach den neuesten astronomischen Beobachtungen nur um etwa $\frac{1}{2}$ Secunde zu groß. (§. 13.)

179.

Das Jahr und der Schaltmonat der Juden.

Das Jahr (**schanah**) der Juden besteht aus zwölf Mondmonaten und wird von Zeit zu Zeit durch einen dreizehnten mit der Sonne ausgeglichen; in welchem Falle es ein Schaltjahr heißt. Es ist nemlich ein gebundenes Mondjahr, bei welchem Sonnen- und Mondlauf berücksichtiget werden; weil die Juden ihre religiösen Feste nicht nur bei einerlei Lichtgestalt des Mondes, sondern auch in einerlei Jahrszeit zu feiern haben.

Die Namen der jüdischen Monate im Gemeinjahr (**schanah peschutah**) sind:

1) **Nisan.**	5) **Ab.**	9) **Kislev.**
2) **Ijar.**	6) **Elul.**	10) **Tebeth.**
3) **Sivan.**	7) **Thischri.**	11) **Schebat.**
4) **Thamus.**	8) **Marcheschvan.**	12) **Adar.**

Im Schaltjahr (schanah meüberet) folgt dem Adar ein zweiter Monat dieses Namens, der zum Unterschied Veadar, noch ein Adar oder Adar scheni, der zweite Adar, und darum jener Adar rischon, der erste, genannt wird. Der eigentliche Schaltmonat ist aber nicht der zweite, sondern der erste Adar; weil das Purimfest, welches im Gemeinjahr auf den Adar trifft, im Schaltjahr im Veadar gefeiert wird, und weil im Schaltjahr der Veadar, gleich dem Adar im Gemeinjahre, 29, dagegen der erste Adar die eingeschalteten 30 Tage enthält.

Jedes astronomische Gemeinjahr der Juden besteht aus 12 synodischen Mondmonaten, mithin aus 12 (29 T. 12 St. 793 Chl.) = 354 T. 8 St. 876 Chl. = 50 W. 4 T. 8 St. 876 Chl.; jedes astronomische Schaltjahr dagegen aus 13 synodischen Mondmonaten, folglich aus 13 (29 T. 12 St. 793 Chl.) = 383 T. 21 St. 589 Chl. = 54 W. 5 T. 21 St. 589 Chl.

180.

Der jüdische Schaltkreis.

Der Schaltkreis der neueren Juden (seit dem vierten Jahrhunderte nach Chr.) umfaßt 19 Jahre, worunter 7 Schaltjahre, also 12 Gemeinjahre sind; und zwar erhalten in jedem Schaltkreise die Jahre 3, 6, 8, 11, 14, 17, 19 einen Schaltmonat. Die Juden gebrauchen daher genau den von den Alexandrinern in der Osterrechnung verwendeten Mondkreis, (§. 82, Seite 212.)

Der astronomische Schaltkreis der Juden enthält demnach $19.12 + 7 = 12.12 + 7.13 = 235$ Mondmonate, daher 235 (29 T. 12 St. 793 Chl.) oder 12 (354 T. 8 St. 876 Chl.) + 7 (383 T. 21 St. 589 Chl.) nemlich 6939 T. 16 St. 595 Chl. = 991 W. 2 T. 16 St. 595 Chl.

Daher ist das von den Ordnern der neueren jüdischen Zeitrechnung angenommene tropische Sonnenjahr = (6939 T. 16 St. 595 Chl.) : 19 = 365 T. 5 St. 997 Chl. 48 Reg. = 365 T. 5 St. 55 M. 25$\frac{1}{2}$ S. = 365·246822 Tage. Somit ist es nur um 13$\frac{1}{2}$ S. länger als das Jahr des Hipparch, welcher es um $\frac{1}{300}$ Tag = 4 M. 48 S. kürzer als das Jahr des Kallippus von 365 T. 6 St., mithin zu 365 T. 5 St. 55 M. 12 S. annahm. Die neuere Bestimmung zu 365·242222 Tagen wird demnach vom jüdischen Sonnenjahr um 0·004600 Tage übertroffen, so daß die Juden jede 2000 Jahre um 9 Tage, daher um 1 Tag in je $\frac{1}{0·004600}$ = 218 Jahren zu viel zählen, und ihre Feste von den vier Jahrpunkten, den Nachtgleichen und Sonnenstillständen, weiter vorwärts schieben. (§. 13.)

181.

Der Ueberschuß eines jüdischen Zeitraumes.

Die Zeit, um welche ein Zeitraum die in ihm enthaltenen vollen Wochen übersteigt, die folglich in Tagen, Stunden und Chlakim ausgedrückt weniger als 7 Tage beträgt, nennt man in der jüdischen Zeitrechnung den Ueberschuß (jithron) dieses Zeitraumes. So ist

der Ueberschuß des Monates = 1 T. 12 St. 793 Chl.
» Gemeinjahres = 4 . 8 . 876
» Schaltjahres = 5 . 21 . 589
» Schaltkreises = 2 . 16 . 595.

Man benützt diesen Ueberschuß, um aus der Eintrittszeit eines Neumondes den Wochentag des um jenen Zeitraum später oder früher erscheinenden Neumondes oder vielmehr die von derjenigen Woche, in welcher dieser Neumond eintritt, seit ihrem Anfange bis zu seinem Eintritte verlaufene Zeit zu berechnen. Ist z. B. ein Neumond in der laufenden Woche zur Zeit 2 T. 9 St. 438 Chl., d. i. am 3ten Tage um 9 Uhr 438 Chlakim eingetreten, so muß um ein Gemeinjahr später, also um den Ueberschuß 4 T. 8 St. 876 Chl. später, ein Neumond zur Zeit 6 T. 18 St. 234 Chl. seiner laufenden Woche d. i. am 7ten Tage um 18 Uhr 234 Chlakim eintreten.

182.

Dauer mehrerer jüdischen Zeiträume.

Zur Erleichterung der Berechnung der Neumonde stellen wir hier die Dauer mehrerer in der jüdischen Zeitrechnung vorkommenden Zeiträume zusammen.

Tafel 1.

Jahre im Schaltkreise	Dauer derselben	Jahre im Schaltkreise	Dauer derselben
1	50 W. 4 T. 8 St. 876 Chl.	11*	573 W. 5 T. 3 St. 928 Chl.
2	101 . 1 . 17 . 672 .	12	624 . 2 . 12 . 724 .
3*	156 . 0 . 15 . 181 .	13	674 . 6 . 21 . 520 .
4	206 . 4 . 23 . 1057 .	14*	729 . 5 . 19 . 29 .
5	257 . 2 . 8 . 853 .	15	780 . 3 . 3 . 905 .
6*	312 . 1 . 6 . 362 .	16	831 . 0 . 12 . 701 .
7	362 . 5 . 15 . 158 .	17*	885 . 6 . 10 . 210 .
8*	417 . 4 . 12 . 747 .	18	936 . 3 . 19 . 6 .
9	468 . 1 . 21 . 543 .	19*	991 . 2 . 16 . 595 .
10	518 . 6 . 6 . 339 .		

Tafel 2.

Schaltkreise	Jahre	Dauer derselben
1	19	991 W. 2 T. 16 St. 595 Chl.
2	38	1982 . 5 . 9 . 110 .
3	57	2974 . 1 . 1 . 705 .
4	76	3965 . 3 . 18 . 220 .
5	95	4956 . 6 . 10 . 815 .
6	114	5948 . 2 . 3 . 330 .
7	133	6939 . 4 . 19 . 925 .
8	152	7931 . 0 . 12 . 440 .
9	171	8922 . 3 . 4 . 1035 .
10	190	9913 . 5 . 21 . 550 .
20	380	19827 . 4 . 19 . 20 .
30	570	29741 . 3 . 16 . 570 .
40	760	39655 . 2 . 14 . 40 .
50	950	49569 . 1 . 11 . 590 .
60	1140	59483 . 0 . 9 . 60 .
70	1330	69396 . 6 . 6 . 610 .
80	1520	79310 . 5 . 4 . 80 .
90	1710	89224 . 4 . 1 . 630 .
100	1900	99138 . 2 . 23 . 100 .
200	3800	198276 . 5 . 22 . 200 .
300	5700	297415 . 1 . 21 . 300 .
400	7600	396553 . 4 . 20 . 400 .
500	9500	495692 . 0 . 19 . 500 .
600	11400	594830 . 3 . 18 . 600 .
700	13300	693968 . 6 . 17 . 700 .
800	15200	793107 . 2 . 16 . 800 .
900	17100	892245 . 5 . 15 . 900 .

183.

Jüdisches Neujahr.

Das Neujahr (rosch haschanah) ist gegenwärtig auf den Anfang oder Moled des Monates Thischri, der ursprünglich der siebente im jüdischen Jahre war, nemlich der 1 Thischri auf den Tag des ersten Neumonds nach der Herbstnachtgleiche, folglich der 0 Thischri auf den Tag vorher, festgesetzt, wofern nicht eine der folgenden fünf Ausnahmen Statt findet.

1. Wenn der Moled Thischri um oder nach 18 Uhr Jerusalemer Zeit, d. i. zu Mittag oder nach dem Mittage eintritt, so heißt er veraltet (moled

sakan), und das Neujahr wird auf den folgenden Tag verschoben, welcher 6 Stunden nach diesem Mittage Abends beginnt. Ist aber dieser Moled vor der Mitte des Tages, wenn auch nur um einen Rega, so wird das Neujahr schon an demselben Tage festgesetzt. Die Zahl 18 wird im Hebräischen mit den Buchstaben jud und cheth geschrieben, welche den lateinischen Buchstaben j und ch gleich lauten und die Zahlen 10 und 8 vorstellen; daher wird dies die Ausnahme wegen Jach genannt. Man führte sie ein, weil man, den religiösen Satzungen gemäß, am Neujahrsfeste die Mondsichel zu sehen möglich machen wollte. *)

2. Wenn der Moled Thischri auf den 1., 4., 6. Wochentag, d. i. auf Sonntag, Mittwoch oder Freitag, fällt, so beginnt das Jahr auch erst mit dem folgenden Tage. Das Neujahr kann also nur am 2., 3., 5., 7. Wochentage, d. i. am Montage, Dinstage, Donnerstage und Samstage, gehalten werden. Weil die Zahlen 1, 4, 6 durch die hebräischen Buchstaben aleph (a), daleth (d) und uaw (u) ausgedrückt werden, so nennt man dies die Ausnahme wegen Adu. Die vier Wochentage 2, 3, 5, 7 aber heißen zusammen Baghas, weil diese Zahlen durch die Buchstaben bet (b), gimmel (g), he (h), sajen (s) ausgedrückt werden.

Zählt man die 7 Wochentage vom 3ten, dem Dinstage, an vorschreitend bis zum 9ten, indem man den 1sten oder Sonntag als den 8ten, und den 2ten oder Montag als den 9ten rechnet; so ist jeder zweite oder geradstellige Tag, nemlich der 4te, 6te, 8te, unzulässig zum Neujahrstag, oder ein Verlegungstag, während jeder ungeradstellige, als der 3., 5., 7., 9. Tag ein fester ist.

Warum die Anordner der cyklischen jüdischen Zeitrechnung das Neujahr von einigen Wochentagen auf den folgenden Tag verlegten, erklärt Maimonides **) daraus, daß die aus den mittleren cyklischen Rechnungen sich ergebenden Moleds allmälig zu weit von den wahren Conjunctionen des Mondes mit der Sonne sich entfernen würden, und man daher von Zeit zu Zeit die Monatsanfänge, um sie den wahren Neumonden wieder zu nähern, um einen Tag bald vor bald zurück schieben muß; was man auch erzielt, wenn man das Jahr an gewissen Wochentagen nicht anfangen läßt. Wahrscheinlich fand man durch eine umständlichere Rechnung, daß man zu diesem Zwecke die kleinere Hälfte der 7 Tage der Woche, also drei Tage, und der Gleichförmigkeit wegen immer einen Tag um den andern auslassen müsse, folglich wenn man von was immer für einem Wochentage an vorwärts zählt, jedesmal die 3 geradstelligen, den 2ten, 4ten und 6ten. Warum man aber hier gerade

*) Turim, 1. Theil §. 428.

**) Maimonides kiduach hachodeach, 7. Abschn. §. 7.

vom Dinstage an zählte, also die angeführten drei, den Mittwoch, Freitag und Sonntag, zu Verlegungstagen bestimmte, dafür bringt Rabed, der Kritiker und Widersacher des Maimonides, *) folgende — wie er selbst sagt — schwache Ursache aus dem Thalmud bei. Einerseits darf das Palmfest — hosana rabba —, das auf den 21 Thischri fällt, nicht auf einen Samstag treffen, weil die Heiligkeit des Sabbaths die Ceremonie mit den Palmen- und Weidenzweigen hindern würde, folglich darf der 1 Thischri kein Sonntag sein. Andrerseits darf das Versöhnungsfest — jom kippur — das am 10 Thischri eintritt, nie an einen Samstag grenzen, also weder auf einen Freitag noch auf einen Sonntag fallen, weil ein am Donnerstage oder Freitage Abends Gestorbener, dem jüdischen Geseze zuwider, zwei Tage unbeerdigt liegen bleiben müßte; mithin darf der 1 Thischri weder ein Mittwoch noch ein Freitag sein. Mehr für sich dürfte jedoch die Vermuthung mancher Rabbiner haben, daß man, weil nach Anordnung der jüdischen Aere im ersten Jahre, die beiden Neujahrsfeste, ohne eine Verlegung, auf den Montag und Dinstag trafen, man diese beiden Tage beibehalten und von dem lezteren an, vorwärts zählen mußte.

Das astronomische Gemeinjahr der Juden von 354 T. 8 St. 876 Chl. ist um 8 St. 876 länger als 354 Tage, das Schaltjahr von 383 T. 21 St. 589 dagegen nur um 2 St. 491 kürzer als 384 Tage; mithin ist das bürgerliche Gemeinjahr der Juden im Mittel 354 Tage = 50 W. 4 T., und ihr bürgerliches Schaltjahr 384 Tage = 54 W. 6 T. lang.

Tritt nun entweder keine Verlegung des Neujahrs auf den nächst kommenden Tag, weder bei dem laufenden noch bei dem nachfolgenden Jahre ein, oder findet sie bei beiden Jahren Statt; so hat das laufende Jahr die mittlere Länge. Verlegt man nur des laufenden Jahres Anfang um einen Tag, so verkürzt man die Länge des Jahres um diesen einen Tag; wird endlich blos des folgenden Jahres Anfang um einen Tag hinaus geschoben, so verlängert man des laufenden Jahres Dauer um diesen einen Tag.

Wegen einer der Ausnahmen Jach oder Adu können demnach die Gemeinjahre der Juden 353, 354, 355 Tage oder 50 W. und 3, 4 oder 5 T., und die Schaltjahre 383, 384, 385 Tage oder 54 W. mit 5, 6 oder 7 T. enthalten.

3. Vereinigen sich beide Ausnahmen, gibt nemlich die Rechnung den Moled Thischri später als 18 Stunden, so daß, wegen Jach, eine Verlegung auf den folgenden Tag vorgenommen werden muß, und gehört dieser folgende Tag zur Ausnahme Adu, so kann Neujahr auch an ihm nicht sein, sondern muß noch um einen Tag, also zusammen um 2 Tage, verschoben werden.

---

*) Maimonides kidusch hachodesch, 7. Abschn. §. 7.

Fällt nemlich der Moled Thischri auf den 3., 5., 7. Wochentag um oder nach 18 Uhr, so wird das Neujahr um 2 Tage, d. i. auf den 5., 7., 2. Wochentag verlegt. Dies nennt man die Ausnahme wegen Jach-Adu.

Durch diese Ausnahme könnte das jüdische Jahr sogar um zwei Tage länger oder kürzer als im Mittel ausfallen. Da man jedoch wegen solcher gewiß nur seltenen Fälle die ohnehin schon auf 6 sich erhebende Anzahl der Arten der jüdischen Jahre nicht noch weiter steigern wollte; so begegnete man diesem Uebelstande durch die beiden folgenden Ausnahmen.

4. Fällt Moled Thischri in einem Gemeinjahr in der Nacht des dritten Wochentags (Dinstags) um oder nach 9 Uhr 204 Chlakim, jedoch noch vor 18 Uhr, d. i. zur Zeit 2 T. 9 St. 204 Chl. oder darnach bis an 2 T. 18 St.; so fände man den Moled Thischri des folgenden Jahres, wenn man um den Ueberschuß des Gemeinjahrs, nemlich 4 T. 8 St. 876 Chl. weiter rechnete. Auf diese Weise gelangete man zwischen 6 T. 18 St. und 7 T. 2 St. 876 Chl., nemlich auf und nach den Mittag des 7. und vor 2 U. 876 Chl. des 8. Wochentages, und müßte, dort wegen Jach-Adu und hier wegen Adu, das folgende Jahr erst mit dem 9. Wochentage (Montage) anfangen. Dann würde das Gemeinjahr, wollte man es bereits mit dem 3. Wochentage (Dinstage) beginnen, über seine 50 Wochen noch 9 — 3 = 6 Tage, also 356 Tage erhalten. Aber ein so langes Gemeinjahr will man nicht. Darum wurde festgesezt, daß, wenn Moled Thischri eines Gemeinjahres zu oder nach der Zeit 2 T. 9 St. 204 Chl. und vor 2 T. 18 St., d. i. am 3. Wochentage (Dinstag) um oder nach 9 U. 204 Chl., aber noch vor 18 U., eintritt, das Neujahr auf den 5. Wochentag (Donnerstag) verlegt wird. Die Zahl 3 wird durch den hebräischen Buchstaben gimmel (g), 9 durch tet (t), 200 durch rēsch (r) und 4 durch daleth (d) ausgedrückt; deswegen nennt man dies die Ausnahme wegen Gatrad.

Wenn jedoch der Moled Thischri auch nur um 1 Chelek vor jenen 204 Chl. eintritt, oder wenn das Jahr ein Schaltjahr ist, so wird das Neujahr auf den 3. Wochentag (Dinstag) festgesezt.

5. Trifft Moled Thischri in einem Gemeinjahre, das einem Schaltjahre folgt, auf den 2. Wochentag (Montag) um oder nach 15 U. 589 Chl., jedoch noch vor 18 U., also in der laufenden Woche zu oder nach der Zeit 1 T. 15 St. 589 Chl., aber vor 1 T. 18 St.; so ist der vorige Moled Thischri um den Ueberschuß des Schaltjahres 5 T. 21 St. 589 Chl., früher, also um oder nach 2 T. 18 St. und vor 2 T. 20 St. 491 Chl., d. i. am 3. Wochentage (Dinstag) um oder nach 18 U., aber vor 20 U. 491 Chl. eingetreten; wodurch wegen Jach-Adu eine Verlegung auf den 5. Wochentag (Donnerstag) nöthig ward. Würde daher jenes Gemeinjahr am 2. oder

vielmehr am 9. Wochentage (Montage) angefangen; so hätte das Schaltjahr über seine 54 W. nur noch 9 — 5 = 4 Tage, also 382 Tage. Allein ein so kurzes Schaltjahr will man nicht. Darum wird der Anfang des Gemeinjahres auf den 3. Wochentag (Dinstag) verlegt. Dies heißt die Ausnahme wegen Betuthakpat. Denn die Zahl 2 des Wochentags wird durch den hebräischen Buchstaben bet (b) oder durch die Sylbe be, die Zahl 15 der Stunden, indem man sie aus 9 und 6 bestehend ansieht, durch die Buchstaben tet (t) und uaw (u), also durch die Sylbe tu, angedeutet; die 500 Chlakim, als aus 400 und 100 zusammengesetzt, werden durch die Buchstaben thaw (th) und kuf (k, q) oder durch die Sylbe thak; endlich die 89 Chlakim, aus 80 und 9 bestehend, durch die Buchstaben pe (p) und tet (t), oder durch die Sylbe pat, vorgestellt.

Diese Ausnahme tritt sehr selten ein; einmal, weil sie nur in einem Gemeinjahre vorkommen kann, das auf ein Schaltjahr folgt, und dann weil die Grenzen, zwischen die der Moled Thischri fallen muß, nur um 18 St. — (15 St. 589 Chl.) = 2 St. 491 Chl. von einander abstehen.

Sollte aber der Moled Thischri vor jenem Zeitpunkte 15 U. 589 Chl., auch nur um einen Chelek früher, eintreten, oder das Jahr nicht unmittelbar einem Schaltjahre nachfolgen; so wird das Neujahr, nach der allgemeinen Regel, auf den 2. Wochentag (Montag) festgesetzt.

184.

Arten und Gestaltung der jüdischen Jahre.

Wegen der eben erörterten fünf Ausnahmen haben die jüdischen Jahre sechserlei Längen.

Das mittlere jüdische Gemeinjahr enthält 354 Tage; und jedes Paar synodischer Mondmonate 2 (29 T. 12 St. 793 Chl.) = 59 T. 1 St. 506 Chl., daher ein Paar bürgerlicher oder Kalendermonate 59 Tage, nemlich der eine 30, der andere 29 Tage. Diese 59 Tage sind in jenen 354 Tagen genau 6 Mal enthalten; darum hat man die 12 Monate des mittleren Gemeinjahres in 6 Paare abgetheilt und dem ersten Monate eines jeden Paares, also jedem ungeradstelligen (dem 1., 3., 5., 7., 9., 11.) volle 30 Tage, dem zweiten dagegen, folglich jedem geradstelligen (dem 2., 4., 6., 8., 10., 12.) nur 29 Tage zugewiesen. Wegen dieses steten Wechsels eines vollen Monates mit einem mangelhaften nennt man dieses Gemeinjahr regelmäßig (schanah kesiderah, ein Jahr wie es die Regel mit sich bringt). — Im mittleren Schaltjahre, welches 384 Tage, folglich einen vollen 30tägigen Monat

mehr als das mittlere Gemeinjahr, enthält, wird blos nach dem 5. Monate (Schebat) der Schaltmonat, der erste Adar, mit 30 Tagen eingeschoben; während der ihm folgende zweite Adar oder der Veadar, wie im Gemeinjahre der Adar, mit dem er identisch ist, nur 29 Tage behält; daher man es ein regelmäßiges Schaltjahr nennt.

Ein Jahr, welches um einen Tag länger als das mittlere ist, — folglich, wenn es ein Gemeinjahr ist, 355, und wenn es ein Schaltjahr ist, 385 Tage enthält — heißt überzählig (schanah schelemah). In ihm wird der zuwachsende Tag dem nächsten mangelhaften Monate nach dem ersten, nemlich dem zweiten, Marcheschvan, zugelegt, so daß das Jahr mit drei vollen Monaten, Thischri, Marcheschvan, Kislev, anfängt.

Ein Jahr dagegen, welches um einen Tag kürzer als das mittlere ist, — daher, wenn es ein Gemeinjahr ist, 353, und wenn es ein Schaltjahr ist, 383 Tage enthält — heißt mangelhaft (schanah chasserah). In ihm wird der wegzulassende Tag dem nächsten vollen Monate nach dem ersten, nemlich dem dritten, Kislev, entzogen, so daß in einem solchen Jahre dem ersten Monate, Thischri, drei mangelhafte, Marcheschvan, Kislev, Tebeth, folgen.

Folgende Tafel gibt für die sechserlei Jahre der Juden die Dauer jedes Monates und den Jahrstag, auf den sein nullter Tag trifft.

Gemeinjahre						Monat	Schaltjahre					
mangelhafte		regelmäßige		überzählige			mangelhafte		regelmäßige		überzählige	
353		354		355			383		384		385	
Tage enthaltend							Tage enthaltend					
Tage	nullter Tag	Tage	nullter Tag	Tage	nullter Tag		Tage	nullter Tag	Tage	nullter Tag	Tage	nullter Tag
30	0	30	0	30	0	1)Thischri	30	0	30	0	30	0
29	30	29	30	30	30	2)Marcheschvan	29	30	29	30	30	30
29	59	30	59	30	60	3)Kislev	29	59	30	59	30	60
29	88	29	89	29	90	4)Tebeth	29	88	29	89	29	90
30	117	30	118	30	119	5)Schebat	30	117	30	118	30	119
29	147	29	148	29	149	6)Adar	30	147	30	148	30	149
. .	. .	. .	. .	. .	. .	Veadar (7	29	177	29	178	29	179
30	176	30	177	30	178	7)Nisan (8	30	206	30	207	30	208
29	206	29	207	29	208	8)Ijar (9	29	236	29	237	29	238
30	235	30	236	30	237	9)Sivan (10	30	265	30	266	30	267
29	265	29	266	29	267	10)Thamus (11	29	295	29	296	29	297
30	294	30	295	30	296	11)Ab (12	30	324	30	325	30	326
29	324	29	325	29	326	12)Elul (13	29	354	29	355	29	356

185.

Jahrrechnung der Juden.

Die neueren Juden (seit dem vierten Jahrhunderte n. Chr.) zählen ihre Jahre von der Schöpfung der Welt, welche sie in das Jahre 3761 v. Chr. sezen. Die Anordner ihrer Zeitrechnung fanden aus der Anzahl der seit der angenommenen Epoche eingetretenen Moleds und der mittleren Dauer des Monates zu 29 T. 12 St. 793 Chl., daß der erste, nach der Herbstnachtgleiche eingetretene, Neumond ihrer Jahrrechnung, — der Moled der Schöpfung, **Moled Tohu**, Neumond des Nichts — in der Nacht des 2. Wochentages (Montags) um 5 U. 204 Chl. mittlerer Zeit zu Jerusalem, also in der laufenden Woche zur Zeit 1 T. 5 St. 204 Chl. eingetroffen sei. Weil nun die Juden ihren 2. Wochentag (Montag) an unserem ersten Wochentage (Sonntag), und zwar nach unserer Art, die Stunden des Tages von der Mitternacht an in 2 Mal 12 Stunden zu zählen, Abends um 6 Uhr anfangen; so traf der jüdische Neumond der Schöpfung nach unserer christlichen Rechnungsweise am ersten christlichen Wochentage (Sonntage) 5 St. 204 Chl. nach 6 Uhr Abends, d. i. in der Nacht von Sonntag auf den Montag um 11 Uhr 204 Chl. (= $11\frac{1}{3}$ Min.) ein, und zwar Sonntag den 6 October des Jahres 3761 vor Chr. Der Zeitpunkt, von dem an in der jüdischen Zeitrechnung die Zeit gezählt wird, ist eigentlich der Anfang der ersten Woche oder des 1. Wochentages (Sonntages) derselben, welcher Samstag den 5 October d. J. 3761 v. Chr. Abends um 6 Uhr zu Jerusalem eintrat. Der **0 Thischri** des Jahres 1 der jüdischen Weltäre ist daher Sonntag der 6 Oct. und der **1 Thischri** Montag der 7 October 3761 v. Chr.

Mit dieser Weltäre verbanden die Juden ihren neunzehnjährigen Schaltkreis dergestalt, daß das erste Jahr ihrer Aere auch das erste ihres ersten Schaltkreises ist. Darum muß, wenn man die Zahl a eines jüd. Jahres durch 19 außerordentlich theilt, der Quotus $\mathfrak{Q}\frac{a}{19}$ die Anzahl der bereits abgelaufenen Schaltkreise, der um 1 vermehrte Quotus $\mathfrak{Q}\frac{a}{19}+1$ die Nummer des laufenden Schaltkreises, und der Rest $\mathfrak{R}\frac{a}{19}$ angeben, das wie vielte jenes Jahr im laufenden Schaltkreise ist. Mithin ist dieses Jahr, vermöge §. 180, ein Schaltjahr, so oft dieser Rest eine der Zahlen 3, 6, 8, 11, 14, 17, 19 ist. Z. B. Für das Jahr a = 5662 findet man $\mathfrak{Q}\frac{a}{19}=297$, $\mathfrak{Q}\frac{a}{19}+1=298$ und $\mathfrak{R}\frac{a}{19}=19$; mithin ist es im 298sten Schaltkreise das 19te und ein Schaltjahr.

In der jüdischen Jahrrechnung besteht demnach jeder Schaltkreis aus $\varpi=19$ Jahren, und darunter sind $s=7$ Schaltjahre, deren Nummern die

Summe $\Sigma\xi = 3+6+8+11+14+17+19 \equiv 3+6+8-8-5-2$, mod $19 \equiv 2$ geben; daher ist in Vorbegr. XXII, 3, $\delta \equiv -4-2 \equiv -6$, mod 19. Mithin verfließen von der Epoche der jüdischen Weltäre bis zu dem Anfange des Jahres a der Schaltjahre $\mathfrak{q}\frac{7a-6}{19}$ und der Gemeinjahre $a-1-\mathfrak{q}\frac{7a-6}{19} = \mathfrak{q}\frac{12a+5}{19}$; zugleich ist dieses Jahr ein Schaltjahr, wenn $\mathfrak{r}\frac{7a-6}{19} > 11$ ist, und ein Gemeinjahr, wenn $\mathfrak{r}\frac{7a-6}{19} < 12$ ausfällt.

186.

Berechnung der Zeit des Eintritts des Moled Thischri eines Jahrs der jüdischen Weltäre.

Der Moled der Schöpfung trat nach dem Anfange der ersten Woche zur Zeit 1 T. 5 St. 204 Chl. ein. Seit diesem Moled vergingen bis zu dem Moled Thischri des Jahres a der jüdischen Weltäre $a-1$ jüdische astronomische Jahre. Mithin ist die Zeit des Eintritts des Moled Thischri des Jahres a nach dem Anfange der **ersten** jüdischen **Woche** $=$ 1 T. 5 St. 204 Chl. $+$ $(a-1)$ jüd. astron. Jahre.

Die Dauer dieser $(a-1)$ astron. Jahre kann man nun entweder berechnen, indem man erwägt, daß sie $\mathfrak{q}\frac{a-1}{19}$ neunzehnjährige Schaltkreise von 991 W. 2. T. 16 St. 595 Chl. und noch $\mathfrak{r}\frac{a-1}{19}$ astron. Jahre des laufenden Schaltkreises in sich fassen. Die Dauer der abgelaufenen Schaltkreise ergibt sich entweder durch das Product $\mathfrak{q}\frac{a-1}{19}$ (991 W. 2 T. 16 St. 595 Chl.) oder bequemer aus der Tafel 2 in §. 182 S. 387, indem man von den $a-1$ Jahren erst die Jahre der in ihnen enthaltenen Hunderte von Schaltkreisen abzieht, dann von dem Reste die in ihm enthaltenen Jahre der Zehner von Schaltkreisen, und endlich von dem neuerdings entfallenden Reste noch die in ihm enthaltenen Jahre der einfachen Schaltkreise; und sodann die nebenbei vorgemerkten Wochen, Tage, Stunden und Chlakim der nach und nach abgezogenen, in den abgelaufenen Schaltkreisen enthaltenen, Jahre zusammenfaßt. Da der nach dem lezten Abziehen noch verbleibende Rest offenbar $\mathfrak{r}\frac{a-1}{19}$ ist, mithin noch die von dem laufenden Schaltkreise bereits verflossenen Jahre angibt, so läßt sich ihre Dauer am einfachsten aus Taf. 1 in §. 182 Seite 386 entnehmen, und zur Dauer der Schaltkreise hinzurechnen. Derselbe lezte Rest um 1 vergrößert, folglich $\mathfrak{r}\frac{a-1}{19} + 1 = \mathfrak{R}\frac{a}{19}$ betragend, gibt noch zu erkennen, ob das vorgelegte Jahr ein Schalt- oder Gemeinjahr ist.

Soll z. B. der **Moled Thischri** des j. J. 5662 berechnet werden, so steht die Rechnung so:

Zeit des **Moled** der Schöpfung				1 T. 5 St. 204 Chl.
In den verflossenen 5662 — 1 = 5661 Jahren				
sind enthalten	3800 J.	od.	198276 W. 5 . 22 . 200 .	
bleiben noch	1861 »			
darin kommen vor	1710 »	. .	89224 . 4 . 1 . 630 .	
Rest	151 »			
hierin sind enthalten	133 »	. .	6939 . 4 . 19 . 925 .	
Rest	18 »	. .	936 . 3 . 19 . 6 .	
mithin zusammen die Zeit des **Moled Thischri** d. J.	5662	. .	295377 W. 5 T. 19 St. 885 Chl.	

und weil $18 + 1 = 19$ ist, muß dieses Jahr ein Schaltjahr sein.

Oder man kann die Dauer der $(a-1)$ jüd. astron. Jahre berechnen, indem man erwägt, daß, bis zum Anfange des Jahres a, Schaltjahre $q\frac{7a-6}{19}$ und Gemeinjahre $q\frac{12a+5}{19}$ verflossen sind, folglich

$(a-1)$ jüd. astron. Jahre

$$= q\frac{12a+5}{19}(354\text{T}.8\text{St}.876\text{Chl.}) + q\frac{7a-6}{19}(383\text{T}.21\text{St}.589\text{Chl.})$$

sein müssen.

Da hierin $q\frac{12a+5}{19} = a - 1 - q\frac{7a-6}{19}$ ist, so findet man auch

$(a-1)$ jüd. astron. Jahre

$$= (a-1)(354\text{T}.8\text{St}.876\text{Chl.}) + q\frac{7a-6}{19}(29\text{T}.12\text{St}.793\text{Chl.}).$$

Von dieser Rechnungsweise kann man leicht auf die vorige übergehen, wenn man beachtet, daß

$$a - 1 = 19q\frac{a-1}{19} + r\frac{a-1}{19}$$

also $q\frac{7a-6}{19} = q\frac{7(a-1)+1}{19} = 7q\frac{a-1}{19} + q\frac{7r\frac{a-1}{19}+1}{19}$ ist, und daß man

$19(354\text{T}.8\text{St}.876\text{Chl.}) + 7(29\text{T}.12\text{St}.793\text{Chl.}) =$ Dauer eines 19j. Schaltk.

$= 6939$ T. 16 St. 595 Chl. $= 991$ W. 2 T. 16 St. 595 Chl.

findet; denn dadurch ergeben sich

$(a-1)$ jüd. astron. Jahre

$$= q\frac{a-1}{19}(6939\text{T}.16\text{St}.595\text{Chl.}) + r\frac{a-1}{19}(354\text{T}.8\text{St}.876\text{Chl.})$$

$$+ q\frac{7r\frac{a-1}{19}+1}{19}(29\text{T}.12\text{St}.793),$$

nemlich gleich der Dauer von $\mathfrak{q}\frac{a-1}{19}$ Schaltkreisen mehr der Dauer von den bereits verflossenen $\mathfrak{r}\frac{a-1}{19}$ Jahren des laufenden Schaltkreises, unter denen sich $\mathfrak{q}\frac{7\left(\mathfrak{r}\frac{a-1}{19}+1\right)-6}{19} = \mathfrak{q}\frac{7\mathfrak{r}\frac{a-1}{19}+1}{19}$ Schaltjahre befinden.

Eine fernere Berechnungsweise werden wir später in §. 197 zu lehren Gelegenheit nehmen.

Verlangt man die Zeit des Eintritts des **Moled Thischri** eines jüdischen Jahres a blos nach dem Anfange **der laufenden Woche**; so läßt man aus der Rechnung alle vollen Wochen hinweg, oder rechnet nur mit den Ueberschüssen der in Betracht kommenden Zeiträume, in gleicher Weise wie oben.

Z. B. Soll der **Moled Thischri** d. J. 5343 gesucht werden, so hat man:

		T.	St.	Chl.
	Moled der Schöpfung	1	5	204
5342				
3800	Jahr Ueberschuß	5	22	200
1542				
1520	» »	5	4	80
22				
19	» »	2	16	595
3	» »	0	15	181
	das Jahr ein Gemeinjahr, und sein **Moled Thischri** in der laufenden Woche zur Zeit	1	15	180

Will man aus der Zeit des Eintritts des **Moled Thischri** eines Jahres jene des nächst folgenden berechnen, so wird man zu ihr die Dauer jenes laufenden Jahres hinzu zählen; nemlich wenn es ein Gemeinjahr ist, 50 W. 4 T. 8 St. 876 Chl., und wenn es ein Schaltjahr ist, 54 W. 5 T. 21 St. 589 Chl.; oder wenn es sich nur um die Eintrittszeit in der laufenden Woche handelt, blos den Ueberschuß des laufenden Jahres.

187.

Berechnung des 1 und 0 Tischri.

Hat man die Zeit des **Moled Thischri** eines gegebenen Jahres a nach §. 186 berechnet und gleich w Wochen, t Tagen, u Stunden und v Chlakim gefunden, so läßt sich leicht der 1 und 0 **Thischri** dieses Jahres berechnen.

In der Regel fällt nemlich der 1 Thischri auf den Tag des Moled, also nach w Wochen auf den $(t+1)$ten Tag; daher trifft

der 0 Thischri nach w Wochen auf den t^{ten} Tag,
oder auf den $7w+t^{ten}$ Tag.

Tritt jedoch der Moled Thischri um oder nach 18 St. ein, ist also $u \geqq 18$, so ist nach der Ausnahme wegen Jach, (§. 183, 1) der 1 daher auch der 0 Thischri auf den nächsten Tag, folglich überhaupt um $q\frac{u}{18}$ zu verlegen, da dieser Quotus für $u < 18$ Null und für $u = 18, 19, \ldots 23$ Eins ist. Will man also die Ausnahme wegen Jach beseitigen, so setzt man

den 1 Thischri nach w Wochen auf den Tag $t+1+q\frac{u}{18}$, also
den 0 Thischri nach w Wochen auf den Tag $t+q\frac{u}{18}$.

Dadurch kommt der 1 Thischri auf den Wochentag $R\frac{t+1+q\frac{u}{18}}{7}$, den wir für einen Augenblick mit T bezeichnen wollen. Er darf jedoch wegen Adu (§. 183, 2) nicht auf die Wochentage 1, 4, 6 fallen, sondern muß auf die nächst folgenden 2, 5, 7 verlegt werden; oder von den Werthen der Zahl $T = 1, 2, 3, \ldots 7$, sind 1, 4, 6 ausgenommen. Die Anzahl dieser Werthe überhaupt ist $\varpi = 7$, die Anzahl der Ausnahmswerthe $s = 3$, die Summe dieser Ausnahmswerthe $\Sigma\xi = 1+4+6 = 11$, daher die Hilfszahl $\delta \equiv -2-11$, mod $7 \equiv 1$. Sonach ist, vermöge Vorbegriffe XXII, 3, Gleichung (199), das Neujahr allgemein um $q\frac{3-\psi+q\frac{3T+1}{7}}{7-\psi}$, und am einfachsten, für $\psi = 3$, um $q\frac{q\frac{3T+1}{7}}{4}$ Tage zu verschieben; wobei $T \equiv t+1+q\frac{u}{18}$, mod 7 ist.

Daher kann man, um die Ausnahme Adu wegzubringen, allgemein um $q\frac{q\frac{3\left(t+q\frac{u}{18}-1\right)}{7}}{4}$ Tage den Jahresanfang verschieben; dann ist

der 1 Thischri nach w Wochen am Tage $t+1+q\frac{u}{18}+q\frac{q\frac{3\left(t+q\frac{u}{18}-1\right)}{7}}{4}$,

und der 0 Thischri nach w Wochen am Tage $t+q\frac{u}{18}+q\frac{q\frac{3\left(t+q\frac{u}{18}-1\right)}{7}}{4}$.

Bezeichnet Δt die Verschiebung des Neujahrs nach dem **Moled Thischri**, so hat man

$$(299) \qquad \Delta t = \mathrm{q}\frac{u}{18} + \mathrm{q}\frac{\mathrm{r}\frac{3\left(t+\mathrm{q}\frac{u}{18}-1\right)}{7}}{4},$$

daher der 1 **Thischri** nach w Wochen am Tage $t + \Delta t + 1$,

und am Wochentage $\mathrm{R}\frac{t+\Delta t+1}{7}$,

der 0 **Thischri** nach w Wochen am Tage $t + \Delta t$,

und am Wochentage $\mathrm{R}\frac{t+\Delta t}{7}$.

Somit bleiben blos noch die zwei Ausnahmen wegen **Gatrad** und **Betuthakpat** zu berücksichtigen.

1. Ist nemlich in einem Gemeinjahr a, wo $\mathrm{R}\frac{a}{19}$ nicht 3, 6, 8, 11, 14, 17, 19, sondern $\mathrm{r}\frac{7a-6}{19} < 12$ ist, nicht nur $t = 2$, sondern auch noch u St. v Chl. $\geqq$ 9 St. 204 Chl. jedoch $<$ 18 St.; so wird, wegen **Gatrad** (§. 183, 4), die Verschiebung des Neujahrs hinter den **Moled Thischri** $\Delta t = 2$, und es fällt

der 1 **Thischri** nach w Wochen auf den 5. Wochentag (Donnerstag) und
der 0 **Thischri** nach w Wochen auf den 4. Wochentag (Mittwoch).

2. Ist in einem Gemeinjahre a, das einem Schaltjahre folgt, wo also $\mathrm{R}\frac{a}{19} = 1, 4, 7, 9, 12, 15, 18$ und $\mathrm{r}\frac{7(a-1)-6}{19} = \mathrm{r}\frac{7a+6}{19} > 11$ sein muß, $t = 1$ und u St. v Chl. $\geqq$ 15 St. 589 Chl. jedoch $<$ 18 St.; so wird, wegen **Betuthakpat**, (§. 183, 5), die Verschiebung des Neujahrs hinter den **Moled Thischri** $\Delta t = 1$, und es fällt

der 1 **Thischri** nach w Wochen auf den 3. Wochentag (Dinstag) und
der 0 **Thischri** nach w Wochen auf den 2. Wochentag (Montag).

Fordert man blos den Wochentag des 1 oder 0 **Thischri**, so genügt es, nur die Zeit t T. u St. v Chl. des **Moled Thischri** in der laufenden Woche aus den Ueberschüssen zu berechnen; denn da ist die Verlegung des Neujahrs

$$(299) \qquad \Delta t = \mathrm{q}\frac{u}{18} + \mathrm{q}\frac{\mathrm{r}\frac{3\left(t+\mathrm{q}\frac{u}{18}-1\right)}{7}}{4} = 0,\ 1,\ 2,$$

daher wenn man mit H den Wochentag des 0 **Thischri** bezeichnet,

$$(300) \qquad H = \mathrm{R}\frac{t+\Delta t}{7} = 1,\ 2,\ 4,\ 6,$$

folglich der Wochentag des 1 **Thischri** $= H + 1 = \mathrm{R}\frac{t+\Delta t+1}{7} = 2,\ 3,\ 5,\ 7.$

Findet keine der Ausnahmen Gatrad und Betuthakpat Statt; so erhält man folgende zusammengehörige Werthe:

$t =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6.
$u < 18, \mathfrak{E}\frac{u}{18}=0,$								$u \geqq 18, \mathfrak{E}\frac{u}{18}=1,$						
$\Delta t =$	1,	$\underline{0,}$	$\underline{\underline{0,}}$	1,	0,	1,	0	1,	1,	2,	1,	2,	1,	2.
$t+\Delta t =$	1,	$\underline{1,}$	$\underline{\underline{2,}}$	4,	4,	6,	6	1,	2,	4,	4,	6,	6,	8.
$H =$	1,	$\underline{1,}$	$\underline{\underline{2,}}$	4,	4,	6,	6	1,	2,	4,	4,	6,	6,	1.
$H+1 =$	2,	$\underline{2,}$	$\underline{\underline{3,}}$	5,	5,	7,	7	2,	3,	5,	5,	7,	7,	2.

Die unterstrichenen Tage können, durch die Ausnahmen Betuthakpat und Gatrad, um einen oder zwei vermehrt werden.

1. Beispiel. Der Moled Thischri des Jahres 1 trat ein in der Zeit 1 T. 5 St. 204 Chl., also der 0 Thischri am 1. Wochentage (Sonntage), nemlich den 6. Oct. 3761 v. Chr.; daher ist dieser Tag die Epoche der jüdischen Jahrrechnung, da nach ihm diese Jahrrechnung anfängt.

2. Beispiel. Der Moled Thischri des Jahres 5662 wird zur Zeit 295377 W. 5 T. 19 St. 885 Chl. eintreten, also der 0 Thischri nach 295377 W. am 6. Tage oder am 2067645. Tage.

3. Beispiel. Im Jahre 5343 trat der Moled Thischri in der laufenden Woche zur Zeit 1 T. 15 St. 580 Chl. ein, daher der 0 Thischri am 1. Wochentage.

188.

Fortsetzung. Abgeändertes Verfahren.

Die Ausnahme wegen Jach läßt sich höchst einfach auch dadurch beseitigen, daß man den Anfang des jüdischen Tages, folglich auch insbesondere den Anfang der ganzen jüdischen Zeitrechnung, von 6 Uhr Abends auf den nächst vorhergehenden Mittag, verlegt und nach dem Vorgange des alexandrinischen Astronomen Ptolemäus von einem Mittage zum anderen die Stunden in einem Zuge von 1 bis 24 zählt, sonach die Zeiten aller Moleds von dem Mittage zunächst vor dem Anfange der jüdischen Zeitrechnung an, folglich um 6 Stunden länger rechnet. Zu diesem Zwecke wird man blos die Zeit des Eintritts des Moleds der Schöpfung um 6 Stunden größer, mithin zu 1 T. 11 St. 204 Chl. anzusezen haben.

Ist dann die Zeit des Moled Thischri eines jüdischen Jahres a gleich W W. T T. U St. V Chl., so ist diese um 6 St. größer als die vorige w W. t T. u St. v Chl., folglich, wenn hier $u = 18, 19, \ldots 23$ ist, wird t T. u St. + 6 St. = (t+1) T. (u+6 − 24) St. = (t+1) T. (u − 18) St. = T T. U St., also $U = u - 18 = 0, 1, \ldots 5$, und $T = t + 1$. Die

durch die Ausnahme **Jach** vorgeschriebene Zugabe eines Tages zu den t Tagen ist demnach bei jenen T Tagen bereits vollzogen.

Um nun auch noch die Ausnahme **Adu** durch eine allgemeine Form zu beseitigen, sei ΔT die Zahl der Tage, um welche das Neujahr überhaupt verlegt wird. Dieses trifft aber nach der Regel auf den $T+1$. Tag der laufenden Woche; und nur wenn $T+1=1, 4, 6$, also $T=0, 3, 5$ ist, wird es um einen Tag verschoben oder $\Delta T=1$ gemacht, während es sonst immer $=0$ bleibt. Man hat daher, nach Vorbegriffe XXII, 3, hier $\varpi=7$, $\varepsilon=3$, $\xi=T=0, 3, 5$, $\Sigma\xi=8\equiv1$, mod 7, $\delta\equiv-2-1$, mod $7\equiv-3$,

mithin $\Delta T = \not{q}\,\dfrac{3+\psi+\not{r}\,\frac{3T-3}{7}}{7+\psi}$ und wenn man am einfachsten $\psi=-3$

setzt, $\Delta T = \not{q}\,\dfrac{\not{r}\,\frac{3(T-1)}{7}}{4}$.

Sonach ist der 1 Thischri nach der W^{ten} Woche am Tage $T+1+\Delta T$

und am Wochentage $\not{R}\,\dfrac{T+1+\Delta T}{7}$,

also der 0 Thischri nach der W^{ten} Woche am Tage $T+\Delta T$

und am Wochentage $H=\not{R}\,\dfrac{T+\Delta T}{7}$;

wofern die Verschiebung des Neujahrs

$$(301)\qquad \Delta T = \not{q}\,\frac{\not{r}\,\frac{3(T-1)}{7}}{4} \text{ ist.}$$

Auf diese Weise bleiben blos noch die beiden selteneren Ausnahmen wegen **Gatrad** und **Betuthakpat** übrig.

1. Ist nemlich in einem Gemeinjahre a, bei der Zeit des **Moled Thischri** in der laufenden Woche, $T=2$ und U St. V Chl. $\overline{\gtrless}$ 15 St. 204 Chl.; so wird, wegen **Gatrad**, $\Delta T=2$, folglich trifft
der 1 **Thischri** nach W Wochen auf den 5. Wochentag (Donnerstag) und der 0 **Thischri** nach W Wochen auf den $H=4$. Wochentag (Mittwoch).

2. Ist ferner in einem Gemeinjahre a, das einem Schaltjahre folgt, bei der Zeit des **Moled Thischri** in der laufenden Woche, $T=1$ und U St. V Chl. $\overline{\gtrless}$ 21 St. 589 Chl.; so wird, wegen **Betuthakpat**, $\Delta T=1$, daher fällt
der 1 **Thischri** nach W Wochen auf den 3. Wochentag (Dinstag) und der 0 **Thischri** nach W Wochen auf den $H=2$. Wochentag (Montag).

189.

Berechnung der Länge eines jüdischen Jahres.

Verlangt man die Länge eines jüdischen Jahres a, so berechne man erstlich den **Moled Thischri** und dann den 0 **Thischri** dieses Jahres a

und des nächst folgenden $a+1$. Treten diese 0 Thischri nach w Wochen am $(t+\Delta t)^{ten}$ Tage und nach w' Wochen am $(t'+\Delta t')^{ten}$ Tage ein, so ergibt sich die Länge l des Jahres a, indem man von diesem letzteren Zeitraume den ersteren abzieht, nemlich

$$(302) \qquad l = w'\,\mathfrak{W}.\,(t'+\Delta t')\,\mathfrak{T}. - (w\,\mathfrak{W}.\,[t+\Delta t]\,\mathfrak{T}.)$$

oder in Tagen

$$= (7w'+t'+\Delta t') - (7w+t+\Delta t).$$

Daraus folgt

$$l \equiv t'+\Delta t' - (t+\Delta t), \text{ mod } 7$$

und, wenn H und H' die Wochentage der 0 Thischri dieser jüdischen Jahre a und $a+1$ vorstellen,

$$H \equiv t+\Delta t$$
$$H' \equiv t'+\Delta t',$$

daher

$$(303) \qquad l \equiv H' - H, \text{ mod } 7.$$

Man weiß aber, daß $l = 353, \; 354, \; 355; \; 383, \; 384, \; 385$
$= 50\,\mathfrak{W}., (3,4,5)\,\mathfrak{T}.; \; 54\,\mathfrak{W}., (5,6,7)\,\mathfrak{T}.;$

daher ist $l \equiv H' - H, \text{ mod } 7 \equiv \; 3, \; 4, \; 5; \; 5, \; 6, \; 7,$

oder $\mathfrak{R}\frac{l}{7} = \mathfrak{R}\frac{H'-H}{7} = \; 3, \; 4, \; 5; \; 5, \; 6, \; 7,$

und $\mathfrak{Q}\frac{l}{7} = 50; \; 54 = 50 + 4j,$

wenn j die Anzahl der Schaltmonate des angegebenen Jahres a, nemlich eine Zahl vorstellt, welche in Gemeinjahren 0 und in Schaltjahren 1 ist, folglich vermöge §. 185 und Vorb. XXII, (199), allgemein durch

$$j = \mathfrak{E}\frac{7+\psi+\mathfrak{r}\frac{7a-6}{19}}{19+\psi}, \quad \psi > -8,$$

und am einfachsten für $\psi = -7$ durch

$$(304) \qquad j = \mathfrak{E}\frac{\mathfrak{r}\frac{7a-6}{19}}{12}$$

bestimmt werden kann.

Da endlich $\qquad l = 7\,\mathfrak{Q}\frac{l}{7} + \mathfrak{R}\frac{l}{7}$

ist, so findet man die Länge des Jahres a blos aus den Wochentagen H und H' der 0 Thischri dieses und des nächst folgenden Jahres

$$(305) \qquad l = 7(50+4j) + \mathfrak{R}\frac{H'-H}{7} = 350 + 28j + \mathfrak{R}\frac{H'-H}{7}$$
$$= (50+4j)\text{ Wochen} + \mathfrak{R}\frac{H'-H}{7}\text{ Tage};$$

wobei immer $\qquad \mathfrak{R}\frac{H'-H}{7} = 3, \; 4, \; 5; \; 5, \; 6, \; 7$ sein muß.

Man zieht nemlich den Wochentag des 0 Thischri des laufenden Jahres von dem des kommenden Jahres ab, nachdem man diesen, falls er nicht größer als jener wäre, um 7 vermehrt hat; und addirt im Gemeinjahre zu 350, im Schaltjahre zu 378 den Rest, welcher dort nur 3, 4, 5, hier nur 5, 6, 7 sein kann.

Z. B. Für das Jahr 5662 fanden wir in §. 186

J. 5662 Moled Thischri = 295377 W. 5 T. 19 St. 885 Chl.
1 Schaltjahr = 54 5 21 589 addirt,
weil 5662 ein Schaltjahr ist,

J. 5663 Moled Thischri = 295432 W. 4 T. 17 St. 394 Chl.
0 Thischri 5662 = 295377 W. 6 T.
0 Thischri 5663 = 295432 W. 4 T.

Länge des Jahres 5662 d. Juden l = 54 W. 5 T.
= 383 Tage.

Oder auch: Der Wochentag des 0 Thischri 5662 ist $H = 6$
» » » » » 5663 » $H' = 4$
$H' - H \equiv 4 - 6 \equiv 5$, mod 7
also Länge des Jahres = 383 T.

190.

Auf welche Wochentage die nullten Thischri zweier nach einander folgenden Jahre treffen können.

Untersuchen wir nun, auf welche Wochentage H und H' die nullten Thischri zweier unmittelbar auf einander folgenden Jahre a und $a + 1$ treffen können, und wie lang dann das zwischen ihnen liegende Jahr a ausfallen muß. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit μ und μ' die Zeiten der Eintritte der Moled Thischri in ihren laufenden Wochen, und mit l die Länge des zwischen sie fallenden Jahres a.

I. Sei dies Jahr ein Gemeinjahr, also $\mu' = \mu + 4$ T. 8 St. 876
und $l = 350 + \mathfrak{R}\frac{H'-H}{7}$.

1) Wenn 0 T. 18 St. $\leqq \mu <$ 1 T. 9 St. 204,
so hat man wegen Jach $H = 1$
5 T. 2 St. 876 $\leqq \mu' <$ 5 T. 18 St.
folglich wegen Adu $H' = 6$
und $l = 355$.

2) Ist 1 T. 9 St. 204 $\leqq \mu <$ 1 T. 15 St. 589,
so ist $H = 1$
5 T. 18 St. $\leqq \mu' <$ 6 T. 0 St. 385,
daher, wegen Jach, $H' = 6$
also $l = 355$.

3) Wird 1 T. 15 St. 589 $\leqq \mu <$ 1 T. 18 St.,
so ist, wenn das Jahr einem Schaltjahre
folgt, wegen **Betuthakpat**, $H = 2$
sonst jederzeit $H = 1$
6 T. 0 St. 385 $\leqq \mu' <$ 6 T. 2 St. 876,
also $H' = 6$
und $l = 354, 355$.

4) So lange 1 T. 18 St. $\leqq \mu <$ 2 T. 9 St. 204,
hat man $H = 2$
6 T. 2 St. 876 $\leqq \mu' <$ 6 T. 18 St.,
daher ist $H' = 6$
und $l = 354$.

5) Ist 2 T. 9 St. 204 $\leqq \mu <$ 2 T. 18 St.,
so ist wegen **Gatrad**, $H = 4$
6 T. 18 St. $\leqq \mu' <$ 7 T. 2 St. 876,
daher wegen **Jach-Adu**, $H' = 1$
und $l = 354$.

6) Hat man 2 T. 18 St. $\leqq \mu <$ 4 T. 18 St.,
so ist, wegen **Jach-Adu**, $H = 4$
0 T. 2 St. 876 $\leqq \mu' <$ 2 T. 2 St. 876,
folglich wegen **Adu** oder **Jach**, $H' = 1$ oder 2.
mithin $l = 354$ oder 355.

7) So oft 4 T. 18 St. $\leqq \mu <$ 6 T. 18 St.
ist, hat man, wegen **Jach-Adu**, $H = 6$
2 T. 2 St. 876 $\leqq \mu' <$ 4 T. 2 St. 876,
also entweder $H' = 2$
oder wegen **Jach-Adu**, $H' = 4$
daher $l = 353, 355$.

8) Wenn 6 T. 18 St. $\leqq \mu <$ 7 T. 18 St.
ist, so ist, wegen **Jach-Adu**, $H = 1$
4 T. 2 St. 876 $\leqq \mu' <$ 5 T. 2 St. 876,
folglich entweder $H' = 4$
oder wegen **Jach-Adu**, $H' = 6$
und sonach $l = 353, 355$.

In Gemeinjahren können daher nur folgende Jahreslängen l und Wochentage H und H' der 0 **Thischri** in diesem und im kommenden Jahre zusammen treffen:

$l = 353$	354	355
$H = \quad 1,\ 6$	$4,\ 2$	$1,\ 6,\ 4$
$H' = \quad 4,\ 2$	$1,\ 6$	$6,\ 4,\ 2.$

II. Sei das zu untersuchende Jahr ein Schaltjahr,

also $\mu' = \mu + 5$ T. 21 St. 589

und $l = 378 + R^{\frac{H'-H}{7}}$.

1) Ist 0 T. 18 St. $\leqq \mu <$ 0 T. 20 St. 491,
so hat man, wegen Jach, $H = 1$
6 T. 15 St. 589 $\leqq \mu' <$ 6 T. 18 St.,
daher $H' = 6$
und $l = 383$.

2) So oft 0 T. 20 St. 491 $\leqq \mu <$ 1 T. 18 St.
ist, wird wegen Jach $H = 1$
6 T. 18 St. $\leqq \mu' <$ 7 T. 15 St. 589,
also wegen Jach-Adu, $H' = 1$
und sonach $l = 385$.

3) Wenn 1 T. 18 St. $\leqq \mu <$ 2 T. 18 St.
ist, muß wegen Jach, $H = 2$
und 0 T. 15 St. 589 $\leqq \mu' <$ 1 T. 15 St. 589
sein, daher ist, wegen Adu od. Jach, $H' = 1$
und $l = 384$.

4) Hat man 2 T. 18 St. $\leqq \mu <$ 2 T. 20 St. 491,
so ist, wegen Jach-Adu, $H = 4$
1 T. 15 St. 589 $\leqq \mu' <$ 1 T. 18 St.,
also, wegen Betuthakpat, $H' = 2$
und $l = 383$.

5) Ist 2 T. 20 St. 491 $\leqq \mu <$ 3 T. 11 St. 695,
so hat man, wegen Jach-Adu, $H = 4$
1 T. 18 St. $\leqq \mu' <$ 2 T. 9 St. 204,
also wegen Jach od. nach der Regel $H' = 2$
und sofort $l = 383$.

6) Wofern 3 T. 11 St. 695 $\leqq \mu <$ 3 T. 20 St. 491
ist, so ist, wegen Adu oder Jach, $H = 4$
2 T. 9 St. 204 $\leqq \mu' <$ 2 T. 18 St.,
also, wegen Gatrad, $H' = 4$
und $l = 385$.

7) Ist 3 T. 20 St. 491 $\leqq \mu <$ 4 T. 18 St.,
so wird, wegen Jach od. nach d. Regel $H = 4$
2 T. 18 St. $\leqq \mu' <$ 3 T. 15 St. 589,
mithin, wegen Jach-Adu o. blos Adu $H' = 4$
daher $l = 385$.

8) Hat man 4 T. 18 St. $\leqq \mu <$ 6 T. 18 St.,
so ist, entweder wegen Jach-Adu,
oder wegen Adu oder nach der Regel, $H = 6$
3 T. 15 St. 589 $\leqq \mu' <$ 5 T. 15 St. 589,
daher, wegen Adu oder nach der Regel $H' = 4$
oder wegen Jach-Adu od. Adu allein $H' = 6$
mithin auch $l = 383, 385$.

9) Ist 6 T. 18 St. $\leqq \mu <$ 7 T. 18 St.,
so wird, wegen Jach, $H = 1$
5 T. 15 St. 589 $\leqq \mu' <$ 6 T. 15 St. 589,
also wegen Adu, o. Jach, o. n. d. Regel $H' = 6$
und $l = 383$.

In Schaltjahren gehören demnach zu den Jahreslängen l folgende Wochentage H und H' der 0 Thischri am Anfange und Schlusse des Jahres:

$l =$	383	384	385
$H =$	1, 6, 4	2	1, 6, 4
$H' =$	6, 4, 2	1	1, 6, 4.

191.

Allgemeine Ausdrücke der Längen der Monate, des Jahrstages und des Wochentages der nullten Monatstage.

Ordnet man die sechserlei Längen der jüdischen Jahre aufsteigend, so daß sie die Reihe

$$l = 353, 354, 355;\ 383, 384, 385,$$

bilden, so kann man jedes Jahr von der so vielten Gattung nennen, als das wie vielte Glied dieser Reihe seine Länge ist. Weil nun jedes Glied, mit Ausnahme des vierten, das nächst vorhergehende um 1 übertrifft; so läßt sich die Gattung g eines Jahres von der Länge l gewiß als der außerordentliche Rest des Ausdruckes $l + x$ nach einem Modul y darstellen, der so wie die Zahl x mittels folgender Betrachtung gefunden werden kann.

Für die nach einander folgenden Werthe von l muß $g = \mathfrak{R}\frac{l+x}{y}$ der Ordnung nach die Zahlen von 1 bis 6, nemlich

$$g = \mathfrak{R}\frac{l+x}{y} = 1,\quad 2,\quad 3;\quad 4,\quad 5,\quad 6 \text{ geben};$$

dann ist $355 + x \equiv 3, \text{ mod } y$

$383 + x \equiv 4,$

folglich wenn man abzieht $28 \equiv 1$ und $27 \equiv 0, \text{ mod } y.$

Hieraus ersieht man, daß y ein Theiler von 27, mithin eine der Zahlen. 3, 9, 27 sein muß. Da aber der Modul y stets größer als der größte nach ihm sich ergebende Rest $g = 6$ bleiben muß, und da man ihn, zur Vereinfachung der Rechnung, doch immer möglichst klein annehmen will, so wird man $y = 9$ sezen.

Soll dann $855 + x \equiv 3, \text{ mod } 9$ sein,

so hat man $x \equiv -1, \text{ mod } 9.$

Mithin findet man aus der Länge l eines Jahres seine Gattung

$$(306) \qquad g = R\frac{l-1}{9}.$$

Die Jahre der 3 ersten Gattungen sind Gemeinjahre, und für sie ist der Quotus $Q\frac{g}{3} = 0;$

die Jahre der drei lezten Gattungen dagegen sind Schaltjahre, und bei ihnen ist der Quotus $Q\frac{g}{3} = 1.$

Bezeichnet man demnach mit j die Anzahl der Schaltmonate eines Jahres der Gattung g, so kann man

$$(307) \qquad j = Q\frac{g}{3}$$

sezen, wofür man nach dem Obigen, wenn man die Jahreslänge l einführt,

$$(308) \qquad j = Q\frac{R\frac{l-1}{9}}{3}$$

schreiben kann.

Die Jahre der 1. und 4. Gattung, bei denen also $R\frac{g}{3} = 1$ ist, sind mangelhaft,
» » » 2. » 5. » » » » » $= 2$ » » regelmäßig,
» » » 3. » 6. » » » » » $= 3$ » » überzählig.

Aus $g = R\frac{l-1}{9}$

folgt auch $g \equiv l - 1, \text{ mod } 9$

und daraus $g \equiv l - 1, \text{ mod } 3,$

weil 3 ein Theiler des Moduls 9 ist; daher hat man auch

$$R\frac{g}{3} = R\frac{l-1}{3}.$$

Somit ist das Jahr von der Länge l oder der Gattung g

	mangelhaft,	regelmäßig,	überzählig,	
wenn $R\frac{l-1}{3} = R\frac{g}{3} =$	1,	2,	3	ist;

und es übersteigt seine mittlere Länge $354 + 30j$ um

$R\frac{l-1}{3} - 2 = R\frac{g}{3} - 2 =$	$-1,$	0,	1	Tage;

was uns berechtiget, die Länge des Jahres auch durch die Gleichung

$$l = 354 + 30j + \mathfrak{R}\frac{g}{3} - 2 \text{ oder}$$

$$(309) \qquad l = 352 + 30\mathfrak{Q}\frac{g}{3} + \mathfrak{R}\frac{g}{3} = 352 + g + 27\mathfrak{Q}\frac{g}{3}$$

auszudrücken.

In **regelmäßigen** Jahren wechseln die Monate von 30 und 29 Tagen, und zwar in Gemeinjahren ununterbrochen, in Schaltjahren dagegen mit der einzigen Unterbrechung, daß vor dem **Adar**, der hier der zweite **Adar** oder **Veadar** wird, der erste **Adar** von 30 Tagen, als Schaltmonat eingeschaltet wird. Bezeichnet man diese beiden **Adar** allgemein durch

$$j^{\text{ter}} \text{ Adar und } j + 1^{\text{ter}} \text{ Adar;}$$

so haben sie

$$30j \text{ und } 29 \text{ Tage,}$$

und man versteht in Gemeinjahren, wo $j = 0$ ist, unter dem 0ten (nullten) **Adar** von 0 Tagen, daß in solchen Jahren dieser **Adar** gar nicht vorkomme, sondern nur der eine 29tägige **Adar**.

In **mangelhaften** Jahren verliert der dritte Monat, **Kislev**, jenen Tag, der dem ganzen Jahre entzogen wird, und erhält sonach überhaupt $30 - \eta$ Tage, wenn der Abzug η mit der Gattung g des Jahres so zusammenhängt, daß er nur für $\mathfrak{R}\frac{g}{3} = 1$ in 1 übergeht, sonst aber, für $\mathfrak{R}\frac{g}{3} = 2$ oder 3, Null wird. Hier besteht demnach unter den 3 Werthen von $\mathfrak{R}\frac{g}{3} = 1, 2, 3$ nur **ein** Ausnahmswerth, daher kann man, vermöge Vorbegr. **XXII**, Gl. (199), diesen Abzug überhaupt sezen

$$\eta = \mathfrak{q}\frac{1 + \psi + \mathfrak{r}\frac{g+1}{3}}{3 + \psi}, \; \psi > -2,$$

folglich insbesondere für $\psi = -1$ oder $= 0$,

$$(310) \qquad \eta = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{g+1}{3}}{2} \text{ oder } \eta = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{g+1}{3} + 1}{3} = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{g-1}{3}}{3}.$$

Sezt man $\qquad g = \mathfrak{r}\frac{l-1}{9}$, so findet man den Abzug des **Kislev**

$$(311) \qquad \eta = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{l}{3}}{2} \text{ oder } \eta = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{l+1}{3}}{3}.$$

In **überzähligen** Jahren gewinnt der zweite Monat, **Marcheschvan**, jenen Tag, der dem ganzen Jahre zugelegt wird, und erhält sonach überhaupt $29 + \vartheta$ Tage, wofern der Zuschuß ϑ mit der Gattung g des Jahres dergestalt zusammenhängt, daß er nur für $\mathfrak{R}\frac{g}{3} = 3$ in 1, sonst aber in 0 übergeht.

Wegen dieses Ausnahmswerthes hat man demnach allgemein im Marcheschvan

den Zuschuß $$\vartheta = \mathfrak{q}\frac{1+\psi+\mathfrak{r}\frac{g-1}{3}}{3+\psi}, \quad \psi > -2,$$
folglich insbesondere für $\psi = -1$ oder $= 0$

$$(312) \qquad \vartheta = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{g-1}{3}}{2} \text{ oder } \vartheta = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{g}{3}}{3},$$

und wenn man l für g einführt

$$(313) \qquad \vartheta = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{l+1}{3}}{2} \text{ oder } \vartheta = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{l-1}{3}}{3}.$$

Diese Regeln begründen die Längen der Monate in jedem jüdischen Jahre; und aus diesen Längen läßt sich dann, entweder durch Zusammenzählung der Tage aller vorausgehenden Monate, oder durch das Abziehen der Tage sämmtlicher nachfolgenden Monate von der Länge des ganzen Jahres, der Jahrstag des nullten Tages jedes Monates finden. Verlangt man dazu noch den Wochentag eines solchen Monatstages, so hat man blos zu bedenken, daß, wenn irgend ein Tag des Jahres auf den Wochentag h trifft, der um d Tage spätere auf den Wochentag $h+d$, oder weil man nach 7 Tagen immer wieder von vorn mit der Zählung der Wochentage anfängt, auf den Wochentag $\mathfrak{R}\frac{h+d}{7}$ fällt.

Nach diesen Vorschriften ist die folgende Tafel berechnet, in welcher l die Länge des Jahres, H und H′ den Wochentag des 0 Thischri in diesem und im kommenden Jahre vorstellt, ferner

$$j = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{l-1}{9}}{3}, \quad \eta = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{l}{3}}{2} = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{l+1}{3}}{3}, \quad \vartheta = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{l+1}{3}}{2} = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{l-1}{3}}{3},$$

u. $H'-H \equiv l, \bmod 7, \; l = 354 + \vartheta - \eta + 30j = 350 + 28j + \mathfrak{R}\frac{H'-H}{7}$
so wie 7 der Modul der Congruenz für die Berechnung der Wochentage ist.

Monat	Enthält Tage	Des nullten Monatstages Jahrstag		Des nullten Monatstages Wochentag	
Thischri	30	0		H	$\equiv H'-l$
Marcheschvan	$29+\vartheta$	30		$H+2$	$\equiv H'+2-l$
Kislev	$30-\eta$	$59+\vartheta$	$=l-295-30j+\eta$	$H+3+\vartheta$	$\equiv H'-1-2j+\eta$
Tebeth	29	$89+\vartheta-\eta$	$=l-265-30j$	$H-2+\vartheta-\eta$	$\equiv H'+1-2j$
Schebat	30	$118+\vartheta-\eta$	$=l-236-30j$	$H-1+\vartheta-\eta$	$\equiv H'+2-2j$
j. Adar	30j	$148+\vartheta-\eta$	$=l-206-30j$	$H+1+\vartheta-\eta$	$\equiv H'-3-2j$
(1 + j). Adar (Veadar)	29	$148+\vartheta-\eta+30j$	$=l-206$	$H+1+\vartheta-\eta+2j$	$\equiv H'-3$
Nisan	30	$177+\vartheta-\eta+30j$	$=l-177$	$H+2+\vartheta-\eta+2j$	$\equiv H'-2$
Ijar	29	$207+\vartheta-\eta+30j$	$=l-147$	$H-3+\vartheta-\eta+2j$	$\equiv H'$
Sivan	30	$236+\vartheta-\eta+30j$	$=l-118$	$H-2+\vartheta-\eta+2j$	$\equiv H'+1$
Thamus	29	$266+\vartheta-\eta+30j$	$=l-88$	$H+\vartheta-\eta+2j$	$\equiv H'+3$
Ab	30	$295+\vartheta-\eta+30j$	$=l-59$	$H+1+\vartheta-\eta+2j$	$\equiv H'-3$
Elul	29	$325+\vartheta-\eta+30j$	$=l-29$	$H+3+\vartheta-\eta+2j$	$\equiv H'-1$
Thischri	. . .	$354+\vartheta-\eta+30j$	$=l$	$H-3+\vartheta-\eta+2j$	$\equiv H'$

	Gemeinjahr			Schaltjahr		
$j=$		0			1	
$l=$	353,	354,	355	383,	384,	385
$\equiv$	3,	4,	5	5,	6,	7
$g=$	1,	2,	3	4,	5,	6
$H'-H\equiv$	3,	4,	5	5,	6,	7
$\vartheta=$	0,	0,	1	0,	0,	1
$\eta=$	1,	0,	0	1,	0,	0
$\vartheta-\eta=$	−1,	0,	1	−1,	0,	1

192.

Bestimmung des Tages in der jüdischen Zeitrechnung oder des Wochentages, auf welchen ein angegebener Monatstag oder Jahrstag trifft.

Hat man bereits, nach §. 187, berechnet, daß der 0 **Thischri** des Jahres a in der jüdischen Zeitrechnung nach w Wochen auf den $t+\Delta t^{ten}$ Tag oder auf den $7w+t+\Delta t^{ten}$ Tag und auf den Wochentag $H=\mathfrak{R}\frac{t+\Delta t}{7}$ eintrifft; so kann man leicht berechnen, auf welchen Wochentag und Tag der Zeitrechnung der d^{te} Tag dieses Jahres oder der angegebene Tag eines bezeichneten Monates fällt, mit welchem dieser d^{te} Jahrstag, wie die Tafel in §. 184, Seite 392, schnell nachweist, zusammen trifft. Es fällt nemlich dieser Tag nach w Wochen auf den $t+\Delta t+d^{ten}$ Tag

oder nach $w+\mathfrak{Q}\frac{t+\Delta t+d}{7}$ Wochen auf den $\mathfrak{R}\frac{t+\Delta t+d}{7}$ten Wochentag oder auf den

$$(314) \qquad n=7w+t+\Delta t+d^{ten} \text{ Tag}$$

der jüdischen Zeitrechnung und auf den Wochentag

$$(315) \qquad h=\mathfrak{R}\frac{t+\Delta t+d}{7}=\mathfrak{R}\frac{H+d}{7}.$$

Z. B. Auf welchen Tag n der jüdischen Zeitrechnung und auf welchen Wochentag h trifft der 22 **Nisan** des Jahres 5662?

Dieses Jahr ist, vermöge der Beispiele in §. 187 u. 189, ein mangelhaftes Schaltjahr von 383 Tagen,

sein 0 **Thischri** fällt nach	295377 W. auf den 6. T.	= 2067645 T.
der 22 **Nisan** in einem solchen Jahre vermöge der Tafel in §. 184, nach	32 W. » » 4. T.	= 228 T.
daher der 22 **Nisan** d. J. 5662 nach	295410 W. auf den 3. T.	= 2067873 T.

folglich ist dieser ein 3. Wochentag (Dinstag).

Will man nur den Wochentag, so hat man . . . $H=6$

dann vermöge Tafel in §. 184, S. 392, $d=206+22=228\equiv 4$, mod 7

folglich $h\equiv H+d\equiv 10\equiv 3=$ Dinstag.

Ist der Wochentag h des m^{ten} Tages in einem Monate zu suchen, dessen 0. Tag auf den Wochentag h_0 trifft, wie die Tafel in §. 191, S. 409, angibt, so ist

$$(316) \qquad h=\mathfrak{R}\frac{h_0+m}{7}\equiv h_0+m, \text{ mod } 7.$$

Z. B. Der 0 **Nisan** d. J. 5662, in welchem $l=383$, $H=6$ und $H'=4$ ist, fällt, nach der Tafel in §. 191, S. 409, auf den Wochentag $h_0\equiv H'-2\equiv 4-2\equiv 2$, also der 22 **Nisan**, wo $m=22\equiv 1$ ist, auf den $h\equiv 2+1\equiv 3^{ten}$ Wochentag (Dinstag).

Ohne alle Rechnung ergibt sich der Wochentag eines jeden Tages in einem jüdischen Jahre, dessen Gattung und Wochentag des 0 Thischri bekannt ist, mittels folgender zwei Tafeln, von denen die erste den Wochentag des 0 Tages jedes Monates, und die andere zu diesem Wochentage jenen des angegebenen Tages dieses Monates liefert.

Tafel 1.

Gemeinjahr							Wochentag des 0 Thischri	Schaltjahr						
kurzes		mittleres		langes				kurzes			mittleres	langes		
353		354		355				383			384	385		
Tage enthaltend								Tage enthaltend						
1	6	4	2	1	6	4	im laufenden Jahre	1	6	4	2	1	6	4
4	2	1	6	6	4	2	im kommenden Jahre	6	4	2	1	1	6	4
Wochentag des 0. Monatstages							Monate	Wochentag des 0. Monatstages						
1	6	4	2	1	6	4	Thischri	1	6	4	2	1	6	4
3	1	6	4	3	1	6	Marcheschvan	3	1	6	4	3	1	6
4	2	7	5	5	3	1	Kislev	4	2	7	5	5	3	1
5	3	2	7	7	5	3	Tebeth	5	3	1	7	7	5	3
6	4	3	1	1	6	4	Schebat	6	4	2	1	1	6	4
1	6	5	3	3	1	6	Adar	1	6	4	3	3	1	6
.	.	.	.	.	.	.	Veadar	3	1	6	5	5	3	1
2	7	6	4	4	2	7	Nisan	4	2	7	6	6	4	2
4	2	1	6	6	4	2	Ijar	6	4	2	1	1	6	4
5	3	2	7	7	5	3	Sivan	7	5	3	2	2	7	5
7	5	4	2	2	7	5	Thamus	2	7	5	4	4	2	7
1	6	5	3	3	1	6	Ab	3	1	6	5	5	3	1
3	1	7	5	5	3	1	Elul	5	3	1	7	7	5	3

Tafel 2.

Monatstag.	Wochentag.	Jüdischer Wochentag.	Christlicher Wochentag.
0. 7. 14. 21. 28.	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.	1.	Sonntag.
1. 8. 15. 22. 29.	2. 3. 4. 5. 6. 7. 1.	2.	Montag.
2. 9. 16. 23. 30.	3. 4. 5. 6. 7. 1. 2.	3.	Dinstag.
3. 10. 17. 24.	4. 5. 6. 7. 1. 2. 3.	4.	Mittwoch.
4. 11. 18. 25.	5. 6. 7. 1. 2. 3. 4.	5.	Donnerstag.
5. 12. 19. 26.	6. 7. 1. 2. 3. 4. 5.	6.	Freitag.
6. 13. 20. 27.	7. 1. 2. 3. 4. 5. 6.	7.	Samstag.

193.

Zu einem Tage der jüdischen Zeitrechnung das Jahr, den Jahrs-, Monats- und Wochentag zu berechnen, dem er entspricht.

Sei der angegebene Tag der n^{te} in der jüdischen Zeitrechnung, so trifft er auf den Wochentag $h \equiv n$, mod 7, und ist nach der $\mathfrak{Q}\frac{n}{7}$ten Woche der $\mathfrak{R}\frac{n}{7}$te Tag. Von diesem Tage $n = 7\mathfrak{Q}\frac{n}{7} + \mathfrak{R}\frac{n}{7} = \mathfrak{Q}\frac{n}{7}$ W. $\mathfrak{R}\frac{n}{7}$ Tag rechne man ab die Zeit des Moleds der Schöpfung 1 T. 5 St. 204, und die größte darin enthaltene, in Wochen, Tagen, Stunden und Chlakim ausgedrückte, Dauer von Hunderten der Schaltkreise; von dem Reste die größte darin enthaltene Dauer von Zehnern der Schaltkreise; von dem Reste die größte in ihm enthaltene Dauer einzelner Schaltkreise und endlich von dem Reste noch die größte in ihm enthaltene Dauer von Jahren des laufenden Schaltkreises. Dann gibt die Summe aller abgezogenen Zeiten, welche w Wochen t Tage u St. v Chl. betragen mag, die Zeit des **Moled Thischri**, welcher dem angegebenen Tage zunächst vorangeht; und die Summe aller abgezogenen vollen Jahre die Anzahl $a - 1$ der bis zu diesem **Moled** verflossenen Jahre. Vergrößert man diese Anzahl um 1, so findet man das Jahr a der jüdischen Aere, dem dieser **Moled Thischri** zugeschrieben wird. Vergrößert man auch die Anzahl $\mathfrak{r}\frac{a-1}{19}$ der von dem laufenden Schaltkreise verflossenen Jahre um 1, so erhält man die Zahl $\mathfrak{R}\frac{a}{19}$, welche angibt, das wie vielte das Jahr a in diesem Schaltkreise ist, und daß es ein Schaltjahr sei, wenn diese Nummer 3, 6, 8, 11, 14, 17, 19 ist.

Aus der Zeit des **Moled Thischri** berechnet man nach §. 187 den Tag

$$N = 7w + t + \Delta t \qquad (317)$$

der jüdischen Zeitrechnung und den Wochentag

$$H \equiv t + \Delta t, \text{ mod } 7, \qquad (318)$$

auf den der **0 Thischri** fällt.

Sofort ist der angegebene n^{te} Tag im Allgemeinen im Jahre a der $d = n - N^{te}$ Tag.

Weil hieraus $d = n - (7w + t) - \Delta t$ folgt und jederzeit $n \geqq 7w + t$,*) also $n - (7w + t) = 0, 1, 2, \ldots$ und zugleich $\Delta t = 0, 1, 2$ ist; so kann $d = n - N = -1, 0, 1, 2, \ldots$ werden. Ergibt sich nun

1) insbesondere $d = -1$, nemlich N um 1 größer als n, so ist der angegebene Tag der erste Tag vor dem **0 Thischri** des Jahres a, also eigentlich der vorlezte oder **28 Elul** des vorhergehenden Jahres $a - 1$.

---

*) $n = 7w + t$ oder überhaupt $u = 0$ und $v = 0$ besteht nur in den Jahren $a \equiv 51171 + 6287\varphi$, mod 98496 für $\varphi = 0, 1, 2, 3$. Wienach?

2) Ist aber d = 0, nemlich N = n, so ist der angegebene Tag der **0 Thischri** des Jahres a, folglich der lezte oder 29 **Elul** des vorhergehenden Jahres a — 1.

3) In jedem anderen Falle, wo N < n ausfällt, ist der angegebene Tag wirklich der d = n — N^te^ des Jahres a.

Um endlich noch den entsprechenden Monatstag zu finden, so ersieht man leicht, daß, so lange d < 60 ist, der gefundene

d^te^ Tag im Jahre = d Thischri = d — 30 Marcheschvan

sein muß. Findet sich aber d > 59, so muß man noch die Art des Jahres a bestimmen; wozu es schon genügt, wenn man nur noch den Wochentag H′ des 0 Thischri im nächst folgenden Jahre a + 1 kennt. Zu diesem Zwecke addirt man zu dem Ueberschusse t T. u St. v Chl. der gefundenen Zeit des Moled Thischri den Ueberschuß des Jahres a, nemlich, wenn es ein Gemeinjahr ist, 4 T. 8 St. 876 Chl. und wenn es ein Schaltjahr ist, 5 T. 21 St. 589 Chl., um den Ueberschuß t′ T. u′ St. v′ Chl. der Zeit des Moled Thischri des Jahres a + 1 zu erhalten. Dann trifft der 0 Thischri dieses Jahres auf den Wochentag $H' \equiv t' + \Delta t'$, mod 7; und man findet aus H und H′ die Länge l und die Art, so wie auch die Zahlen j, ϑ, η des Jahres a vermöge §. 189 und 191, folglich kann man entweder nach der Tafel in §. 184 oder nach jener in §. 191 den Monat und Tag angeben, worauf der d^te^ Tag dieses Jahres trifft.

Beispiel. Sei gegeben der 1506180. Tag der jüdischen Zeitrechnung, und für ihn Jahr, Monat und Tag zu suchen.

Hier ist nun n = 1506180 Tag = 215168 W. 4 Tag; daher der angegebene Tag ein Mittwoch.

Hierin sind enthalten:

		W.	T.	St.	Chl.
Zeit des Moleds der Schöpfung	=	.	1 T.	5 St.	204
200 Schaltkreise = 3800 Jahre	=	198276	5	22	200
und noch		16891	3	20	676
darin ferner 10 Schaltkreise = 190 Jahre	=	9913	5	21	550
und		6977	4	23	126
darin noch 7 Schaltkreise = 133 Jahre	=	6939	4	19	925
und		38	0	3	281
also im Ganzen 4123 Jahre, oder die Zeit des Moled Thischri	=	215130	3	20	799.

Das gesuchte Jahr ist demnach a = 4123 + 1 = 4124,
das erste im laufenden Schaltkreise, folglich ein Gemeinjahr. Sein 0 Thischri ist daher in der jüdischen Zeitrechnung
der Tag N = 215130 W. 4 T.,
also der H = 4te Wochentag oder ein Mittwoch. Sofort ist
der angegebene Tag n = 215168 W. 4 T.
im Jahre 4124 der Tag d = n — N = 38 W. = 38 . 7 = 266 T.

Gibt man ferner zu dem Ueberschusse	3 T.	20 St.	799
des Moled Thischri noch den Ueberschuß des Gemeinjahres	4 .	8 .	876
so findet man den Ueberschuß der Zeit des Moled Thischri 4125	1 .	5 .	595

daher trifft sein 0 Thischri auf den Wochentag H' = 1,
und sofort ist das Jahr 4124 ein regelmäßiges Gemeinjahr von 354 Tagen. In ihm ist aber der angegebene Tag der 266ste, also nach §. 191 der 30 Sivan.

Der 1506180. Tag der jüdischen Zeitrechnung ist demnach Mittwoch der 30 Sivan des Jahres 4124 der jüdischen Weltäre, welches ein regelmäßiges Gemeinjahr von 354 Tagen ist, dessen nullter Tag ein vierter, der letzte Tag aber ein erster Wochentag ist.

194.

Vergleichung der jüdischen Zeitrechnung mit anderen.

Soll die jüdische Zeitrechnung mit einer anderen verglichen werden, so verlegen wir den Anfang des jüdischen Tages von dem Abende auf die nächst folgende Mitternacht, also um 6 Stunden vorwärts; daher auch den Anfang oder die Epoche der jüdischen Zeitrechnung auf die Mitternacht, mit welcher, nach der julianisch-christlichen Zeitrechnung, der Sonntag der 6 October 3761 vor Chr. oder 1749 der byzantinischen Weltäre anfing. Diese Epoche der jüdischen Weltäre liegt daher hinter jener der byzantinischen Weltäre um 638492 Tage. Damit läßt sich die Vergleichung der jüdischen Zeitrechnung mit jeder anderen, nach den in §. 31 und 32 der allgem. Chronol. ertheilten allgemeinen Vorschriften bewirken.

Beispiel. Theon, der Commentator des Almagest *), beobachtete eine Sonnenfinsterniß zu Alexandrien, im 1112. Jahre seit Nabonassar am 24sten des ägyptischen Thoth oder am 22sten des alexandrinischen Payni Nachmittags, also Mittwoch am 16 Juni 364 nach Chr. (§. 139, II, Beisp.). Welches ist das jüdische Datum dieser Beobachtung?

*) l. VI, p. 382.

Hier ist nabonassarisches Jahr $a' = 1112$, und Tag $d' = 24$ Thoth $= 24$, daher ist dieser der Wochentag $h \equiv 1112 + 24 + 2 \equiv -1 + 3 + 2$, mod 7 $\equiv 4 =$ Mittwoch, ferner in der Aere selbst der Tag $n' = 365 . 1111 + 24 = 405539$, und der Abstand der Epoche der Aere von jener der byzantinischen $g' = 1739133$; der Tag ist demnach in der byzantinischen Weltäre der Tag

$$n' + g' = 2144672 = n + g.$$

Die jüdische Aere fängt um $g = 638492$ Tage später als die byzantinische an, also ist er in der jüdischen Aere der Tag $n = 1506180$; und somit ist der Tag der Beobachtung, nach dem in §. 193 aufgelösten Beispiele, Mittwoch der **30 Sivan des Jahres 4124 der jüdischen Aere.**

195.

Vergleichung der jüdischen Zeitrechnung mit der christlichen.

Da das mittlere Jahr der Juden (vermöge §. 180) hinreichend nahe mit dem mittleren julianischen und lilianischen Jahre übereinstimmt, so bleibt sein Anfang nahe genug und noch durch etwa 18000 Jahre in den Herbstmonaten des christlichen Jahres stehen. Nun fing das Jahr 1 der jüdischen Weltäre im Herbste des Jahres 3761 vor Chr. an; folglich muß

das Jahr a der jüdischen Weltäre
  anfangen im Jahre $a - 3761$ nach Chr.
  und enden » » $a - 3760$ » »;
umgekehrt muß im Jahre a nach Chr.
  enden das Jahr $a + 3760$ der jüdischen Weltäre
  und anfangen » » $a + 3761$ » » »
oder das Jahr a nach Chr.
  fängt an im Jahre $a + 3760$ *)
  und endet im Jahre $a + 3761$ der jüdischen Weltäre;
und im Jahre a der jüdischen Aere
  endet das Jahr $a - 3761$
  und beginnt » » $a - 3760$ nach Chr.

---

*) Bezeichnet man dieses Jahr der Juden mit a', so daß $a' = a + 3760$ wird, und verbindet man damit die Bemerkung, daß (vermöge §. 180)

der jüdische Mondcirkel $\equiv a'$, mod 19

ist; so erhält man

jüdischer Mondcirkel $\equiv a - 2$, mod 19.

Dieser jüdische Mondcirkel ist demnach wirklich der Cyclus lunaris des Dionysius. [§. 49. III. (74).]

196.

Fortsezung. Bestimmung des Anfangs eines jüdischen Jahres im christlichen Jahre.

Von dem Anfange der jüdischen Zeitrechnung und ihrer ersten Woche, welcher Samstag den 5 October 3761 vor Chr. Abends um 6 Uhr eintrat, bis zum **Moled Thischri** des Jahres a der jüdischen Aere vergeht (vermöge §. 186 und 187) die Zeit

$$w\text{ W. } t\text{ T. } u\text{ St. } v\text{ Chl.} = (1\text{ T. } 5\text{ St. } 204\text{ Chl.}) + (a-1)\text{ jüd. astr. Jahre},$$

daher ist der 0 **Thischri** dieses Jahres, wofern man mit Δt die, nach §. 187 zu bestimmende, Verschiebung des Neujahrs hinter den **Moled Thischri** bezeichnet, der

$$(317)\qquad N = 7w + t + \Delta t^{te}\text{ Tag der ganzen Zeitrechnung,}$$

und der Wochentag $H \equiv t + \Delta t$, mod 7.

Von der Mitternacht des ersten Tages der jüdischen Weltäre, unmittelbar nach dem Anfange der jüdischen Zeitrechnung, mit welcher demnach Sonntag der 6 October 3761 vor Chr. anhob, bis zur Mitternacht dieses 0 **Thischri** des Jahres a oder des N^{ten} Tages der jüdischen Aere sind daher $N-1$ Tage, und andererseits, wenn mit dieser Mitternacht der g^{te} October des christlichen Jahres $a' = a - 3761$ anfängt, folglich jener 0 **Thischri** mit dem g^{ten} October übereinkommend angesehen werden kann,

$$(g-6)\text{ Tage} + (a-1)\text{ Jahre der christl. Aere vergangen;}$$

mithin sind $(g-6)$ Tage $+ (a-1)$ Jahre der christl. Aere $= (N-1)$ Tage und

$$g = (N+5)\text{ Tage} - (a-1)\text{ Jahre der christl. Aere.}$$

Es sind aber

$$(a-1)\text{ J. d. christl. Aere} = (a-1)\text{ jul. Jahre} - k\text{ Tage,}$$

wenn **k** die Voreilung des gregorianischen Styls vor dem julianischen im Herbste des Jahres a' nach Chr. andeutet (§. 47, II); daher ist

$$g = (N + k + 5)\text{ Tage} - (a-1)\text{ jul. Jahre.}$$

Hier insbesondere, wo das Jahr 3761 vor Chr., von dessen 6 October man die a julianischen Jahre zu zählen anfängt, ein Schaltjahr ist, trifft der Schalttag jedesmal in das vierte Jahr, daher sind bis zum a^{ten} julianischen Jahre $q\frac{a-1}{4}$ Schalttage, und sonach

$$(a-1)\text{ jul. Jahre} = 365(a-1) + q\frac{a-1}{4}\text{ Tage}$$

und

$$g = N + k + 5 - 365(a-1) - q\frac{a-1}{4}.$$

Die Bestimmung des g^{ten} Octobers, worauf der 0 **Thischri** trifft, läßt sich in folgender Weise vereinfachen.

Setzt man für N seinen Ausdruck

$$N = 7w + t + \Delta t \text{ Tage} = w \text{ Wochen} + (t + \Delta t) \text{ Tage},$$

so wird $g = (5 + t + \Delta t + k) \text{ T.} + w \text{ Woch.} - (a - 1) \text{ jul. J.}$

Fast immer sind die $a - 1$ julianischen Jahre um einige Tage länger als w Wochen, und man kann dies in den äußerst wenigen Fällen, wo das Gegentheil eintritt, leicht dadurch erzielen, daß man in obiger Zeit des **Moled Thischri** um eine Woche weniger, dagegen um 7 Tage mehr, also statt w Wochen und t Tage lieber $(w - 1)$ Wochen und $(t + 7)$ Tage rechnet; mithin läßt sich obige Vergleichung als allgemein bestehend ansehen. Mögen nun jene $a - 1$ julianischen Jahre die w Wochen um p Tage übertreffen, wobei p fast immer positiv und nur sehr selten negativ ausfällt, folglich

$$p \text{ Tage} = (a - 1) \text{ jul. Jahre} - w \text{ Wochen}$$

oder $$p = 365(a - 1) + q\frac{a-1}{4} - 7w$$

sein, so ist

$$g = 5 + t + \Delta t + k - p.$$

Zur Bestimmung von p entnehmen wir aus dem Ausdrucke der Zeit des **Moled Thischri**, (§. 186 und 187),

$$w \text{ W.} = (1 \text{ T. } 5 \text{ St. } 204 \text{ Chl.}) + (a - 1) \text{ jüd. astr. J.} - (t \text{ T. } u \text{ St. } v \text{ Chl.})$$

und erhalten sonach

$$p \text{ Tage} = (a - 1) \text{ jul. J.} - (a - 1) \text{ jüd. astr. J.} - (1 \text{ T. } 5 \text{ St. } 204 \text{ Chl.}) + (t \text{ T. } u \text{ St. } v \text{ Chl.}).$$

Da nun in den julianischen Jahren nach 4, in den jüdischen Jahren aber nach 19jährigen Kreisen eingeschaltet wird; so ist es erforderlich, beide Jahrreihen in Perioden von je $4 . 19 = 76$ Jahren abzutheilen und allgemein

$$a - 1 \text{ J.} = q\frac{a-1}{76} \text{ 76jähr. Per.} + r\frac{a-1}{76} \text{ Jahre}$$

zu setzen. Seien ferner die jüdischen Zeiträume

$$1 \text{ T. } 5 \text{ St. } 204 \text{ Chl.} + r\frac{a-1}{76} \text{ jüd. astron. J.} = B \text{ Woch.} + \beta,$$

$$q\frac{a-1}{76} \text{ jüd. 76jähr. Per.} = C \text{ Woch.} + \gamma,$$

wo β und γ die Ueberschüsse dieser Zeiten in Tagen, Stunden und Chlakim ausgedrückt vorstellen; so erfolgt

$$p \text{ Tage} = r\frac{a-1}{76} \text{ jul. Jahre} - B \text{ W.} + q\frac{a-1}{76} \text{ jul. 76jähr. Per.} - C \text{ W.} + t \text{ T. } u \text{ St. } v \text{ Chl.} - (\beta + \gamma).$$

Setzt man nunmehr

$$(319) \qquad r\frac{a-1}{76} \text{ jul. Jahre} - B \text{ Woch.} = b \text{ Tage}$$

$$q\frac{a-1}{76} \text{ jul. 76j. Per.} - C \text{ Woch.} = c \text{ Tage},$$

so wird

$$p \text{ Tage} = (b + c)\text{ T.} + t\text{ T. } u\text{ St. } v\text{ Chl.} - (\beta + \gamma).$$

Es ist aber nach den vorangehenden Ausdrücken

$$(B\text{ W.} + \beta) + (C\text{ W.} + \gamma) = w\text{ W. } t\text{ T. } u\text{ St. } v\text{ Chl.},$$

und diese Gleichheit kann nur bestehen, wenn die Summe der Ueberschüsse β und γ außer etwelchen Wochen, deren Anzahl s sein mag, genau noch t T. u St. v Chl. enthält; nemlich wenn

$$(320) \qquad \beta + \gamma = s\text{ W. } t\text{ T. } u\text{ St. } v\text{ Chl.}$$

ist. Dann muß auch

$$B + C + s = w$$

sein; und sofort erfolgt

$$p\text{ Tage} = (b + c)\text{ T.} - s\text{ Woch.}$$

oder endlich in Tagen $\qquad p = b + c - 7s,$

und

$$(321) \qquad g = 5 + (7s + t + \Delta t) + k - (b + c).$$

Sobald man g berechnet hat, ist

$$(322) \qquad \text{der 0 Thischri d. jüd. J. } a = g\text{ Oct.} = 30 + g\text{ Sept.}$$
$$= 61 + g\text{ Aug. d. J. } a'\text{ n. Chr.}$$

wofern

$$(323) \qquad a = a' + 3761 \text{ und } a' = a - 3761 \text{ ist;}$$

und dieser Tag trifft auf den Wochentag

$$(318) \qquad H \equiv t + \Delta t, \text{ mod } 7.$$

197.

Fortsetzung. Hilfstafeln.

Zur Abkürzung der Rechnung kann man zwei Hilfstafeln entwerfen, wovon eine für jedes einzelne Jahr $R\frac{a}{76} = F\frac{a-1}{76} + 1 = \alpha$ der ersten 76jährigen Periode der jüdischen Weltäre die Zeit des **Moled Thischri**

$$(1\text{T. } 5\text{St. } 204) + (\alpha - 1) \text{ jüd. astron. Jahre}$$
$$= (1\text{T. } 5\text{St. } 204) + (\alpha - 1)(354\text{T. } 8\text{St. } 876) + F\frac{7\alpha - 6}{7}(29\text{ T. } 12\text{ St. } 793)$$
$$= B\text{ W.} + \beta,$$

oder auch nur ihren Ueberschuß β,

und die Voreilung der julianischen Jahre

$$(\alpha - 1)\text{ jul. Jahre} - B\text{ Woch.} = 365(\alpha - 1) + F\frac{\alpha - 1}{4} - 7B\text{ Tage} = b\text{ Tage},$$

die andere aber für die Anzahl der verflossenen 76jährigen Perioden $F\frac{a-1}{76} = \pi$

der jüdischen Aere die Dauerzeit

$$\pi \text{ jüd. 76jähr. Per.} = \pi \text{ (3965 W. 3 T. 18 St. 220 Chl.)}$$
$$= C \text{ W.} + \gamma,$$

oder auch blos ihren Ueberschuß γ,

und die Voreilung der julianischen Perioden

π jul. 76jähr. Per. — C Woch. $= \pi . 27759 - 7C$ Tage $=$ c Tage enthält.

Beide Tafeln können auch sehr vortheilhaft benützt werden, um die volle Zeit des Moled Thischri des Jahres

$$a = 76\pi + \alpha$$

der jüdischen Aere,

$$w \text{ W. } t \text{ T. } u \text{ St. } v \text{ Chl.} = (B \text{ W.} + \beta) + (C \text{ W.} + \gamma)$$

zu berechnen. (Zu §. 186, S. 396).

Zu dem vorliegenden Zwecke genügt es jedoch für diese Zeit nur den Ueberschuß

$$(320) \qquad \beta + \gamma = s \text{ W. } t \text{ T. } u \text{ St. } v \text{ Chl.}$$

zu berechnen und nach §. 187, (299) die Verschiebung Δt des Neujahrs zu bestimmen.

Nimmt man dazu noch aus den Tafeln die Voreilungen **b** und c der julianischen Zeitrechnung vor der jüdischen und die Voreilung **k** des gregorianischen Styls vor dem julianischen aus §. 47, **II**; so erhält man den geforderten Octobertag

$$(321) \qquad g = 5 + (7s + t + \Delta t) + k - (b + c)$$

und den Wochentag

$$(318) \qquad H \equiv t + \Delta t, \text{ mod } 7,$$

auf den der 0 Thischri des Jahres a der jüdischen Weltäre im Jahre $a' = a - 3761$ nach Chr. trifft.

Tafel 1.

Jahr der ersten 76jähr. Periode	Zeit seines Moled Thischri. B Woch. + β				Voreilung der julian. Jahre	Jahr der ersten 76jähr. Periode	Zeit seines Moled Thischri. B Woch. + β				Voreilung der julian. Jahre
α	Woch.	Tage	Std.	Chlak.	b Tage	α	Woch.	Tage	Std.	Chlak.	b Tage
1	. .	1	5	204	0	39	1982	6	14	314	5
2	50	5	14	. .	15	40*	2033	3	23	110	13
3z	101	2	22	876	23	41z	2084	1	7	986	22
4*	156	1	20	385	3	42	2139	.	5	495	2
5	206	6	5	181	19	43	2189	4	14	291	17
6z	257	3	13	1057	27	44z*	2240	1	23	87	25
7	312	2	11	566	7	45	2295	.	20	676	6
8z*	362	6	20	362	22	46z	2345	5	5	472	21
9	417	5	17	951	3	47	2400	4	2	1061	1
10	468	3	2	747	11	48*	2451	1	11	857	9
11z	519	.	11	543	19	49z	2501	5	20	653	25
12*	573	6	9	52	6	50	2556	4	18	162	5
13	624	3	17	928	15	51	2607	2	2	1038	13
14z	675	1	2	724	23	52z*	2657	6	11	834	28
15	730	.	.	233	3	53	2712	5	9	343	9
16*	780	4	9	29	18	54	2763	2	18	139	17
17z	831	1	17	905	27	55z	2814	.	2	1015	25
18	886	.	15	414	7	56*	2868	6	.	524	12
19z	936	5	.	210	22	57z	2919	3	9	320	21
20*	991	3	21	799	2	58	2974	2	6	909	1
21	1042	1	6	595	11	59	3024	6	15	705	16
22z	1092	5	15	391	26	60z*	3075	4	.	501	24
23	1147	4	12	980	6	61	3130	2	22	10	5
24*	1198	1	21	776	14	62	3181	.	6	886	13
25z	1248	6	6	572	30	63z	3231	4	15	682	28
26	1303	5	4	81	10	64*	3286	3	13	191	8
27z	1354	2	12	957	18	65z	3337	.	21	1067	17
28*	1408	8	10	466	5	66	3391	6	19	576	4
29	1459	5	19	262	14	67	3442	4	4	372	12
30z	1510	3	4	58	22	68z*	3493	1	13	168	20
31	1565	2	1	647	2	69	3548	.	10	757	1
32*	1615	6	10	443	17	70	3598	4	19	553	16
33z	1666	3	19	239	26	71z	3649	2	4	349	24
34	1721	2	16	828	6	72*	3704	1	1	938	4
35	1772	.	1	624	14	73	3754	5	10	734	20
36z*	1822	4	10	420	29	74z	3805	2	19	530	28
37	1877	3	7	1009	10	75	3860	1	17	39	8
38z	1928	.	16	805	18	76z*	3910	6	1	915	23

z zeigt an, daß das jüdische Jahr ein Schaltjahr ist, und *, daß es in einem julianischen Schaltjahre endet.

Tafel 2.

76jährige jüdische Perioden	Jahre derselben	Ihre Dauer. C Woch. + γ				Voreilu der julia Jahre
π	76π	Wochen	Tage	Stund.	Chlak.	c Tag
1	76	3965	3	18	220	4
2	152	7931	.	12	440	1
3	228	11896	4	6	660	5
4	304	15862	1	.	880	2
5	380	19827	4	19	20	6
6	456	23793	1	13	240	3
7	532	27758	5	7	460	7
8	608	31724	2	1	680	4
9	684	35689	5	19	900	8
10	760	39655	2	14	40	5
20	1520	79310	5	4	80	10
30	2280	118966	.	18	120	8
40	3040	158621	3	8	160	13
50	3800	198276	5	22	200	18
60	4560	237932	1	12	240	16
70	5320	277587	4	2	280	21
80	6080	317242	6	16	320	26
90	6840	356898	2	6	360	24

198.

Fortsezung.

Abgeänderter Ausdruck des christlichen Datums des jüd Jahresanfangs.

Das christliche Datum des 0 Thischri des jüdischen Jahres a l
noch bequemer durch seine Vorrückung u vor dem frühesten christlichen
dieser nullten Thischri bestimmen. Für dieses früheste Datum muß b
g negativ und am größten ausfallen; daher muß nach Gleichung (321)
lichst klein, also k = 0 sein, und sonach das fragliche Datum in die Z
der gregorianischen Kalenderverbesserung, d. i. vor den October 1582 i
oder vor das jüd. Jahr 5343 treffen; zugleich muß b + c — (7s + t) m
groß sich ergeben, nemlich das jüdische Jahr am meisten hinter dem julia
zurückbleiben, folglich ein Schaltjahr und in der lezten oder vorlezt
5343 laufenden 76jährigen Periode, nach Ausweis der Tafel 1 in §

eines der Jahre 17 oder 74 sein, welche um 25 Tage dem julianischen nachfolgen. Da in den Jahren 5320 und 5244 eine solche Periode ablief, so kann ein solches Jahr nur eines der Jahre

5337, 5318, 5261 sein.

Für diese findet man

$$g = -37, \quad -36, \quad -37, \quad \text{also}$$

0 Thischri = 24 Aug., 25 Aug., 24 Aug.

Das früheste christliche Datum, auf welches der 0 Thischri fiel, war demnach der 24 August. Deswegen ist es bequem, die Vorrückung u des 0 Thischri vor seinen frühesten möglichen Standpunkt, nemlich diejenige Zahl u in Rechnung zu nehmen, welche angibt, am wie vielten Tage nach dem 24 August der nullte Thischri des jüdischen Jahres a einfällt. Darnach hat man im neuen Styl

(324) 0 Thischri = u + 24 Aug. = u — 7 Sept. = u — 37 Oct.;

und sofort $u - 37 = g$,

daher

$$(325) \qquad u = 37 + g = 42 + (7s + t + \Delta t) + k - (b + c).$$

Die Zahl u fällt immer positiv aus, und kann, weil k mit dem Jahre a' n. Chr. ohne Ende wächst, von Null an beliebig groß werden. Vom Jahre 300 n. Chr. oder 4061 der Juden, vor dem die cyklische Zeitrechnung der Rabbiner nicht üblich war, bis zum Jahre 2000 n. Chr. oder 5761 der Juden trifft der 0 Thischri nie hinter den 4 October; und daher reicht u nicht über 41 hinaus.

Das folgende Verzeichniß gibt die Vorrückung u und den Wochentag H des 0 Thischri für die Jahre 1000 bis 1999 n. Chr. oder 4761 bis 5760 der jüdischen Weltäre; und zwar bis 1582 n. Chr. oder 5343 der Juden nach dem alten, von da an aber nach dem neuen Style.

In diesem Verzeichnisse sind die jüdischen Schaltjahre durch ein Sternchen, die christlichen dagegen, als nach §. 47, I. und II. sehr leicht erkennbar, nicht bezeichnet.

Verzeichniß der Vorrückungen u des 0 Thischri vor den 24 August und seiner Wochentage H.

Jüdisches Jahr	Jahr n. Chr.	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9	
		u	H	u	H	u	H	u	H	u	H	u	H	u	H	u	H	u	H	u	H
4761	1000	8	1*	28	1	16	4	5	1*	24	1	14	6	2	2*	21	1	10	6*	28	4
4771	1010	17	1	7	6*	26	6	14	2	3	6*	23	6	12	1*	30	2	19	6	9	4*
4781	1020	28	4	17	1	5	4*	25	4	13	1	3	6*	21	4	10	1*	29	1	17	4
4791	1030	6	1*	26	1	15	6	3	2*	22	1	12	6*	29	4	19	2	8	6*	28	6
4801	1040	17	4	6	1*	24	6	14	4	2	1*	20	6	10	4*	30	4	18	1	6	4*
4811	1050	26	4	15	1	4	6*	22	4	11	1*	31	1	18	4	8	2*	27	1	17	6
4821	1060	4	2*	23	1	13	6	3	4*	20	2	9	6*	29	6	19	4	7	1*	25	6
4831	1070	15	4	4	1*	21	6	11	4*	31	4	20	1	7	4*	27	4	16	1	6	6*
4841	1080	23	4	12	1	2	6*	22	6	9	2*	28	1	18	6	8	4*	25	2	14	6
4851	1090	4	4*	22	2	10	6*	30	6	20	4	9	1*	26	6	16	4	5	1*	25	1
4861	1100	12	4	1	1*	21	1	11	6*	28	4	17	1	7	6*	25	4	14	2	3	6*
4871	1110	23	6	11	2*	29	1	19	6	9	4*	27	2	15	6	5	4*	25	4	14	1
4881	1120	1	4*	21	4	10	1*	28	6	17	4	6	1*	26	1	14	4	3	2*	22	1
4891	1130	12	6*	30	4	18	1	8	6*	26	4	16	2	4	6*	24	6	14	4	3	1*
4901	1140	20	6	10	4*	28	2	17	6	6	4*	26	4	15	1	3	4*	22	4	11	1*
4911	1150	29	6	19	4	7	1*	27	1	15	4	5	2*	23	1	13	6	1	2*	20	1
4921	1160	9	6*	29	6	17	2	6	6*	25	6	15	4	4	1*	22	6	11	4*	29	2
4931	1170	18	6	8	4*	27	4	16	1	4	4*	24	4	12	1	2	6*	20	4	9	1*
4941	1180	28	1	18	6	6	2*	25	1	14	6	4	4*	22	2	11	6*	30	6	20	4
4951	1190	9	1*	27	6	16	4	5	1*	23	6	13	4	1	1*	21	1	9	4*	29	4
4961	1200	17	1	7	6*	25	4	14	1	3	6*	21	4	11	2*	30	1	19	6	7	2*
4971	1210	26	1	16	6	5	4*	23	2	12	6	2	4*	21	4	10	1*	28	6	18	4
4981	1220	6	1*	24	6	14	4	3	1*	22	1	10	4*	30	4	19	1	8	6*	26	4
4991	1230	15	1	5	6*	22	4	12	2	1	6*	21	6	8	2*	27	1	17	6	7	4*
5001	1240	24	2	13	6	3	4*	23	4	11	1*	29	6	19	4	8	1*	25	6	15	4
5011	1250	4	1*	24	1	11	4	1	2*	20	1	10	6*	27	4	16	1	6	6*	26	6
5021	1260	13	2	2	6*	22	6	12	4*	29	2	18	6	8	4*	28	4	16	1	4	4*
5031	1270	24	4	13	1	2	6*	20	4	9	1*	29	1	16	4	5	1*	25	1	15	6
5041	1280	2	2*	21	1	11	6*	29	4	18	2	7	6*	27	6	17	4	5	1*	23	6
5051	1290	13	4	2	1*	19	6	9	4*	29	4	18	1	5	4*	25	4	14	1	4	6*
5061	1300	21	4	10	1*	30	1	18	4	7	2*	26	1	16	6	4	2*	22	1	12	6
5071	1310	2	4*	20	2	8	6*	28	6	18	4	7	1*	24	6	14	4	3	1*	21	6
5081	1320	10	4*	30	4	19	1	7	4*	26	4	15	1	5	6*	23	4	11	1	1	6*
5091	1330	21	6	9	2*	27	1	17	6	7	4*	25	2	13	6	3	4*	21	2	10	6*
5101	1340	29	6	19	4	8	1*	26	6	15	4	4	1*	24	1	12	4	0	1*	20	1
5111	1350	10	6*	28	4	16	1	6	6*	24	4	13	1	2	6*	22	6	10	2*	29	1
5121	1360	18	6	8	4*	26	2	15	6	4	4*	24	4	13	1	1	4*	20	4	9	1*
5131	1370	27	6	17	4	5	1*	25	1	13	4	3	2*	21	1	11	6*	29	4	18	1
5141	1380	7	6*	25	4	15	2	4	6*	23	6	13	4	2	1*	20	6	9	4*	27	2
5151	1390	16	6	6	4*	25	4	14	1	2	4*	22	4	10	1*	28	6	18	4	7	1*
5161	1400	26	1	14	4	4	2*	23	1	12	6	0	2*	19	1	9	6*	28	6	16	2
5171	1410	5	6*	25	6	14	4	3	1*	21	6	11	4*	28	2	17	6	7	4*	27	4
5181	1420	15	1	3	4*	23	4	12	1	1	6*	19	4	8	1*	28	1	17	6	5	2*
5191	1430	24	1	14	6	3	4*	21	2	10	6*	30	6	17	2	6	6*	26	6	16	4
5201	1440	4	1*	22	6	12	4	1	1*	20	1	8	4*	28	4	17	1	6	6*	24	4
5211	1450	13	1	3	6*	20	4	10	2*	29	1	19	6	6	2*	25	1	15	6	5	4*
5221	1460	22	2	11	6	1	4*	21	4	9	1*	27	6	17	4	6	1*	23	6	13	4
5231	1470	2	1*	22	1	9	4*	29	4	18	1	8	6*	25	4	14	1	4	6*	22	4
5241	1480	11	2	0	6*	20	6	8	2*	26	1	16	6	6	4*	24	2	12	6	2	4*
5251	1490	22	4	11	1*	28	6	18	4	7	1*	25	6	14	4	3	1*	23	1	11	4

Jüdisches Jahr	Jahr n. Chr.	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9	
		u	H	u	H	u	H	u	H	u	H	u	H	u	H	u	H	u	H	u	H
5261	1500	0	2*	19	1	9	6*	27	4	15	1	5	6*	25	6	13	2	1	6*	21	6
5271	1510	11	4*	29	2	17	6	7	4*	27	4	16	1	3	4*	23	4	12	1	2	6*
5281	1520	19	4	8	1*	28	1	16	4	4	1*	24	1	14	6	2	2*	20	1	10	6*
5291	1530	28	4	18	2	6	6*	26	6	16	4	5	1*	22	6	12	4	1	1*	19	6
5301	1540	8	4*	28	4	17	1	5	4*	24	4	13	1	3	6*	21	4	9	1*	29	1
5311	1550	17	4	7	2*	25	1	15	6	3	2*	22	1	11	6	1	4*	19	2	8	6*
5321	1560	27	6	17	4	6	1*	24	6	13	4	2	1*	20	6	10	4*	29	4	18	1
5331	1570	6	4*	26	4	14	1	4	6*	22	4	11	1	0	6*	18	4	8	2*	27	1
5341	1580	16	6	4	2*	23	1	23	6	12	4*	30	2	19	6*	39	6	28	4	17	1*
5351	1590	35	6	25	4	13	1*	33	1	21	4	10	1*	29	1	19	6*	37	4	26	1
5361	1600	15	6*	33	4	22	1	12	6*	31	6	19	2*	38	1	28	6	17	4*	35	2
5371	1610	24	6	14	4*	33	4	22	1	10	4*	30	4	18	1*	36	6	26	4	15	1*
5381	1620	34	1	22	4	11	1*	31	1	20	6*	38	4	27	1	17	6*	34	4	24	2
5391	1630	13	6*	33	6	22	4	11	1*	29	6	19	4*	36	2	25	6	15	4*	35	4
5401	1640	23	1	11	4*	31	4	20	1*	37	6	27	4	16	1*	36	1	23	4	13	2*
5411	1650	32	1	22	6	9	2*	28	1	18	6*	38	6	25	2	14	6*	34	6	24	4
5421	1660	12	1*	30	6	20	4*	38	2	26	6	16	4*	36	4	25	1	12	4*	32	4
5431	1670	21	1	11	6*	28	4	17	1*	37	1	27	6	14	2*	33	1	23	6	13	4*
5441	1680	30	2	19	6*	39	6	27	2	15	6*	35	6	25	4	14	1*	31	6	21	4
5451	1690	10	1*	30	1	17	4*	37	4	26	1	16	6*	33	4	22	1	12	6*	30	4
5461	1700	20	2*	39	1	29	6	17	2*	35	1	25	6	15	4*	33	2	21	6	11	4*
5471	1710	31	4	20	1*	37	6	27	4	16	1*	34	6	23	4	12	1*	32	1	20	4*
5481	1720	39	4	28	1	18	6*	36	4	24	1	14	6*	32	4	22	2	10	6*	30	6
5491	1730	18	2*	37	1	26	6	16	4*	34	2	23	6	12	4*	32	4	21	1*	39	6
5501	1740	28	4	17	1*	35	6	25	4	13	1*	33	1	21	4	11	2*	29	1	19	6*
5511	1750	37	4	26	1	15	6*	35	6	23	2	12	6*	31	6	21	4*	39	2	28	6
5521	1760	17	4*	35	2	24	6	14	4*	33	4	22	1	10	4*	30	4	18	1*	38	1
5531	1770	26	4	15	1*	34	1	24	6	12	2*	31	1	20	6*	38	4	28	2	17	6*
5541	1780	36	6	26	4	15	1*	33	6	22	4	11	1*	29	6	19	4*	38	4	27	1
5551	1790	15	4*	35	4	23	1	13	6*	31	4	20	1*	39	1	27	4	17	2*	36	1
5561	1800	26	6	14	2*	33	1	23	6	12	4*	30	2	19	6*	39	6	28	4	17	1*
5571	1810	35	6	25	4	13	1*	31	6	21	4*	41	4	29	1	17	4*	37	4	26	1
5581	1820	15	6*	33	4	22	1	12	6*	29	4	19	2*	38	1	28	6	15	2*	34	1
5591	1880	24	6	14	4*	31	2	20	6*	40	6	30	4	18	1*	36	6	26	4	15	1*
5601	1840	34	1	22	4	11	1*	31	1	20	6*	38	4	27	1	17	6*	34	4	23	1
5611	1850	13	6*	33	6	20	2*	39	1	29	6	19	4*	36	2	25	6	15	4*	35	4
5621	1860	23	1	11	4*	31	4	20	1*	37	6	27	4	16	1*	36	1	23	4	12	1*
5631	1870	32	1	22	6*	39	4	28	1	18	6*	36	4	25	2	14	6*	34	6	24	4
5641	1880	12	1*	30	6	20	4*	38	2	26	6	16	4*	36	4	25	1	12	4*	32	4
5651	1890	21	1*	39	6	28	4	17	1*	37	1	25	4	14	2*	33	1	23	6	11	2*
5661	1900	30	1	20	6*	38	4	28	2	16	6*	36	6	26	4	15	1*	32	6	22	4*
5671	1910	40	2	29	6	18	4*	38	4	27	1	15	4*	34	4	24	2	13	6*	31	4
5681	1920	19	1*	39	1	29	6	17	2*	35	1	25	6	15	4*	33	2	21	6*	41	6
5691	1930	29	2	18	6*	37	6	27	4	16	1*	34	6	23	4	12	1*	32	1	20	4*
5701	1940	39	4	28	1	18	6*	36	4	24	1	14	6*	32	4	21	1*	40	1	30	6
5711	1950	18	2*	37	1	26	6	16	4*	34	2	23	6	12	4*	32	4	21	1*	39	6
5721	1960	28	4	17	1*	35	6	25	4	13	1*	33	1	21	4*	41	4	29	1	19	6*
5731	1970	37	4	26	1	15	6*	33	4	23	2	12	6*	31	6	19	2*	38	1	28	6
5741	1980	17	4*	35	2	24	6	14	4*	33	4	22	1*	40	6	30	4	18	1*	36	6
5751	1990	26	4	15	1*	34	1	22	4	12	2*	31	1	20	6*	38	4	27	1	17	6*

199.

Fortsetzung.

Zurückführung der jüdischen Data auf christliche.

I. Um sämmtliche Tage des Jahres a der jüdischen Weltäre auf die übereinstimmigen Tage des Jahres $a' = a - 3761$ oder $a' + 1 = a - 3760$ nach Chr. zurückzuführen, bedarf man der Vorausbestimmung folgender Größen.

u Vorrückung des 0 Thischri, am wie vielten Tage nach dem 24 August der 0 Thischri des Jahres a eintrifft. (§. 198, (325) oder Tafel).

H Wochentag des 0 Thischri des Jahres a, oder Wochentag, nach welchem dieses Jahr a anfängt. (§. 187, (300) oder Tafel in §. 198).

H' Wochentag, an welchem dasselbe Jahr a endet, oder Wochentag des 0 Thischri des nächst folgenden Jahres $a + 1$. (§. 189 oder Tafel in §. 198).

j Anzahl der Schaltmonate des jüdischen Jahres a. (§. 180, 189, 191).

i Anzahl der Schalttage des christlichen Jahres $a' + 1$, in welchem das jüdische endet (§. 47, I und II.).

Aus den Wochentagen H und H' findet man dann leicht

l die Länge des Jahres a, (§. 189, (305)),

ϑ die Zahl der dem Marcheschvan zuzulegenden Tage, nemlich in überzähligen Jahren $\vartheta = 1$, sonst $\vartheta = 0$,

η die Zahl der dem Kislev zu entziehenden Tage, nemlich in mangelhaften Jahren $\eta = 1$, sonst $\eta = 0$, mittels folgender Uebersicht:

	in jüdischen Gemeinjahren:			in jüdischen Schaltjahren:		
$j =$	0	0	0	1	1	1
$H =$	1, 6	4, 2	1, 6, 4	1, 6, 4	2	1, 6, 4
$H' =$	4, 2	1, 6	6, 4, 2	6, 4, 2	1	1, 6, 4
$H' - H \equiv$	3	4	5	5	6	7
$l =$	353	354	355	383	384	385
$\vartheta =$	0	0	1	0	0	1
$\eta =$	1	0	0	1	0	0
$\vartheta - \eta =$	−1	0	1	−1	0	1

Mit diesen Zahlen reducirt man nun die jüdischen Data auf die christlichen nach Anleitung des folgenden Schema.

Tafel 1.

Jüd. Jahr $a = a' + 3761$.			Jahr n. Chr. $a' = a - 3761$.	
Monat.	t^{ter} Tag des jüd. Monats.			
	$t + u \pm$			
Thischri	$+24$ Aug.,	$-$ 7 Sept.,	-37 Oct.,	-68 Nov.
Marcheschvan	$+23$ Sept.,	$-$ 7 Oct.,	-38 Nov.,	-68 Dec.
	$t + u + \vartheta \pm$		Jahr n. Chr. $a' + 1$.	
Kislev	$+22$ Oct.,	$-$ 9 Nov.,	-39 Dec.,	-70 Jan.
	$t + u + \vartheta - \eta \pm$			
Tebeth	$+21$ Nov.,	$-$ 9 Dec.,	-40 Jan.,	-71 Febr.
Schebat	$+20$ Dec.,	-11 Jan.,	-42 Febr.,	$-i-70$ März.
j^{ter} Adar	$+19$ Jan.,	-12 Febr.,	$-i-40$ März,	$-i-71$ April.
	$t + u + \vartheta - \eta + 30j \pm$			
$j + 1^{ter}$ Adar	$+19$ Jan.,	-12 Febr.,	$-i-40$ März,	$-i-71$ April.
	$t + u + \vartheta - \eta + 30j - i \pm$			
Nisan	$+i+17$ Febr.,	-11 März,	-42 April,	-72 Mai.
Ijar	$+19$ März,	-12 April,	-42 Mai,	-73 Juni.
Sivan	$+17$ April,	-13 Mai,	-44 Juni,	-74 Juli.
Thamus	$+17$ Mai,	-14 Juni,	-44 Juli,	-75 Aug.
Ab	$+15$ Juni,	-15 Juli,	-46 Aug.,	-77 Sept.
Elul	$+15$ Juli,	-16 Aug.,	-47 Sept.,	-77 Oct.

II. Für die Monate hinter dem Kislev, deren Dauer stets dieselbe bleibt, ist es vorzuziehen, die Vorrückung u' des 0 Thischri des nächst folgenden Jahres $a + 1$ in Rechnung zu bringen.

Zwischen den beiden Vorrückungen u und u' des 0 Thischri in den zwei nach einander folgenden Jahren a und $a + 1$ besteht eine leicht zu erforschende Beziehung. Es ist nemlich

29 Elul des Jahres $a = 29 + u + \vartheta - \eta + 30j - i - 16$ Aug. d. J. $a' + 1$

$= 0$ Thischri des Jahres $a + 1$

$= u' + 24$ August des Jahres $a' + 1$,

also $$u' + 24 = u + \vartheta - \eta + 30j - i + 13$$

und $$u' = u + \vartheta - \eta + 30j - i - 11.$$

Nimmt man dazu noch, daß die Länge des Jahres a

$$l = 354 + \vartheta - \eta + 30j$$

ist, so erscheint

$$u' = u + l - (365 + i) = u - (365 + i - l). \quad (326)$$

eine Beziehung, die sich auch aus folgender Betrachtung ergibt.

Vom 0 August des Jahres a' n. Chr. bis zum 0 Thischri des jüdischen Jahres a sind $u + 24$ Tage und von da bis zum 0 Thischri des jüdischen Jahres $a + 1$ weitere l Tage, also bis hieher zusammen $u + 24 + l$ Tage.

Andererseits sind vom 0 August des Jahres a' n. Chr. bis zum 0 August des nächsten Jahres $a'+1$, welches i Schalttage besitzt, genau $365+i$ Tage und von da bis zum 0 Thischri des jüdischen Jahres $a+1$ weitere $u'+24$ Tage, mithin bis daher zusammen $u'+24+365+i$ Tage. Sonach ist

$$u'+24+365+i=u+24+l$$

und wieder

$$u'=u+l-(365+i). \qquad (326)$$

Führt man nun die Vorrückung u' in die Rechnung ein, so erhält man für die Monate nach dem dritten, dem Kislev, folgendes Reductions-Schema.

Tafel 2.

Jüd. Jahr $a=a'+3761$. Jahr n. Chr. $a'+1=a-3760$.

	Monat.	t^{ter} Tag des jüd. Monates.			
		$t+u'+i-30j\pm$			
	4) Tebeth	+32 Nov.,	+2 Dec.,	−29 Jan.,	−60 Febr.
	5) Schebat	+31 Dec.,	+0 Jan.,	−31 Febr., −i	−59 März.
	6) j^{ter} Adar	+30 Jan.,	−1 Febr., −i	−29 März, −i	−60 April.
		$t+u'\pm$			
6)	7) j+1 Adar	+i+30 Jan., +i	−1 Febr.,	−29 März,	−60 April.
7)	8) Nisan	+i+28 Febr.,	−0 März,	−31 April,	−61 Mai.
8)	9) Ijar	+30 März,	−1 April,	−31 Mai,	−62 Juni.
9)	10) Sivan	+28 April,	−2 Mai,	−33 Juni,	−63 Juli.
10)	11) Thamus	+28 Mai,	−3 Juni,	−33 Juli,	−64 Aug.
11)	12) Ab	+26 Juni,	−4 Juli,	−35 Aug.,	−66 Sept.
12)	13) Elul	+26 Juli,	−5 Aug.,	−36 Sept.,	−66 Oct.

200.

Schluß. Anwendung.

1. Beispiel. Auf welchen Tag der christlichen Zeitrechnung fällt der oben (im Beispiel des §. 194) gefundene Mittwoch der 30 Sivan des Jahres 4124 der jüdischen Aere?

Hier ist $a=4124$; daher $a'=4124-3761=363$, $k=0$,

Von 3800 Jahren d. Uebersch. $\gamma'=5$ T. 22 St. 200; $c'=18$ T.

324

304 » » $\gamma''=1\ .\ .\ .\ 880$, $c''=2$

$c=20$

zum 20. Jahre » $\beta=3\ .\ 21\ .\ 799$, $b=2$

$\beta+\gamma=1$ W. $3\ .\ 20\ .\ 799$, $b+c=22$

$s=1$, $t=3$, $\Delta t=1$, $H=3+1=4=$ Mittwoch.

$g=5+7+3+1+0-22=-6$,

$u=-6+37$ oder $=42+7+3+1+0-22=31$.

Der 0 **Thischri** des Jahres 4124 traf also auf den 30 — 6 September, oder 31 — 7 September, daher auf den 24 September des Jahres 363 nach Chr., einen Mittwoch.

Dieses Jahr ist das 20ste in der laufenden 76jährigen Periode, mithin ein Gemeinjahr und $j = 0$. Gibt man

daher zum Ueberschusse seines **Moled Thischri**	3T.	20St.	799
noch den Ueberschuß eines Gemeinjahres	4 .	8 .	876
so ist der Ueberschuß des folgenden **Moled Thischri** . . .	1 .	5 .	595

also Wochentag des 0 **Thischri** 4125 $H' = 1 =$ Sonntag.

Sonach ist $H' - H \equiv 1 - 4 \equiv 4$, mod 7,

$$l = 350 + 4 = 354, \quad \vartheta = 0, \quad \eta = 0.$$

Ferner endigt sich das Jahr 4124 im Jahre n. Chr. $a' + 1 = 364 \equiv 0$, mod 4, welches also ein Schaltjahr ist und daher $i = 1$ Schalttag hat.

Aus all' diesem folgt nach der Tafel 1 in §. 199,

$$30 \text{ Sivan} = 30 + 31 + 0 - 0 + 0 - 1 - 44 \text{ Juni} = 16 \text{ Juni}.$$

Für das folgende Jahr findet man $\beta + \gamma = 1$ W. 1 T. 5 St. 595 Chl.

$$b = 11, \quad c = 20, \text{ also } b + c = 31, \quad s = 1, \quad t = 1,$$
$$\Delta t = 0, \text{ und sonach}$$
$$u' = 42 + 7 + 1 + 0 + 0 - 31 = 19$$

mithin nach dem zweiten Schema in §. 199

$$30 \text{ Sivan} = 30 + 19 - 33 \text{ Juni} = 16 \text{ Juni}.$$

Der angegebene Tag ist sonach der 16 Juni 364 n. Chr., welcher wirklich auf einen Mittwoch trifft.

2. Beispiel. Traf im Jahre 1825 n. Chr. das gregorianische Osterfest wirklich mit dem Osterfeste der Juden, dem 15 **Nisan** zusammen, so daß man über dessen Feier Streit erregen mußte? *)

Im Anfange des Jahres $a' + 1 = 1825$ n. Chr. läuft das jüdische Jahr $a = a' + 1 + 3760 = 5585$, und im Herbste desselben beginnt das Jahr $a + 1 = 5586$.

		T.	St.	Chl.	T.
Nun ist zum Jahre 5586					
der Ueberschuß von . . . 5320 Jahren .	$\gamma' = $	4 .	2 .	280	$c' = 21$
266					
228	$\gamma'' = $	4 .	6 .	660	$c'' = 5$
					$c = 26$
und im 38. Jahre .	$\beta = $	. .	16 .	805	$b = 18$
	$\beta + \gamma = $ 1 W.	2 .	1 .	665	$b + c = 44$

$$s = 1, \quad t = 2, \quad \Delta t = 0, \quad k = 18 - 4 - 2 = 12.$$

---

*) Vergl. **Corresp. astron. vol. 11, pag. 597**, und oben §. 110, Beispiel 1, Seite 280.

Für das Jahr 5585 ist daher

$$u' = 42 + 7 + 2 + 0 + 12 - 44 = 19$$

folglich jüdische Ostern = 15 Nisan = 15 + 19 − 31 April = 3 April.

Die gregorianische Festzahl des Jahres 1825 n. Chr. war aber $v = 13$, daher gregorianische Ostern = (13 − 10 =) 3 April. Mithin trafen in der That das gregorianische und jüdische Osterfest im Jahre 1825 am 3 April zusammen.

201.

Abgeändertes Verfahren in der Bestimmung des Anfanges der jüdischen Jahre in der christlichen.

Die Zeit von dem Anfange der jüdischen Zeitrechnung, d. i. von 6 Uhr Abends am Samstag den 5 October 3761 vor Chr., bis zu dem Eintritte des **Moled Thischri** im Jahre a der jüdischen Weltäre, ist, vermöge §. 186,

$$M = (1\,\mathfrak{T}.\,5\,\mathfrak{St}.\,204) + (a-1)(354\,\mathfrak{T}.\,8\,\mathfrak{St}.\,876) + e(29\,\mathfrak{T}.\,12\,\mathfrak{St}.\,793),$$

wofern $e = \mathrm{q}\frac{7a-6}{19}$ die Anzahl der Schaltjahre vor a andeutet.

Von dem mitternächtlichen Anfange der byzantinischen Weltäre bis zu der Mitternacht zunächst nach dem Anfange der jüdischen Zeitrechnung, mit welcher (Mitternacht) der Sonntag der 6 October 3761 vor Chr. oder 1749 der byzantinischen Aere anfängt, sind vermöge §. 194 $g = 638492$ Tage, folglich bis zum Anfange der jüdischen Zeitrechnung um 6 Stunden weniger, nemlich $g\,\mathfrak{T}. - 6\,\mathfrak{St}.$, und sonach bis zu dem fraglichen **Moled Thischri**

$$M + (g\,\mathfrak{T}. - 6\,\mathfrak{St}.).$$

Von dem Anfange derselben byzantinischen Aere bis zu jenem der christlichen Aere sind, (§. 48, I), $g' = 2011919$ Tage; daher von dem Anfange der christlichen Aere bis zum Eintritte des **Moled Thischri**

$$M + (g - g'\,\mathfrak{T}. - 6\,\mathfrak{St}.) = M - (g'\,\mathfrak{T}.\,6\,\mathfrak{St}. - g\,\mathfrak{T}.)$$
$$= a(354\,\mathfrak{T}.\,8\,\mathfrak{St}.\,876) + e(29\,\mathfrak{T}.\,12\,\mathfrak{St}.\,793) - (1373780\,\mathfrak{T}.\,9\,\mathfrak{St}.\,672).$$

Dieser **Moled Thischri** trete nun ein im Jahre a' nach Chr., nach dem T^{ten} Tage zur Zeit τ, welche weniger als einen Tag beträgt und in Theilen des Tages, in Stunden und Chlakim ausgedrückt sei, hinter dem Mittage des 0 März alten Styles. Dann liegt zwischen seinem Eintritte und dem Anfange der christlichen Aere die Zeit

$$(a'-1)\,365 + \mathrm{q}\frac{a'-1}{4} + 59 + i - \tfrac{1}{2} + T\ \text{Tage} + \tau,$$

oder weil das Jahr a'

$$i = \mathrm{q}\frac{a'}{4} - \mathrm{q}\frac{a'-1}{4}\ \text{Schalttage zählt,}$$

die Zeit

$$(a'-1)\,365 + \mathrm{q}\frac{a'}{4}\,\mathfrak{T}. + (58\,\mathfrak{T}.\,12\,\mathfrak{St}.) + T\,\mathfrak{T}. + \tau,$$

oder endlich, weil

$$\mathfrak{q}\frac{a'}{4}\,\text{T.} = \tfrac{1}{4}\left(a' - \mathfrak{r}\frac{a'}{4}\right)\text{T.} = \left(a' - \mathfrak{r}\frac{a'}{4}\right) 6\ \text{St.},$$

die Zeit

$$(a'-1)(365\ \text{T.}\ 6\,\text{St.}) - \mathfrak{r}\frac{a'}{4}\ 6\ \text{St.} + (58\ \text{T.}\ 18\ \text{St.}) + T\ \text{T.} + \tau.$$

Aus der Gleichheit der beiden Ausdrücke dieses Zeitraums folgt nunmehr

$$T + \tau = a(354\text{T.}\,8\text{St.}\,876) - (a'-1)(365\text{T.}\,6\text{St.}) + e\,(29\text{T.}\,12\text{St.}\,793)$$
$$+ \mathfrak{r}\frac{a'}{4}\ 6\ \text{St.} - (1373839\ \text{T.}\ 3\ \text{St.}\ 672).$$

Setzt man hierin den bekannten Ausdruck

$$a = a' + 3761 = (a'-1) + 19 \,.\, 198$$

so wird
$$e = \mathfrak{q}\frac{7a-6}{19} = 7 \,.\, 198 - 1 + \mathfrak{q}\frac{7a'+6}{19},$$

folglich
$$T\ \text{T.} + \tau = 189\ \text{T.}\ 20\ \text{St.}\ 785\ \text{Chl.} + \mathfrak{q}\frac{7a'+6}{19}(29\ \text{T.}\ 12\,\text{St.}\ 793)$$
$$- (a'-1)(10\ \text{T.}\ 21\ \text{St.}\ 204) + \mathfrak{r}\frac{a'}{4}\ 6\ \text{St.}$$

Nimmt man nun abkürzend

$$(327)\qquad \mathfrak{q}\frac{a'}{19} = \pi,\ \ \mathfrak{R}\frac{a'}{19} = \alpha,\ \ \mathfrak{r}\frac{a'}{4} = \beta,$$

so daß das Jahr a' im $\pi + 1^{ten}$ 19jährigen Mondkreise das Jahr α und nach einem julianischen Schaltjahre das β^{te} ist, so erfolgt die Zeit

$$(328)\quad T\ \text{T.} + \tau = 200\text{T.}\,17\,\text{St.}\,989\,\text{Chl.} + \mathfrak{q}\frac{7\alpha+6}{19}(29\ \text{T.}\ 12\,\text{St.}\,793\,\text{Chl.})$$
$$-\alpha(10\text{T.}21\text{St.}204) + \beta.6\text{St.}(10\text{T.}21\text{St.}204) + \beta.6\text{St.} - \pi(1\text{St.}485).$$

Der Betrag der vier ersten Glieder wird ein Kleinstes für $\alpha = 18$ und $\beta = 0$, nemlich $= 182$ T. 0 St. 995 Chl. Im letzten Glied war bis zur Zeit der gregorianischen Kalenderverbesserung $\pi \overline{\overline{<}}\ 83$, daher dies Glied selbst $\overline{\overline{<}}\ 5$ T. 0 St. 295. Man kann daher als geringsten Werth von T die Zahl 177 annehmen.

Sonach tritt der **Moled Thischri** an dem zu Mittage anfangenden $T + 1^{ten}$ Tage nach dem Mittage des 0 März ein; und mithin fällt der 1 **Thischri** in der Regel auf denselben $T + 1^{ten}$ Tag und überhaupt auf den $T + 1 + \Delta T^{ten}$ Tag, wenn ΔT die Verschiebung des Neujahrs vorstellt. Daher stimmt auch der 0 **Thischri**, von der Mitternacht an, in der Regel mit dem T^{ten} und überhaupt mit dem $T + \Delta T^{ten}$ Tage nach dem 0 März überein.

Der T^{te} Tag nach dem 0 März oder der T März a. St. des Jahres a' n. Chr. trifft vermöge (93) in §. 63 auf den Wochentag

$$t \equiv a' + \mathfrak{q}\frac{a'-1}{4} + 59 + i + T - 2,\ \text{mod}\ 7,$$

oder wegen des obigen Ausdruckes von i, auf den Wochentag

$$(329) \qquad t \equiv a' + q\frac{a'}{4} + T + 1, \ \text{mod } 7$$

$$\equiv 3a' - 2r\frac{a'}{4} + T + 1, \ \text{mod } 7.$$

Aus diesem Wochentage t und der Zeit τ wird die Verschiebung ΔT des Neujahrs nach §. 188 bestimmt, indem man daselbst t für T und $\tau =$ U St. V Chl. setzt.

Weil T mindestens $= 177$ ist, und vom Anfange März bis Anfang Augusts 153 Tage verfließen, so trifft der 0 Thischri vor der gregor. Kalenderverbesserung frühestens auf den $(177-153=)$ 24 August. Ueberhaupt fällt er sonach auf den $T + \Delta T - 153$ Aug. alten Styls $= T + \Delta T - 153 + k$ August neuen Styls. Läßt man diesen den $24 + u$ August neuen Styls sein, indem man wieder durch u die Vorrückung des 0 Thischri vor den 24 August angibt, so ist

$$(330) \qquad u = T + \Delta T - 177 + k.$$

Man kann zur Abkürzung der Rechnung

$$(331) \qquad T - 153 = \Theta \text{ setzen;}$$

dann gibt Θ T. $+ \tau = T$ T. $+ \tau - 153$ die Zeit des Eintritts des Moled Thischri hinter dem Mittage des 0 August alten Styls an, und man findet vermöge (328)

$$(332) \ \Theta \text{ T.} + \tau = 47 \text{ T. } 17 \text{ St. } 989 \text{ Chl.} + q\frac{7\alpha+6}{19}(29 \text{ T. } 12 \text{ St. } 793)$$
$$- \alpha(10 \text{ T. } 21 \text{ St. } 204) + \beta.\ 6 \text{ St.} - \pi(1 \text{ St. } 485).$$

Setzt man abkürzend

$$(333) \qquad m = 47 \text{ T. } 17 \text{ St. } 989 \text{ Chl.} + q\frac{7\alpha+6}{19}(29 \text{ T. } 12 \text{ St. } 793)$$
$$- \alpha(10 \text{ T. } 21 \text{ St. } 204 \text{ Chl.})$$

und

$$(334) \qquad p = 1 \text{ St. } 485 \text{ Chl.},$$

so wird

$$(335) \ \Theta \text{ T.} + \tau = m + \beta.\ 6 \text{ St.} - \pi p.$$

Dabei stellt m die Vorrückung des betreffenden Moled Thischri in dem laufenden Mondkreise und p die Voreilung 19 mittlerer julianischer Jahre vor einem jüdischen Mondkreise vor; und man kann sowohl für die einzelnen Jahre α der laufenden Periode die Zeiträume m in eine Tafel, als auch die Voreilungen πp in eine zweite Tafel bringen, welche beide hier folgen.

Tafel 1.

Jahr des Mondkreises	Vorrückung des Moled Thischri m			Jahr des Mondkreises	Vorrückung des Moled Thischri m		
α	Tage	Stund.	Chlak.	α	Tage	Stund.	Chlak.
1	36	20	785	11	46	3	837
2	55	12	294	12	35	6	633
3	44	15	90	13	53	22	142
4	33	17	966	14	43	.	1018
5	52	9	475	15	32	3	814
6	41	12	271	16	50	19	323
7	30	15	67	17	39	22	119
8	49	6	656	18	29	.	995
9	38	9	452	19	47	16	504
10	57	.	1041				

Tafel 2.

Mondkreise	Jahre	Voreilung πp		Mondkreise	Jahre	Voreilung πp			Mondkreise	Jahre	Voreilung πp		
π	19π	St.	Chl.	π	19π	T.	St.	Chl.	π	19π	T.	St.	Chl.
1	19	1	485	10	190	.	14	530	100	1900	6	.	980
2	38	2	970	20	380	1	4	1060	110	2090	6	15	430
3	57	4	375	30	570	1	19	510	120	2280	7	5	960
4	76	5	860	40	760	2	9	1040	130	2470	7	20	410
5	95	7	265	50	950	3	.	490	140	2660	8	10	940
6	114	8	750	60	1140	3	14	1020	150	2850	9	1	390
7	133	10	155	70	1330	4	5	470	200	3800	12	1	880
8	152	11	640	80	1520	4	19	1000	300	5700	18	2	780
9	171	13	45	90	1710	5	10	450	400	7600	24	3	680

Man entnimmt daher für das Jahr $a' = a + 3761$ n. Chr., in welchem das jüdische Weltjahr a anfängt, zu den Hunderten, Zehnern und Einern der Anzahl $\pi = \mathfrak{Q}\frac{a'}{19}$ der vor ihm verflossenen 19jährigen Schaltkreise, aus der zweiten Tafel die Voreilung πp, und zu dem Jahre $\alpha = \mathfrak{R}\frac{a'}{19}$ des laufenden Kreises die Vorrückung m des Moled Thischri aus der ersten Tafel; vermehrt diese um so viel Mal 6 Stunden, als das wie vielte das Jahr a' hinter einem

julianischen Schaltjahre ist, nemlich um $6\beta = 0, 6, 12, 18$ Stunden, je nachdem a′ durch 4 gewöhnlich getheilt den Rest $\beta = 0, 1, 2, 3$ gibt; und zieht davon jene Voreilung πp ab. Der Rest ist dann die Zeit Θ T. $+ \tau$ des Eintritts des **Moled Thischri** hinter dem Mittage des 0 August alten Styls im Jahre a′ n. Chr. Der Wochentag, nach welchem dieser **Moled eintritt**, ist, wegen $T = \Theta + 153$, in (329)

$$(335) \qquad t \equiv a' + q\frac{a'}{4} + \Theta \equiv 3a' - 2\beta + \Theta, \text{ mod } 7;$$

daher die Verschiebung des Neujahrs nach §. 188, (301)

$$(336) \qquad \Delta T = \Delta\Theta = q\frac{*\frac{3(t-1)}{7}}{4},$$

und die Vorrückung des 0 **Thischri** vor den 24 August n. St.

$$(337) \qquad u = \Theta + \Delta\Theta - 24 + k.$$

Ist jedoch

1. in einem Gemeinjahre, wo α eine der Zahlen 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19 ist, $t = 2$ und $\tau \geqq 15$ St. 204 Chl., so wird, wegen **Gatrad**, $\Delta\Theta = 2$; und

2. wenn in einem Gemeinjahre, das einem Schaltjahre folgt, und in welchem demnach α eine der Zahlen 2, 5, 8, 10, 13, 16, 19 ist, $t = 1$ und $\tau \geqq 21$ St. 589 Chl. wird, so sezt man, wegen **Betuthakpat**, $\Delta\Theta = 1$. Dann ist der Wochentag des 0 **Thischri**

$$(338) \qquad H \equiv t + \Delta\Theta, \text{ mod } 7,$$

und dieser 0 **Thischri** trifft auf den

$$(324) \qquad u + 24 \text{ Aug.} = u - 7 \text{ Sept.} = u - 37 \text{ Oct. neuen Styls.}$$

Beispiel. Man berechne Ostern (15 **Nisan**) des Jahres 5687. Das folgende Jahr ist $a = 5688$, und beginnt im Jahre n. Chr. $a' = 5688 - 3761 = 1927$;
also ist $\qquad \beta \equiv a', \text{ mod } 4 \equiv 3.$

Vom Jahre $a' = 1927$

				T.	St.	Chl.
abgerechnet	1900	Jahre, geben	$\pi' p =$	6 T.	0 St.	980
	27	»				
	19	» »	$\pi'' p =$	.	1	485
$\alpha =$	8tes	Jahr gibt	$m =$	49	6	656
			dazu β. 6 St. $=$		18	.
			macht $m + \beta$. 6 St. $=$	50	.	656
			davon ab $(\pi' + \pi'')p = \pi p =$	6	2	385
			gibt Rest Θ T. $+ \tau =$	43	22	271

$a' \equiv 2$, mod 7, $\Theta = 43 \equiv 1$, mod 7,
$t \equiv 6 - 6 + 1$, mod $7 \equiv 1$, $\tau = 22$ St. 271 Chl.

Hier findet sonach die Ausnahme wegen **Betuthakpat** Statt,
folglich ist $\Delta\Theta = 1$, und $H' = 2$.
Ferner ist $k = 19 - 4 - 2 = 13$,
daher wird $u' = 43 + 1 + 13 - 24 = 33$,
sofort ist der 15 Nisan $= 15 + 33 - 31 = 17$ April, ein Sonntag.
Die jüd. Ostern 5687 sind demnach Sonntag am 17 April 1927 nach Chr.

Anmerkung. Die Aufgabe, für ein gegebenes Jahr nach Chr., das julianische Datum des Ostertags der Juden zu finden, löste zuerst Gauß in des Baron Zach Monatl. Correspondenz Bd. 5, 1802 Mai, S. 435, und **Cisa de Crésy** gab dafür einen Beweis in der **Correspond. astronom.** vol. 1, pag. 556. Seither wurde sie in verschiedene astronomische und chronologische Werke aufgenommen, z. B. in Littrow's theoret. und prakt. Astronomie, Wien 1821. 2. Theil. S. 365. Aehnlich löste Kulik in seinem Tausendjährigen Kalender, 2. Ausg. Prag 1834, S. XIV die Aufgabe, das julianische Datum des jüdischen Neujahrs zu berechnen; wo auch das hier gegebene letzte Beispiel betrachtet wird. Alle drei Mathematiker führen ihre Rechnungen in Decimalen des Tages, worauf hier jedoch nicht eingegangen ward, weil einerseits durch die mitgetheilten Hilfstafeln das allein beschwerliche Multipliciren der zusammengesetzten Zeiträume vermieden wurde, und andrerseits die Juden in ihrer überkünstlichen Zeitrechnung so gewissenhaft sind, daß sie auch keinen Rega (Augenblick) vergeben.

202.

Fest- und Fasttage der Juden.

Die wichtigsten Fest- und Fasttage der Juden sind folgende.

Regelmäßig wiederkehrende Festtage sind die Sabbathtage in jeder Woche und die **Rosch chodesch**, Neumondstage, bei den Monatwechseln. Hat ein Monat 30 Tage, so ist der 30ste, obschon zum verflossenen Monate gehörig, der erste Neumondstag des kommenden Monates, und der folgende Tag, der zweite Neumondstag, ist dann der eigentliche Anfang des neuen Monates. Sonst, wenn dem Monate ein 29tägiger vorangeht, ist blos am ersten Tage das Neumondsfest.

Am letzten Sabbath jedes Monates geschieht in den Synagogen die Verkündigung des Neumondes.

Der Tag und Abend vor einem Fest-, Sabbath- und Neumondstage wird der **Ereb** oder Vorabend dieses Feiertages genannt.

Die Monatstage der Fest- und Fasttage sind, abgesehen von geringen Verschiebungen, unveränderlich. Jene, welche streng, mit Enthaltung von Arbeit, gefeiert werden, sind hier mit einem * bezeichnet.

Thischri.

1.* Erster }
2.* Zweiter } Rosch haschanah, Neujahrfest;
fällt mit dem von Moses angeordneten Posaunenfeste zusammen.

3. Zom gedaljahu, Fasten Gedaljah. Wird, wenn der Tag ein Samstag ist, also das Jahr mit einem Donnerstage anfängt, auf den folgenden Tag, Sonntag den 4 Thischri verlegt.

10.* Jom kippur, Versöhnungsfest, ein strenger, von einem Abend zum anderen zu beobachtender Fasttag. Er ist das heiligste von Moses eingesetzte Fest.

15.* Erstes }
16.* Zweites } Chag süccoth, Laubhüttenfest,
das von Moses eingesetzte Dankfest für die beendigte Obst- und Weinlese. Es dauert acht Tage. Am ersten Tage ist heilige Versammlung, kein Geschäft darf verrichtet werden. Der dritte bis sechste, vom

17. bis 20. Thischri, sind Zwischentage, die nicht festlich begangen werden.

21. Siebenter Tag des Laubhüttenfestes, Palmfest, **Hossana rabba**, das große **Hosiana**.

22.* Achter und Schlußtag des Laubhüttenfestes, **Schemini azereth**, heilige Versammlung.

23.* **Schimchath thorah**, Gesetzfreude.

Kislev.

25. Chanükkah, Tempelweihe. Das Fest dauert acht Tage, wird jedoch nicht streng gefeiert.

Tebeth.

10. Asarah betebeth, der zehnte im **Tebeth**, ein Fasttag zum Andenken an die Belagerung Jerusalems unter Nebukadnezar; wird, wenn er auf einen Samstag trifft, auf den folgenden Tag, Sonntag den 11 **Tebeth** verschoben.

Adar im Gemein-
oder Veadar im Schaltjahre.

13. **Thanith Esther**, Fasten Esther; wird, wenn der Tag ein Samstag ist, auf den vorhergehenden Donnerstag, den 11 **Adar**, verlegt.

14. **Purim**, Losungsfest, ein Freudenfest.

15. **Schuschan purim**, Purim zu Susa.
Diese drei Tage gehören im Schaltjahre dem **Veadar** an. Im **Adar**, der dann der Schaltmonat ist, wird der 14 **Purim rischon** oder **katan**, das erste oder kleine Purim genannt, aber nicht gefeiert.

Nisan.

15.* Erstes }
16.* Zweites } Pesach, Passah- oder Osterfest.

17. bis 20, vier Zwischentage im Osterfeste, an denen die Arbeit nicht untersagt ist.

21.* }
22.* } Ende des Passah.

Ijar.

18. Lag beomer, der drei und dreißigste Tag im Omer, vom 16 Nisan an gerechnet, an welchem einst das Ernteopfer, omer, dargebracht wurde. Zugleich das Schülerfest.

Sivan.

6.* Erstes }
7.* Zweites } Wochen- oder Pfingstfest, Schabüoth.

Thamus.

17. Scheba asar bethamus, der siebzehnte im Thamus, Fasten wegen Eroberung Jerusalems; wird, wenn es auf einen Samstag fällt, auf den folgenden Tag, Sonntag den 18 Thamus verlegt.

Ab.

9. Thischah beab, der neunte Ab, Fasten wegen der Zerstörung des Tempels; wird ebenfalls, so oft er auf einen Samstag trifft, auf den folgenden Tag, Sonntag den 10 Ab, verschoben.

Siebenter Abschnitt.

Zeitrechnung der Araber oder Mohammedaner und der Türken.

A. Arabische oder mohammedanische Zeitrechnung.

203.

Grundlage der arabischen Zeitrechnung.

Die Araber sind das einzige Volk, welches seine Zeitrechnung ganz allein auf den Lauf des Mondes gründet. Mit dem ersten Erscheinen der Mondsichel in der Abenddämmerung beginnen sie ihre Monate und nennen die Dauer zwölf solcher Monate ein Jahr, ohne je den Mondlauf mit dem scheinbaren Sonnenlaufe auszugleichen. Da nun das Mondjahr 354·367 und das Sonnenjahr 365·242 Tage im Mittel hält, ihr Unterschied sonach 10·875 Tage beträgt; so muß der Jahresanfang der Araber in 365·242 : 10·875 nahe = 33 mittleren Sonnenjahren durch alle Jahrszeiten zurückweichen.

Diese ohne Zweifel uralte Zeitrechnung wurde von Mohammed (620 n. Chr.) sanctionirt und in den von ihm gestifteten Cultus verflochten, mit dem sie zu den Völkern überging, welche sich zu dem Islam bekennen; weswegen sie nicht blos die arabische, sondern auch die mohammedanische genannt wird.

204.

Der Tag.

Die nächste Folge des obigen Princips ist, daß die Araber den bürgerlichen Tag mit dem Untergange der Sonne anfangen, mithin die Nacht vor dem natürlichen Tage hergehen lassen; darum pflegen sie sogar die Zeiträume nach Nächten zu bestimmen und nach Nächten zu datiren. Sie fangen demnach ihren Tag um die halbe Nacht früher als wir an, was bei der Vergleichung ihrer Tage mit den unseren stets zu beachten ist.

Vor Einführung der mechanischen Uhren theilten sie, mittels der Sonnenuhren, den Tag, troz der Verschiedenheit seiner Länge, nach orientalischem Gebrauche, in 12 Stunden und rechneten eben so viel auf die Nacht.

Gegenwärtig aber theilen sie, gleich den übrigen Völkern, den bürgerlichen Tag in 24 Stunden, welche sie gleichförmige nennen.

205.

Die Woche.

Die siebentägige Woche — usbu — erhielten die Araber von den Juden in den Zeiten vor Mohammed, wo sie sich großen Theils zur jüdischen Religion bekannten. Der Sonntag ist bei ihnen, wie bei den Juden und bei uns, der erste Wochentag. Ihre Namen der Wochentage sind:

				entsprechender christl. Wochentag.
1)	jaum el-ahad,	erster	Wochentag	Sonntag
2)	— — esnain,	zweiter	—	Montag
3)	— — salasa,	dritter	—	Dinstag
4)	— — erbua,	vierter	—	Mittwoch
5)	— — chamis,	fünfter	—	Donnerstag
6)	— — dschuma,	Tag der Zusammenkunft,		Freitag
7)	— — sebt,	Sabbath,		Samstag.

Der Freitag führte vor Mohammed den Namen arûbe, Abend, seit ihm heißt er jaum el-dschuma, Tag der Versammlung, weil sich an ihm, als an ihrem allwochentlichen Feiertage, die Mohammedaner in den Moscheen zum Gebete versammeln.

206.

Jahrform.

I. Jahrform des arabischen Volkes. Bei der Dauer der Monate und ihrer Ausgleichung mit dem Mondlaufe muß man den arabischen Volkskalender, nach dem sich die bürgerlichen Geschäfte und die Feste richten, von der bei den Astronomen üblichen Jahrform unterscheiden. Jene Volkszeitrechnung gründet sich auf die unmittelbare Beobachtung des Neulichts des Mondes. Der Monat fängt nemlich an jenem Abende an, wo man in einer freien Gegend in der Dämmerung die Mondsichel zuerst erblickt, und dauert nie weniger als 29 Tage und, falls nicht Wolken die Wahrnehmung der Mondsichel hindern, nie mehr als 30 Tage; wenigstens gibt das Traditionsgesez der Mohammedaner in einem solchen Falle dem Monate sein bestimmtes Maß von 30 Tagen. Diese Monatanfänge sind demnach zwar etwas unbestimmt, werden aber immer bald wieder durch den Himmel selbst berichtiget.

Nach zwölf so gezählten Monaten, die eben so wie bei den Astronomen benannt werden, fängt man ein neues Jahr an.

II. Jahrform der arabischen Astronomen. Weil zwei synodische Mondmonate sehr nahe 59 Tage betragen, so geben die arabischen Astronomen den Monaten abwechselnd 30 und 29 Tage, wornach von den 12 Monaten ihres Jahres die ungeradstelligen 30, die geradstelligen aber 29 Tage erhalten. Nur dem lezten Monate hängen sie von Zeit zu Zeit noch einen 30[sten] Tag als Schalttag an.

Die Namen und Dauer der Monate in der astronomischen arabischen Jahrform ersieht man aus folgender Tafel, wo s die Schalttage des Jahres zählt.

Monat.	Tage.	Tagsumme.	Nullter Tag.
1) Moharrem	30	30	0
2) Safer	29	59	30
3) Rebi el-ewwel	30	89	59
4) Rebi el-achir	29	118	89
5) Dschumadi el-ewwel	30	148	118
6) Dschumadi el-achir	29	177	148
7) Redscheb	30	207	177
8) Schaban	29	236	207
9) Ramadan	30	266	236
10) Schewwal	29	295	266
11) Dsu 'l-kade	30	325	295
12) Dsu 'l-hedsche	$29 + s$	$354 + s$	325

207.

Arabische Schaltrechnung.

Die arabischen Astronomen, welche die Ausgleichung der bürgerlichen Mondjahre mit den astronomischen dergestalt anordneten, daß der erste Tag jedes Monates mit einem Neumonde zusammentreffe, berechneten mittels der, in der allgemeinen Zeitrechnung §. 22, II, beschriebenen successiven Addition, die Dauer von 1, 2, 3 bis 30 mittleren astron. Mondjahren in Tagen und deren Theilen; und leiteten daraus die Dauer eben so vieler bürgerlichen Jahre in vollen Tagen ab, indem sie jeden Ueberschuß über die ganzen Tage, so oft er weniger als einen halben Tag betrug, weg ließen, dagegen als einen ganzen Tag anschlugen, wenn er genau einen halben Tag oder mehr ausmachte. Indem sie dann jede erhaltene Tagsumme von der folgenden abzogen, ergab sich ihnen die Dauer der einzelnen 30 Jahre zugleich mit der möglich zweckmäßigsten

Stellung der Schaltjahre. Auf diese Weise gestalteten sie ihren 30jährigen Schaltkyklus, in welchem die 11 Jahre

2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 21, 24, 26, 29

Schaltjahre zu 355, die übrigen 19 Jahre aber Gemeinjahre zu 354 Tagen sind; genau so, wie wir ihn in §. 22, II, gefunden haben.

Da die arabischen Astronomen nach Abu 'l hassan Kuschjar das Mondjahr im Mittel zu 354 Tagen und $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{6}$, zusammen $\frac{11}{30}$ Tag = 8 St. 48′ rechneten, so beträgt am Ende des 15ten Jahres der Ueberschuß über den vollen Tag gerade 12 Stunden; darum erachten es manche arabische Chronologen für gleichgiltig, ob man das 15te oder 16te Jahr zum Schaltjahr mache. Genauer ist die erste Weise, weil das mittlere Mondjahr um sehr nahe 34 Sec. länger hätte angenommen werden sollen, was in 15 Jahren um $8\frac{1}{2}$ Minuten mehr beträgt; wir legen sie daher auch unseren Rechnungen zum Grunde.

208.

Jahrrechnung der Mohammedaner.

Die arabischen Astronomen mußten den Anfang ihrer Jahrrechnung, so wie den Anfang jedes Monates und Jahres an einen Neumond knüpfen. Hiezu wählten sie, nach Abu 'l hassan Kuschjar, in jenem Jahre, wo Mohammed von Mekka nach Medina floh, dem 933sten der seleukidischen Aere, den 15 Thamus, einen Donnerstag, welchem der 15 Julius 622 n. Chr., oder 6130 der byzantinischen Weltäre entspricht. Diese Jahrrechnung heißen sie tàrich el-hedschra, Aere der Flucht, daher sie auch gewöhnlich Hedschra genannt wird. Der Chalif Omar (634 n. Chr.) war es, der zuerst die öffentlichen Verhandlungen mit dem Jahre der Hedschra zu bezeichnen befahl.

In Betreff der Epoche dieser Aere weichen die europäischen Chronologen von den arabischen oder orientalischen Astronomen um einen Tag ab, indem diese die Aere mit der Conjunction des Mondes am Abende vor dem 15, jene aber mit dem Erscheinen der Mondsichel nach Sonnenuntergang, am Abende vor dem 16 Juli anfangen. Nach Ideler's Rechnung *) ereignete sich unter dem Meridiane von Mekka die wahre Conjunction Mittwoch den 14 Juli um 8 Uhr 17′ mittlerer Zeit Vormittags; daher wurde die Mondsichel nicht am Abende dieses Tages, sondern erst am folgenden Abende Donnerstag den 15 Juli sichtbar. — So oft man demnach das arabische Datum einer astronomischen Beobachtung auf eine andere Zeitrechnung zu bringen hat, läßt man den 1 Moharrem des Jahres 1 der Hedschra Mittwoch den 14 Juli 622 nach Chr. Abends anfangen, folglich von der darauf folgenden

*) Handbuch, 2 Band, Seite 485.

Mitternacht an mit Donnerstag dem 15 Juli übereinfallen, und den 0 Moharrem mit Mittwoch dem 14 Juli, dem 2238934. Tage der byzantinischen Aere, übereinstimmen. — Soll dagegen die kyklische Rechnung mit den Mondserscheinungen und dem arabischen Volkskalender möglichst nahe zusammentreffen, so läßt man diesen 1 Moharrem um einen Tag später Donnerstag den 15 Juli Abends anfangen, daher von der nachfolgenden Mitternacht an mit dem Freitage dem 16 Juli übereinfallen, und den 0 Moharrem mit Donnerstag dem 15 Juli, dem 2238935. Tage der byzantinischen Aere, zusammenstimmen. — Dieser 16 Juli gilt auch, wenn von dem heutigen Gebrauche der arabischen Zeitrechnung in den öffentlichen Acten der Mohammedaner die Rede ist; denn die mohammedanischen Kalender, welche jährlich in der Türkei, in Aegypten, Persien und Arabien erscheinen, sind an die kyklische Rechnung und an jenen Epochentag gebunden. — Welcher Epochentag aber bei der Reduction der von den arabischen Geschichtschreibern angegebenen Data zu wählen sei, läßt sich nicht immer mit Sicherheit entscheiden; weil diese Data von der Volksrechnung entlehnt sind, welche die Anfänge der Monate auf die erste Phase setzt. — Wir werden im Folgenden mit den arabischen Astronomen den 15 Juli zum Tage der Epoche der Hedschra machen.

209.

Vergleichung der Monats- und Jahrstage.

Der t^{te} Tag des m^{ten} Monates sei der d^{te} im Jahre. Bis zum Anfange dieses Monates verfließen $m-1$ Monate, worunter jeder zweite, also $\mathrm{q}\frac{m-1}{2}$ Monate, blos 29 Tage enthalten und $\mathrm{q}\frac{m}{2} = m - 1 - \mathrm{q}\frac{m-1}{2}$ Monate 30 T. besitzen; daher vergehen im Ganzen $30(m-1) - \mathrm{q}\frac{m-1}{2} = 29(m-1) + \mathrm{q}\frac{m}{2}$ Tage, und es wird der Jahrstag

$$d = 30(m-1) - \mathrm{q}\frac{m-1}{2} + t = 29(m-1) + \mathrm{q}\frac{m}{2} + t. \qquad (339)$$

Hieraus folgt umgekehrt, daß der d^{te} Tag des Jahres im Monate

$$m = \mathrm{Q}\frac{d}{30} + 1 + \Delta m \qquad (340)$$

der Tag

$$t = \mathrm{R}\frac{d}{30} + \mathrm{q}\frac{m-1}{2} - 30\Delta m \qquad (341)$$

ist; oder daß er im Monate

$$m = \mathrm{Q}\frac{2d-1}{59} + 1$$

der Tag

$$t = \left(\mathrm{R}\frac{2d-1}{59} + 1 - \mathrm{r}\frac{m-1}{2}\right) : 2 \text{ ist.}$$

Im ersteren Falle ist $\Delta m = 0$ oder 1 zu wählen, so daß t positiv und nicht größer als die Länge des n^{ten} Monates ausfällt.

Mittels der Tafel in §. 206 geschieht diese Vergleichung auf die bekannte Weise.

210.

Anzahl der Schalttage vor einem Jahre der Hedschra.

Vermöge der Anordnung des arabischen Schaltkyklus liegen (nach §. 24, Beisp.) vor einem Jahre a der Hedschra

$$(342) \qquad e = \mathfrak{q}\frac{11a+4}{30} = \mathfrak{q}\frac{a + \mathfrak{q}\frac{a+4}{10}}{3} \text{ Schaltjahre;}$$

dieses Jahr a enthält

$$(343) \qquad \varepsilon = \mathfrak{q}\frac{11a+15}{30} - \mathfrak{q}\frac{11a+4}{30} = \mathfrak{q}\frac{11 + \mathfrak{r}\frac{11a+4}{30}}{30}$$

oder nach XXII, (199),

allgemein $\varepsilon = \mathfrak{q}\frac{11 - \psi + \mathfrak{r}\frac{11a+4}{30}}{30 - \psi}$ und insbesondere $\varepsilon = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{11a+4}{30}}{19}$ Schalttage,

und ist demnach ein Schaltjahr, so oft

$$\mathfrak{r}\frac{11a+4}{30} > 18 \text{ ausfällt.}$$

211.

Vergleichung der Jahrstage mit jener der ganzen Aere.

I. Sei der d^{te} Tag des Jahres a der Hedschra der n^{te} Tag in dieser Aere selbst, so ist, vermöge §. 26, (10), wegen $l = 354$ und $\Delta l = 1$,

$$(344) \qquad n = 354(a-1) + e + d$$

$$= 354(a-1) + \mathfrak{q}\frac{a + \mathfrak{q}\frac{a+4}{10}}{3} + d.$$

Setzt man $\mathfrak{Q}\frac{a}{30} = \pi$ und $\mathfrak{R}\frac{a}{30} = \alpha$, also

$$a = 30\pi + \alpha;$$

so ist dieses Jahr das α^{te} nach Ablauf des π^{ten} 30jährigen Schaltkyklus, und man erhält

$$(345) \qquad n = 10631\pi + \nu + d,$$

wenn Kürze halber

$$(346) \qquad \nu = 354(\alpha - 1) + \mathfrak{q}\frac{\alpha + \mathfrak{q}\frac{\alpha+4}{10}}{3}$$

gesetzt wird.

Hier gibt 10631 die Anzahl der in jedem Schaltkreise, folglich 10631π die in den abgelaufenen π Schaltkreisen enthaltenen Tage, und ν die von dem laufenden Schaltkreise vor dem Jahre α verflossenen Tage, an. Die beiden letzteren Zahlen lassen sich leicht in folgende Tafeln bringen.

Jahr des Kyklus α	Vor ihm verflossene Tage ν	Jahr des Kyklus α	Vor ihm verflossene Tage ν	Jahr des Kyklus α	Vor ihm verflossene Tage ν	Schalt-kykel π	Jahre 30π	Enthalten Tage 10631π
1	0	11	3544	21*	7087	1	30	10631
2*	354	12	3898	22	7442	2	60	21262
3	709	13*	4252	23	7796	3	90	31893
4	1063	14	4607	24*	8150	4	120	42524
5*	1417	15*	4961	25	8505	5	150	53155
6	1772	16	5316	26*	8859	6	180	63786
7*	2126	17	5670	27	9214	7	210	74417
8	2481	18*	6024	28	9568	8	240	85048
9	2835	19	6379	29*	9922	9	270	95679
10*	3189	20	6733	30	10277	10	300	106310

II. Soll umgekehrt zu dem n^{ten} Tage der **Hedschra** das Jahr **a**, worein, und sein Tag d, worauf er trifft, bestimmt werden, so findet man nach §. 27, (20) und (21), wo $l = 354$, $\Delta l = 1$ ist,

das Jahr

$$(347) \qquad a = \mathfrak{Q}\frac{n}{354} + 1 - \Delta a$$

und den Tag

$$(348) \qquad d = \mathfrak{R}\frac{n}{354} - \left(e = \mathfrak{q}\frac{a + \mathfrak{q}\frac{a+4}{10}}{3}\right) + 354\Delta a;$$

wofern man $\Delta a = 0, 1, 2, \ldots$ dergestalt bestimmt, daß d positiv und nicht größer als die Länge $354 + \varepsilon$ des Jahres a ausfalle.

Zum Multipliciren und Theilen durch 354 hat man für

$m =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
$354m =$	354,	708,	1062,	1416,	1770,	2124,	2478,	2832,	3186.

Oder nach §. 28, (22) und (23), wo $\varpi = 30$, $\varepsilon = 11$, $\delta = 4$, $p = 10631$ ist, erhält man

das Jahr

$$(349) \qquad a = \mathfrak{Q}\frac{30n-15}{10631} + 1$$

und den Tag

$$(350) \qquad d = \left(\mathfrak{r}\frac{11a+4}{30} + \mathfrak{R}\frac{30n-15}{10361}\right) : 30.$$

Am einfachsten zieht man, nach der voran stehenden Tafel, von der Nummer n des Tages die größte darin enthaltene Anzahl $\pi p = 10631\pi$ von

Im ersteren Falle ist $\Delta m = 0$ oder 1 zu wählen, so daß t positiv und nicht größer als die Länge des m^{ten} Monates ausfällt.

Mittels der Tafel in §. 206 geschieht diese Vergleichung auf die bekannte Weise.

210.

Anzahl der Schalttage vor einem Jahre der Hedschra.

Vermöge der Anordnung des arabischen Schaltkyklus liegen (nach §. 24, Beisp.) vor einem Jahre a der Hedschra

$$(342) \qquad e = \mathfrak{E}\frac{11a+4}{30} = \mathfrak{E}\frac{a + \mathfrak{E}\frac{a+4}{10}}{3} \text{ Schaltjahre;}$$

dieses Jahr a enthält

$$(343) \qquad \varepsilon = \mathfrak{E}\frac{11a+15}{30} - \mathfrak{E}\frac{11a+4}{30} = \mathfrak{E}\frac{11 + \mathfrak{R}\frac{11a+4}{30}}{30}$$

oder nach XXII, (199),

allgemein $\varepsilon = \mathfrak{E}\frac{11 - \psi + \mathfrak{R}\frac{11a+4}{30}}{30-\psi}$ und insbesondere $\varepsilon = \mathfrak{E}\frac{\mathfrak{R}\frac{11a+4}{30}}{19}$ Schalttage,

und ist demnach ein Schaltjahr, so oft

$$\mathfrak{R}\frac{11a+4}{30} > 18 \text{ ausfällt.}$$

211.

Vergleichung der Jahrstage mit jener der ganzen Aere.

I. Sei der d^{te} Tag des Jahres a der Hedschra der n^{te} Tag in dieser Aere selbst, so ist, vermöge §. 26, (10), wegen $l = 354$ und $\Delta l = 1$,

$$(344) \qquad n = 354(a-1) + e + d$$

$$= 354(a-1) + \mathfrak{E}\frac{a + \mathfrak{E}\frac{a+4}{10}}{3} + d.$$

Sezt man $\mathfrak{E}\frac{a}{30} = \pi$ und $\mathfrak{R}\frac{a}{30} = \alpha$, also

$$a = 30\pi + \alpha;$$

so ist dieses Jahr das α^{te} nach Ablauf des π^{ten} 30jährigen Schaltkyklus, und man erhält

$$(345) \qquad n = 10631\pi + \nu + d,$$

wenn Kürze halber

$$(346) \qquad \nu = 354(\alpha-1) + \mathfrak{E}\frac{\alpha + \mathfrak{E}\frac{\alpha+4}{10}}{3}$$

gesezt wird.

Hier gibt 10631 die Anzahl der in jedem Schaltkreise, folglich 10631π die in den abgelaufenen π Schaltkreisen enthaltenen Tage, und ν die von dem laufenden Schaltkreise vor dem Jahre α verflossenen Tage, an. Die beiden letzteren Zahlen lassen sich leicht in folgende Tafeln bringen.

Jahr des Kyklus α	Vor ihm verflossene Tage ν	Jahr des Kyklus α	Vor ihm verflossene Tage ν	Jahr des Kyklus α	Vor ihm verflossene Tage ν	Schalt-kykel π	Jahre 30π	Enthalten Tage 10631π
1	0	11	3544	21*	7087	1	30	10631
2*	354	12	3898	22	7442	2	60	21262
3	709	13*	4252	23	7796	3	90	31893
4	1063	14	4607	24*	8150	4	120	42524
5*	1417	15*	4961	25	8505	5	150	53155
6	1772	16	5316	26*	8859	6	180	63786
7*	2126	17	5670	27	9214	7	210	74417
8	2481	18*	6024	28	9568	8	240	85048
9	2835	19	6379	29*	9922	9	270	95679
10*	3189	20	6733	30	10277	10	300	106310

II. Soll umgekehrt zu dem n^{ten} Tage der Hedschra das Jahr a, worein, und sein Tag d, worauf er trifft, bestimmt werden, so findet man nach §. 27, (20) und (21), wo $l = 354$, $\Delta l = 1$ ist,
das Jahr

$$a = \mathfrak{Q}\frac{n}{354} + 1 - \Delta a \tag{347}$$

und den Tag

$$d = \mathfrak{R}\frac{n}{354} - \left(e = \mathfrak{q}\frac{a + \mathfrak{q}\frac{a+4}{10}}{3}\right) + 354\Delta a; \tag{348}$$

wofern man $\Delta a = 0, 1, 2, \ldots$ dergestalt bestimmt, daß d positiv und nicht größer als die Länge $354 + \varepsilon$ des Jahres a ausfalle.

Zum Multipliciren und Theilen durch 354 hat man für

m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
354m = 354, 708, 1062, 1416, 1770, 2124, 2478, 2832, 3186.

Oder nach §. 28, (22) und (23), wo $\varpi = 30$, $\varepsilon = 11$, $\delta = 4$, $p = 10631$ ist, erhält man
das Jahr

$$a = \mathfrak{Q}\frac{30n-15}{10631} + 1 \tag{349}$$

und den Tag

$$d = \left(\mathfrak{r}\frac{11a+4}{30} + \mathfrak{R}\frac{30n-15}{10361}\right) : 30. \tag{350}$$

Am einfachsten zieht man, nach der voran stehenden Tafel, von der Nummer n des Tages die größte darin enthaltene Anzahl $\pi p = 10631\pi$ von

Tagen der Hunderte, Zehner und Einer von Schaltkykeln ab; der Rest $n - \pi p = \nu + d$ zeigt dann an, der wie vielte der angegebene Tag in dem laufenden Schaltkyklus ist. Zieht man nun von ihm mit Hilfe derselben Tafel die größte darin enthaltene Zahl ν ab, welche angibt, wie viel Tage des Kyklus vor dem laufenden Jahre liegen, so gibt der Rest den Jahrstag d selbst an. Addirt man dann noch die Jahre, denen die abgezogenen Tage entsprechen, so erhält man auch das geforderte Jahr a.

212.

Berechnung des Wochentags, worauf ein Tag der Hedschra trifft.

Nimmt man mit den arabischen Astronomen den ersten Tag der Hedschra an einem Donnerstage, also den nullten Tag an einem Mittwoch, vierten Wochentage, an; so trifft der n^{te} Tag dieser Aere, oder der d^{te} Tag im Jahre a, oder der t^{te} Tag im m^{ten} Monate des Jahres a der Hedschra, nach §. 30, indem man $N = 1$ und $H = 5$, oder $N = 0$ und $H = 4$, oder $H_0 = 4$, ferner $l = 354 \equiv -3, \bmod 7$, $\Delta l = 1$, $\varpi = 30$, $\varepsilon = 11$, $\delta = 4$, $\psi = -3$, $p = 10631 \equiv -2, \bmod 7$ setzt, auf den Wochentag

$$(351) \qquad h \equiv n + 4, \bmod 7 \equiv n - 3$$

$$\equiv \left(e = \mathrm{q}\frac{a + \mathrm{q}\frac{a+4}{10}}{3}\right) - 3a + d, \bmod 7$$

$$\equiv \left(e = \mathrm{q}\frac{a + \mathrm{q}\frac{a+4}{10}}{3}\right) - 3a + 2(m-1) - \mathrm{q}\frac{m-1}{2} + t, \bmod 7$$

$$\equiv 3\mathrm{r}\frac{11a+4}{30} - a + 2 + d.$$

Der 0 Moharrem des Jahres a fällt auf den Wochentag

$$(352) \qquad H \equiv \mathrm{q}\frac{a + \mathrm{q}\frac{a+4}{10}}{3} - 3a, \bmod 7$$

$$\equiv 3\mathrm{r}\frac{11a+4}{30} - a + 2,$$

daher der d^{te} Tag dieses Jahres auf den Wochentag

$$(353) \qquad h \equiv H + d, \bmod 7$$

oder der t^{te} Tag im m^{ten} Monate dieses Jahres auf den Wochentag

$$(354) \qquad h \equiv H + 2(m-1) - \mathrm{q}\frac{m-1}{2} + t, \bmod 7$$

$$\equiv H + m + \mathrm{q}\frac{m}{2} - 1 + t.$$

Anmerkung. Setzt man den Anfang der Hedschra auf einen Freitag, so hat man zu den Ausdrücken (351) und (352) von h und H noch 1 zu addiren.

213.

Anwendungen.

1. Beispiel. Ibn Junis beobachtete eine Sonnenfinsterniß zu Kahira in Aegypten am Sonnabend den 29 **Schewwal 367** der **Hedschra.** *) Am wie vielten Tage der **Hedschra**? und ist der Wochentag von ihm richtig angesetzt?

Hier ist $t = 29$, $m =$ **Schewwal** $= 10$, daher $d = 29$ **Schewwal** $= 9.30 - \mathfrak{E}\frac{9}{2} + 29 = 270 - 4 + 29 = 295$; oder nach der Tafel in §. 206 ist 0 **Schewwal** $= 266$, folglich $d = 29$ **Schewwal** $= 266 + 29 = 295$.

Ferner ist $a = 367$, $\mathfrak{E}\frac{a+4}{10} = \mathfrak{E}\frac{371}{10} = 37$,

$$e = \mathfrak{E}\frac{367+37}{3} = \mathfrak{E}\frac{404}{3} = 134, \text{ also}$$

$$n = 366.354 + 134 + 295 = 129564 + 429 = 129993.$$

Oder mit Benützung der Tafel in §. 211

Jahr $a = 367$

300 Jahre	=	106310 Tage
67		
60 » »	=	21262
$\alpha = 7^{tes}$ Jahr	=	2126
d	=	295
Summe n	=	129993.

Weiter ist $n \equiv 3$, mod 7, also $h \equiv 3 - 3$, mod $7 \equiv 7 =$ Sonnabend;

oder $e = 134 \equiv 1$, mod 7, $a = 367 \equiv 3$, mod 7

$d = 295 \equiv 1$, mod 7, $m = 10 \equiv 3$, mod 7, $t = 29 \equiv 1$, mod 7,

$a = 367 \equiv 7$, mod 30, $11a + 4 \equiv 81$, mod $30 \equiv 21$;

folglich $h \equiv 1 - 9 + 1 \equiv 7$ oder

$\equiv 3.21 - 3 + 2 + 1 \equiv 7$, mod $7 =$ Samstag.

Die Sonnenfinsterniß war demnach am 129993. Tage der **Hedschra** und wirklich an einem Sonnabende.

2. Beispiel. Welch ein Jahr, Monat, Tag und Wochentag entspricht dem 439190. Tage der **Hedschra**?

Hier ist $n = 439190 = 354.1240 + 230$,

also $a = 1241 - \Delta a$, vorläufig $e = \mathfrak{E}\frac{1241+124}{3} = \mathfrak{E}\frac{1365}{3} = 455$,

daher $\Delta a = 1$, $a = 1240$, $e = \mathfrak{E}\frac{1240+124}{3} = \mathfrak{E}\frac{1364}{3} = 454$,

$$d = 230 - 454 + 354 = 130 = 30.4 + 10.$$

Daraus findet man $m = 5 + \Delta m$, $t = 10 + 2 - 30\Delta m$, also $\Delta m = 0$, $m = 5 =$ **Dschumadi el-ewwel**, $t = 12$, $d = 12$ **Dschumadi el-ewwel.**

*) **Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale, tom. 7, p. 181.**

Oder aus $n = 439190$ folgt $30n - 15 = 13175685 = 10631 . 1239 + 3876$; daher ist $a = 1240 \equiv 10$, mod 30, $11a + 4 \equiv 114$, mod 30 $\equiv 24$, also a ein Schaltjahr und $d = (3876 + 24) : 30 = 3900 : 30 = 130$.

Hieraus findet sich $2d - 1 = 259 = 59 . 4 + 23$, daher $m = 5$, $t = (23 + 1 - 0) : 2 = 12$.

Oder, Tag $n = 439190$

	425240 Tage	=	1200 Jahre
	13950		
	10631 Tage	=	30 »
	3319		
	3189 Tage	=	(α =) 10tes Jahr
d =	130		a = 1240
	118 = 0 Dschumadi el-ewwel		
d =	12 Dschumadi el-ewwel.		

Endlich ist $n = 439190 \equiv 3$, mod 7, also $h \equiv 3 + 4 \equiv 7$, mod 7 = Samstag.

Der angegebene 439190. Tag der Hedschra ist also Samstag der 12 Dschumadi el-ewwel 1240, was auch Ideler *) findet.

214.

Mohammedanischer Wochentagskalender.

Sobald man von einem Jahre der Hedschra den Wochentag, nach welchem es anfängt, oder den Wochentag des 0 Moharrem kennt, so lassen sich leicht zu allen Tagen dieses Jahres die Wochentage bestimmen, worauf sie fallen. Man stellt nemlich in folgende Tafel alle Tage des mohammedanischen oder arabischen Jahres zusammen, die auf denselben Wochentag wie der 0 Moharrem treffen und deren Jahrstage sonach durch 7 theilbar sind.

Moharrem, 30 Schewwal, 29	Dschumadi el-ewwel, 30	Rèbi el-achir, 29 Ramadan, 30	Schaban, 29	Rèbi el-ewwel, 30 Dsu'l-hedsche 29 in Gemeinj. 30 in Schaltj.	Safer, 29 Redscheb, 30	Dschumadi el-achir, 29 Dsu'l-kade, 30
0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				
Sonntag 1.	Montag 2.	Dinstag 3.	Mittwoch 4.	Donnerstag 5.	Freitag 6	Samstag 7. Wochent.

*) Handb. 2. Bd, S. 493.

Für alle in der Tafel nicht enthaltenen Monatstage läßt sich der auf sie treffende Wochentag leicht bestimmen, wenn man von dem nächst $\binom{\text{früheren}}{\text{späteren}}$ in die Tafel aufgenommenen Monatstage und dem Wochentage, worauf er mit dem 0 Moharrem trifft, in der untersten Zeile $\binom{\text{vorwärts}}{\text{rückwärts}}$ bis zu dem angegebenen Monatstage zählt.

Z. B. In dem vorher angeführten Jahre 367 ist $a = 367 \equiv 3$, mod 7 $\equiv 7$, mod 30, $11a + 4 \equiv 77 + 4$, mod $30 \equiv 21$, daher der Wochentag des 0 Moharrem $H \equiv 3.21 - 3 + 2 \equiv 6$, mod $7 =$ Freitag. In einem solchen Jahre sind demnach alle Tage der Tafel Freitage. Will man nun wissen, welcher Wochentag auf den 29 Schewwal trifft, so sieht man aus der Tafel, daß der 28 Schewwal ein Freitag ist, daher ist der 29 ein Samstag, wie auch oben gefunden wurde. (§. 213, 1.)

215.

Vergleichung der mohammedanischen Aere der Flucht mit anderen Aeren.

Die Zurückführung eines Datums der mohammedanischen oder arabischen Zeitrechnung auf eine andere Zeit- und Jahrrechnung oder umgekehrt wird nach der in §. 31 gewiesenen allgemeinen Methode bewirkt. Dabei nimmt man mit den arabischen Astronomen den Anfang der Hedschra um 2238934 Tage, oder mit den europäischen Chronologen noch um einen Tag später, hinter dem Anfange der byzantinischen Weltäre an.

Beispiel. Auf welches Datum der nabonassarischen Aere trifft der oben (§. 213, Beisp. 1) erwähnte Samstag der 29 Schewwal 367 der Hedschra, an welchem Jbn Junis eine Sonnenfinsterniß beobachtete?

Wir fanden daselbst, daß dieser Tag der 129993ste der Hedschra ist; mithin ist er der $2238934 + 129993 = 2368927$. Tag der byzantinischen Weltäre, und da diese um 1739133 Tage früher als die nabonassarische anhob, der $2368927 - 1739133 = 629794 = n^{te}$ Tag der nabonassarischen Aere. Daraus findet man nach §. 132, $n = 629794 = 365.1725 + 169$, also $a = 1726$ und $d = 169 = 30.5 + 19$, mithin $m = 5 + 1 = 6 =$ Mechir, $t = 19$; endlich ist noch $h \equiv a + d + 2$, mod $7 \equiv 4 + 1 + 2 \equiv 7 =$ Samstag. Der angeführte Tag war demnach Samstag der 19 Mechir 1726 seit Nabonassar.

216.

Reduction der arabischen oder mohammedanischen Data auf christliche.

Sei der d^{te} Tag im Jahre a der Hedschra gegeben, und zu suchen der d'^{te} Tag alt. St. des Jahres a' nach Chr., mit dem er übereinstimmt. Sind

n und n′ die Nummern dieses Tages in der mohammedanischen und christlichen Aere, g und g′ aber die Abstände der Anfänge dieser Aeren von jenem der byzantinischen Aere; so hat man, vermöge §. 211, 210 und §. 31, (46),

$$n = 354(a-1) + e + d,\quad e = \mathfrak{q}\frac{a + \mathfrak{q}\frac{a+4}{10}}{3} = \mathfrak{q}\frac{11a+4}{30}$$

$$n' + g' = n + g,\quad g = 2238934,\quad g' = 2011919,$$

$$g - g' = 227015 = 365 \,.\, 622 - 15,$$

also

$$n' = 365(a-1) - 11(a-1) + 365.622 - 15 + e + d$$
$$= 365(a+621) - b,$$

wenn man abkürzend

$$(355)\qquad b = 11a + 4 - (e+d) \qquad \text{setzt.}$$

Daraus folgt demnach, vermöge §. 56, (90), wenn man nach (342) u. (355)

$$e = \mathfrak{q}\frac{11a+4}{30} \text{ und } b = 11a + 4 - (e+d)$$

voraus berechnet, das Jahr nach Chr.

$$(356)\qquad a' = a + 622 + \mathfrak{Q}\frac{-b}{365} - \Delta a = a + 621 - \mathfrak{q}\frac{b}{365} - \Delta a$$

und sein Tag

$$(357)\qquad d' = \mathfrak{R}\frac{-b}{365} - \mathfrak{q}\frac{a'-1}{4} + 365\Delta a$$
$$= 365 - \mathfrak{r}\frac{b}{365} - \mathfrak{q}\frac{a'-1}{4} + 365\Delta a,$$

wofern man Δa so wählt, daß d′ positiv und nicht größer als die Länge des Jahres a′ ausfalle.

Oder, man findet, für §. 56, (91),

$$4n' = 1461(a+621) - (a+621) - 44a - 16 + 4(e+d)$$
$$= 1461(a+621) - c,$$

wenn man abkürzend

$$(358)\qquad c = 45a + 637 - 4(e+d) \qquad \text{setzt.}$$

Daraus folgt demnach, vermöge §. 56, (91), wenn man nach (342) u. (358)

in voraus
$$e = \mathfrak{q}\frac{a + \mathfrak{q}\frac{a+4}{10}}{3}$$

und
$$c = 45a + 637 - 4(e+d)$$

berechnet, das Jahr nach Chr.

$$(359)\qquad a' = a + 622 + \mathfrak{Q}\frac{-c}{1461} = a + 621 - \mathfrak{q}\frac{c}{1461}$$

und sein Tag

$$(360)\qquad d' = \left(\mathfrak{r}\frac{a'-1}{4} + \mathfrak{R}\frac{-c}{1461}\right) : 4$$
$$= \left(\mathfrak{r}\frac{a'-1}{4} + 1461 - \mathfrak{r}\frac{c}{1461}\right) : 4.$$

Anmerk. Setzt man die Epoche der Hedschra auf den 16 Juli, so ist in den aufgestellten Gleichungen, vornehmlich in (355) und (358), d in $d-1$ zu verwandeln.

Beispiel 1. Nach Almakin starb Mohammed am 12 Rebi el-ewwel des Jahres 11 der Hedschra; an welchem Tage der christlichen Aere?

Hier ist $a=11$, $m=$ Rebi el-ewwel $=3$, $t=12$, also $d=2.30-\mathfrak{E}\frac{2}{2}+12=60-1+12=71$. Ferner wird $11a+4=121+4=125=30.4+5$, daher $e=4$, $b=125-(4+71)=50$, und man übersieht leicht, daß hier $\Delta a=0$ zu nehmen ist. Sonach erfolgt $a'=11+621=632$, $d'=365-50-157=158$. Da nun $a'=0$, mod 4, also das Jahr $a'=632$ ein Schaltjahr ist, so hat man, in der Tafel des §. 41, $i=1$, $151+i=152=0$ Juni, daher ist $d=158-152=6$ Juni.

Oder aus $a=11$, $d=71$, $e=4$ folgt $c=495+637-4(71+4)=1132-300=832$, also $a'=11+621=632$ und $d'=(3+1461-832):4=366-208=158=(158-152)$ Juni $=6$ Juni.

Mohammed starb also am 6 Juni 632 nach Chr. *)

Beispiel 2. Abulfeda **) setzt den Rückzug der Kreuzfahrer unter Ludwig IX von Mansura nach Damiette auf Mittwoch den 3 Moharrem des Jahres 648; und in den occidentalischen Quellen bei Duchesne ***) und Joinville †) ist von Dinstag Abend den 5 April 1250 die Rede. Harmoniren diese Data?

Man hat $a=648$, $d=3$ Moharrem $=3$, also $11a+4=7132=30.237+22$, $e=237$, sonach ist $b=7132-(237+3)=6892=365.18+322$ und $a'=648+621-18-\Delta a=1251-\Delta a$, $d'=365-322-312+365\Delta a$. Hieraus folgt $\Delta a=1$, $a'=1250$, $d'=730-634=96=(96-90=)$ 6 April, der wirklich ein Mittwoch war. Der 3 Moharrem 648 begann demnach Dinstag den 5 April 1250 Abends und dauerte bis zum Abende des Mittwochs des 6 Aprils; mithin stimmen die Zeitangaben zusammen.

217.

Fortsetzung. Verwendung von Hilfstafeln.

Nach dem Vorhergehenden [§. 211, I und §. 31, (47)] ist

$$n'=n+g-g'=10631\pi+\nu+d+g-g'=\text{Jahr } a', \text{ Tag } d' \text{ alt. St. n. Chr.}$$

Drückt man nun alle in Rechnung zu bringenden Zeiten durch vierjährige

*) Vergl. Ideler, Handb. Bd. 2. S. 499.

**) Ann. Muslem. Tom. IV. p. 508. Ideler Lehrb. S. 471.

***) Script. Rerum Gallic. Tom. V. p. 429.

†) Histoire de St. Louis, p. 65.

julianische Schaltkreise von 1461 Tagen und durch Tage aus; so findet man den Abstand des Anfangs der Hedschra von jenem der christlichen Aere

$$g - g' = 227015\ \text{T.} = 1461 \cdot 155 + 560 = 620\ \text{jul. J.}\ 560\ \text{T.}$$

und die Dauer des 30jährigen arabischen Schaltkyklus

$$p = 10631\ \text{T.} = 28\ \text{jul. J.}\ 404\ \text{T.};$$

dadurch kann man leicht obige Tafel in §. 211, dann die Tafel in §. 41, welche die Zeiten ν, 10631π und d' geben, für diesen Zweck einrichten, wornach sie folgende Formen annehmen.

Tafel 1.

Jahr im arabischen Kyklus	Vor ihm verflossene Zeit. ν Julianische		Jahr im arabischen Kyklus	Vor ihm verflossene Zeit. ν Julianische		Jahr im arabischen Kyklus	Vor ihm verflossene Zeit. ν Julianische	
α	Jahre	Tage	α	Jahre	Tage	α	Jahre	Tage
1	0	0	11	8	622	21*	16	1243
2*	0	354	12	8	976	22	20	137
3	0	709	13*	8	1330	23	20	491
4	0	1063	14	12	224	24*	20	845
5*	0	1417	15*	12	578	25	20	1200
6	4	311	16	12	933	26*	24	93
7*	4	665	17	12	1287	27	24	448
8	4	1020	18*	16	180	28	24	802
9	4	1374	19	16	535	29*	24	1156
10*	8	267	20	16	889	30	28	50

Tafel 2.

Arabische Schaltkykel.	Dauer derselben, πp. Julianische		Arabische Schaltkykel.	Dauer derselben, πp. Julianische	
Jahre 30π	Jahre	Tage	Jahre 30π	Jahre	Tage
30	28	404	300	288	1118
60	56	808	600	580	775
90	84	1212	900	872	432
120	116	155	1200	1164	89
150	144	559	1500	1452	1207
180	172	963	1800	1744	864
210	200	1367	2100	2036	521
240	232	310	2400	2328	178
270	260	714	2700	2616	1296

Tafel 3.

Julianisches J. im Schaltkr.	1stes	2tes	3tes	4tes
Monat	Der nullte Tag des Monates... ist im julianischen Schaltkreise der Tag ...			
1) Jänüar	0	365	730	1095
2) Februar	31	396	761	1126
3) März	59	424	789	1155
4) April	90	455	820	1186
5) Mai	120	485	850	1216
6) Junius	151	516	881	1247
7) Julius	181	546	911	1277
8) August	212	577	942	1308
9) September	243	608	973	1339
10) October	273	638	1003	1369
11) November	304	669	1034	1400
12) December	334	699	1064	1430

Ist demnach der d^{te} Tag im Jahre a der Hedschra angegeben, und das ihm entsprechende Jahr nach Chr. sammt dem julianischen Monatstage zu bestimmen; so addirt man 1) den Abstand des Anfangs der mohammedanischen Aere von jenem der christlichen, nemlich 620 jul. Jahre 560 Tage, weil der 0 Moharrem des Jahres 1 der Hedschra hinter dem 155. julianischen Schaltkreise oder hinter dem Jahre 620 n. Chr. der 560. Tag im julianischen Schaltkreise ist, 2) die Dauer πp der größten Anzahl π der vor dem mohammedanischen Jahre a enthaltenen Zehner und Einer von 30jährigen Schaltcykeln nach Tafel 2, 3) die dem noch übrigen Jahre α des laufenden Schaltcykels vorausgehende Zeit ν nach Tafel 1, und 4) die Nummer d des angesagten Tages im mohammedanischen Jahre nach der Tafel in §. 206. Aus der sich ergebenden Tagsumme wirft man jede 1461 Tage weg und sezt dafür 4 jul. Jahre an, folglich ersezt man 2932 Tage durch 8 jul. Jahre. Die noch übrig bleibende Tagezahl gibt dann an, der wie vielte der gesuchte christliche Tag im laufenden julianischen Schaltkreise ist. Zu ihr liefert sonach die Tafel 3, der wie vielte Tag der ihm zunächst vorangehende nullte Monatstag in diesem Schaltkreise ist, und im wie vielten Jahre desselben Schaltkreises er liegt. Jene Tagsnummer wird abgezogen, und der Rest gibt den geforderten Monatstag alten Styls; diese Jahrsnummer aber wird zu den angesezten Jahren addirt, und die Summe gibt das verlangte Jahr nach Chr.

Anmerkung. Wer die Hedschra mit dem 16 Juli anfangen läßt, muß ihren Abstand mit 620 jul. Jahren und 561 Tagen in Rechnung bringen.

Beispiel. Zwischen dem türkischen Kaiser Mustapha II und den Regenten von Oesterreich, Venedig, Polen und Rußland wurde am 24 Redscheb 1110 der Hedschra zu Karlowiz in Slavonien Friede geschlossen; an welchem Tage der christlichen Aere?

Hier ergibt sich folgende Rechnung:

Moh. J. a = 1110, Abstand d. Aeren = 620 J. 560 T.
Jahre 900, nach Taf. 2 . . . . 872 . 432
210
Jahre 180, nach Taf. 2 . . . . 172 . 963
Jahr 30 = α, nach Taf. 1 . . 28 . 50 = ν
d = 24 Redscheb = 177 + 24 = 201
2206
— 1461
4 J. 745
nach Taf. 3 . . . 3 . 780 = 0 Jan.
1699 J. 15 Jan. a. St.
+ 10 = k
25 Jan. n. St.

Man findet also den 25 Januar, daher nach den europäischen Chronologen den 26 Januar n. St. des Jahres 1699 n. Chr.

218.

Reduction christlicher Data auf arabische oder mohammedanische.

Sei der d'^{te} Tag julianischen Styls des Jahres a' nach Chr. angegeben, und der Tag d des Jahres a der Hedschra zu suchen, dem er entspricht.

Nach dem Vorhergehenden [§. 31. (46) u. §. 55, (86)] ist

$$n = n' - (g - g') = 365(a' - 623) + q\frac{a'-1}{4} + 15 + d';$$

wenn man demnach

$$(361) \qquad b' = 11(a' - 623) + q\frac{a'-1}{4} + d' + 15$$

setzt, so findet man, vermöge §. 211, II, (347) und (348), das Jahr der Hedschra

$$(362) \qquad a = a' - 622 + Q\frac{b'}{354} - \Delta a;$$

und wenn man darnach die Anzahl der bis dahin eingeschalteten Tage

$$(342) \qquad e = q\frac{a + q\frac{a+4}{10}}{3}$$

berechnet, den Tag

$$(363) \qquad d = R\frac{b'}{354} - e + 354\Delta a.$$

Dabei wird $\Delta a = 0, 1, 2, \ldots$ so gewählt, daß d positiv und nicht größer als die Länge des mohammedanischen Jahres a, nemlich 354 oder 355 Tage erfolge.

Mit Benüzung der Hilfstafeln

läßt sich die Aufgabe durch Rückrechnung nach der kurz vorher in §. 217 angegebenen Weise lösen. Man stellt nemlich den Tag d' im Jahre a' nach Chr. als den, nach dem $4 Q \frac{a'}{4} = a' - R \frac{a'}{4}$ten Jahre, im $R \frac{a'}{4}$ten Jahre des laufenden julianischen Schaltkreises eintretenden Tag d' dar, indem man für a' die größte unter ihr liegende durch 4 theilbare Zahl $4 Q \frac{a'}{4}$ sezt, und für das zurück bleibende Jahr $R \frac{a'}{4}$ und seinen Tag d' aus der Tafel 3 des §. 217 den entsprechenden Tag des laufenden Schaltkreises aufsucht. Hievon zieht man nun ab: 1) den Abstand der Anfänge der mohammedanischen und christlichen Aere 620 jul. J. 560 T, 2) die größte im Reste enthaltene Dauer von Zehnern und Einern mohammedanischer 30jähriger Schaltkreise, nach Taf. 2 in §. 217, und 3) die größte in dem Reste begriffene Zeit vor dem Jahre im laufenden mohammedanischen Schaltkyklus nach Tafel 1 in §. 217. Sollte bei diesem Abziehen ein Minuend weniger Tage enthalten, als der Subtrahend, so vermehrt man die Tage des ersteren um 1461 und verringert dafür seine Jahre um 4. Die zulezt übrig bleibende Tagezahl gibt den verlangten Jahrstag, wozu leicht vermöge §. 206 der Monatstag bestimmt werden kann; endlich liefert die Summe der den abgezogenen Dauerzeiten nach den Tafeln 1 und 2 in §. 217 entsprechenden mohammedanischen Jahre das geforderte Jahr der **Hedschra**.

Anmerkung. Läßt man die **Hedschra** am 16 Juli 622 beginnen, so verwandelt man in den aufgestellten Gleichungen d' in d' + 1, oder man vermindert den Ausdruck von d um 1, oder bei der lezten Rechnungsweise vergrößert man den Abstand der Aeren um einen Tag auf 620 jul. J. 561 T.

Beispiel. Ibn Junis vergleicht den Samstag den 29 **Schewwal** 367 der **Hedschra**, an welchem er eine Sonnenfinsterniß beobachtete, *) mit dem 8 **Hasiran** des 1289. seleukidischen Jahres und dem 14 **Buneh** (**Payni**) des 694. diocletianischen Jahres; hat er darin Recht?

Das 1289. Jahr der Seleukiden beginnt (nach §. 174, 1) im Herbste 1289 — 312 = 977 nach Chr. und endet im Jahre 978; der syrische **Hasiran** stimmt ganz mit dem julian. Juni überein, also ist der angeführte 8 **Hasiran** der 8 Juni 978 nach Chr.

---

*) Beispiel 1 in §. 213.

Das Jahr 694 seit Diocletian fängt (vermöge §. 138, 1) im Sommer $694 + 283 = 977$ an, und endet 978 nach Chr.; sein 14 **Payni** ist daher der $14 - 6 = 8$ Juni 978 nach Chr. (§. 137 und 139).

Will man nun diesen 8 Juni 978 nach Chr. in die mohammedanische Aere übertragen, so hat man $a' = 978$, $d' = 8$ Juni $= 8 + 151 = 159$, $a' - 1 = 977 = 4.244 + 1$, $a' - 623 = 355$, $b' = 3905 + 244 + 159 + 15 = 4323 = 354.12 + 75$; daher $a = 978 - 622 + 12 - \Delta a = 368 - \Delta a$, vorläufig $e = \mathfrak{E}\frac{368 + 37}{3} = 135$, $d = 75 - 135 + 354\Delta a$. Nimmt man daher, wie es sein muß, $\Delta a = 1$, so wird $a = 367$, genaue Zahl $e = \mathfrak{E}\frac{367 + 37}{3} = 134$ und $d = 75 - 134 + 354 = 295 = (295 - 266 =)$ 29 **Schewwal.**

Oder der 8 Juni 978 n. Chr. ist, wegen $978 = 4.244 + 2 = 976 + 2$, der 8 Juni im 2. Jahre, also nach Tafel 3 in §. 217, der $516 + 8 = 524^{\text{ste}}$ Tag in dem, nach dem Jahre 976 anfangenden, vierjährigen Schaltkreise. Daher ist

		1985	
	2	1461	
angegebenes julianisches Datum	976 J.	524. T.	
hievon ab der Abstand der Aeren	620 .	560	
	352 .	1425	
nach Taf. 2 in §. 217 sind	288 .	1118	= . . . 300 moh. Jahre
	64 .	307	
		1461	
	60 .	1768	
und	56 .	808	= 60
	4 .	960	
endlich n. Taf. 1 in §. 217 entsprechen	4 .	665	dem Jahre 7
Rest		d = 295	a = 367. moh. Jahr.
		266 = 0 **Schewwal**	
		d = 29 **Schewwal.**	

Sämmtliche angegebene Data stimmen demnach auf denselben Tag überein.

219.

Berechnung derjenigen mohammedanischen Jahre, welche in einem gegebenen Jahre nach Chr. wechseln.

Sucht man die Jahre a und $a + 1$ der **Hedschra**, welche im Jahre a' nach Chr. mit einander abwechseln, und die Tage d' und $d' + 1$, in denen das vorangehende a endet und das folgende $a + 1$ anfängt, so trifft nach §. 34 der allgemeinen Chronologie, und besonders nach §. 218, (361) — (363),

wenn man darin $d' = 0$ setzt, der 0 Januar des Jahres a' nach Chr. in das Jahr der Hedschra

$$(362) \qquad a = a' - 622 + \mathfrak{E}\frac{b'}{354} - \Delta a$$

und auf den Tag

$$(363) \qquad d = \mathfrak{R}\frac{b'}{354} - e + 354\Delta a,$$

wofern man

$$(364) \qquad b' = 11(a' - 623) + \mathfrak{E}\frac{a'-1}{4} + 15$$

und

$$(342) \qquad e = \mathfrak{E}\frac{a + \mathfrak{E}\frac{a+4}{10}}{3} = \mathfrak{E}\frac{11a+4}{30} \text{ annimmt.}$$

Das Jahr a enthält Schalttage

$$\varepsilon = \mathfrak{E}\frac{\mathfrak{R}\frac{11a+4}{30}}{19}, \text{ nemlich } \varepsilon = 0 \text{ oder } = 1,$$

je nachdem $\mathfrak{R}\frac{11a+4}{30}$ kleiner als 19 ist oder nicht, folglich endigt sich im Jahre a' nach Chr. am Tage

$$(365) \qquad d' = 354 + \varepsilon - d$$

das mohammedanische Jahr a,

und am Tage $\quad d' + 1 = 355 + \varepsilon - d$

beginnt das mohammedanische Jahr $a + 1$.

Beispiel. Welche Jahre der Hedschra wechseln im Jahre 1850 nach Chr. mit einander ab?

Hier ist $\quad a' = 1850, \; a' - 1 = 1849 = 4.462 + 1$

$a' - 623 = 1850 - 623 = 1227,$

$b' = 13497 + 462 + 15 = 13974 = 354.39 + 168,$

$a = 1228 + 39 - \Delta a = 1267 - \Delta a$

vorläufig $\quad e = \mathfrak{E}\frac{1267 + 127}{3} = 464, \; d = 168 - 464 + 354\Delta a,$

also ist $\quad \Delta a = 1, \; a = 1266, \; 11a + 4 = 13930 = 30.464 + 10,$

daher $\quad e = 464, \; d = 168 - 464 + 354 = 58,$

ferner $\quad \varepsilon = 0$ und $d' = 354 - 58 = 296$

$= (296 - 273 =)$ 23 Oct. a. St.,

folglich wegen $k = 12$, $d' = 23 + 12$ Oct. $= 12 - 8$ Nov. $= 4$ Nov. n. St.

Im Jahre 1850 nach Chr. endet sich demnach das Jahr 1266 der Hedschra am 4 November n. St., und beginnt ihr Jahr 1267 am 5 November.

Anmerkung. Soll die Epoche der Hedschra auf den 16 Juli angenommen werden, so wird man den Ausdruck von d' um 1 vergrößern oder gleich Anfangs jenen von b' um 1 vermindern.

220.

Benüzung von Verzeichnissen der Anfänge mohammedanischer Jahre und Monate.

Zur Vereinfachung der Reduction mohammedanischer Data auf christliche dient sehr vortheilhaft ein, wie das unten in Tafel 1 folgende eingerichtetes, Verzeichniß der Wochentage und der Monatstage in den Jahren nach Chr., auf welche die nullten oder ersten Moharrem der Jahre der **Hedschra** treffen; weil man von diesem Tage aus, mittels eines leichten Weiterzählens, oder mittels einer in Tafel 2 mitgetheilten Zusammenstellung von mohammedanischen Monatanfängen das christliche Datum jeglichen Tages eines jeden mohammedanischen Monates bestimmen kann. Solche Verzeichnisse finden sich in mehreren chronologischen Werken, als in **Art de vérifier les dates, vol. 1.**, Littrow's Kalendariographie, Kulik's tausendjährigem Kalender, 2. Aufl., u. a.

In diesen Verzeichnissen ist besonders bemerkenswerth, daß, wofern nach dem alten Style in der christlichen Aere gerechnet wird, immer nach mehreren Jahren die arabischen Neujahrstage wenigstens nahe, wenn nicht ganz, auf dieselben christlichen Monatstage zurückkehren.

Um dies zu untersuchen, sei im vorigen §. 219 der d^{te} Tag des Jahres a der **Hedschra**, worauf der 0. Tag des Jahres a' nach Chr. trifft, in der **Hedschra** selbst der n^{te} Tag, so ist, vermöge §. 218,

$$n = 365(a' - 623) + \left(\mathfrak{q}\frac{a'-1}{4} = e'\right) + 15$$

und nach §. 211, (344)

$$n = 354(a-1) + \left(e = \mathfrak{q}\frac{11a+4}{30}\right) + d.$$

Hieraus folgt, wenn man auf das um $\Delta a'$ spätere Jahr n. Chr. übergeht,

$$\Delta n = 365\Delta a' + \Delta e' \text{ und } \Delta n = 354\Delta a + \Delta e + \Delta d;$$

daher aus der Gleichheit beider

$$\Delta d = 365\Delta a' - 354\Delta a + \Delta e' - \Delta e.$$

Fällt nun der 0 Moharrem des Jahres $a + 1 = A$ der **Hedschra** auf den d'^{ten} Tag im Jahre a' n. Chr., so ist $\Delta a = \Delta A$, und nach §. 219, (366)

$$\Delta d' = \Delta\varepsilon - \Delta d,$$

daher (366) $$\Delta d' = 354\Delta A - 365\Delta a' + \Delta(e+\varepsilon) - \Delta e'.$$

Es ist aber nach §. 210, (342) und (343),

$$e + \varepsilon = \mathfrak{q}\frac{11(a+1)+4}{30} = \mathfrak{q}\frac{11A+4}{30};$$

folglich, wenn man sich mit einer hier zureichenden Annäherung begnügt,

$$\Delta(e+\varepsilon) = \tfrac{11}{30}\Delta A \quad \text{und} \quad \Delta e' = \tfrac{1}{4}\Delta a',$$

Dadurch wird nahe

$$\Delta d' = 354\tfrac{11}{30}\Delta A - 365\tfrac{1}{4}\Delta a' = \frac{21262\Delta A - 21915\Delta a'}{60},$$

mithin $\quad \Delta d' = 0$, wenn $21262\Delta A = 21915\Delta a'$ und $\frac{\Delta a'}{\Delta A} = \frac{21262}{21915}$.

Für die Näherungswerthe dieses Verhältnisses findet man

$$\overset{1}{21915} : \overset{32}{21262} : \overset{1}{653} : \overset{1}{356} : \overset{3}{287} : \overset{1}{79} : \overset{1}{50} : 29 : 21, \text{ u. s. f.}$$

also $\quad \frac{\Delta a'}{\Delta A} = \frac{1}{1}, \frac{32}{33}, \frac{33}{34}, \frac{65}{67}, \frac{228}{235}, \frac{293}{302}, \frac{521}{537}, \ldots$

Sofort fallen die arabischen Jahranfänge nahe auf einerlei Monatstage nach 33, 65, 228, 293, 521 julianischen Jahren,
oder nach 34, 67, 235, 302, 537 arabischen Jahren.

Die Gleichung (366) anders umstaltend findet man

$$\Delta d' = 354\left(\Delta A - \Delta a' - \mathfrak{q}\frac{11\Delta a'}{354}\right) + \Delta(e+\varepsilon) - \Delta e' - \mathfrak{r}\frac{11\Delta a'}{354}.$$

Soll demnach das Neujahr der Mohammedaner nahe auf denselben Tag im christlichen Jahre fallen, also $\Delta d'$ sehr klein sein, so muß

$$(367) \qquad \Delta A = \Delta a' + \mathfrak{q}\frac{11\Delta a'}{354}$$

folglich $\quad \Delta d' = \Delta(e+\varepsilon) - \Delta e' - \mathfrak{r}\frac{11\Delta a'}{354}$ werden.

Es ist aber nach dem Vorhergehenden

$$\Delta(e+\varepsilon) = \mathfrak{q}\frac{11\Delta A}{30} + \eta,$$

wenn man zur Abkürzung

$$(368) \qquad \eta = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{11\Delta A}{30} + \mathfrak{r}\frac{11A+4}{30}}{30} = 0,\ 1 \text{ setzt.}$$

Eben so ist $\quad \Delta e' = \Delta\mathfrak{q}\frac{a'-1}{4} = \mathfrak{q}\frac{a'+\Delta a'-1}{4} - \mathfrak{q}\frac{a'-1}{4}$,

und im Jahre a' nach Chr. hat man

$$i = \mathfrak{q}\frac{a'}{4} - \mathfrak{q}\frac{a'-1}{4} \text{ julianische Schalttage,}$$

daher ist

$$(369) \quad \Delta e' = i + \mathfrak{q}\frac{\Delta a' - 1 + \mathfrak{r}\frac{a'}{4}}{4} = \mathfrak{q}\frac{\Delta a'}{4} + \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{r}\frac{\Delta a'}{4} + \mathfrak{r}\frac{a'-1}{4}}{4},$$

Hieraus folgt demnach

$$(370) \qquad \Delta d' = \eta + \mathfrak{q}\frac{11\Delta A}{30} - \Delta e' - \mathfrak{r}\frac{11\Delta a'}{354}.$$

Ist jener d'^{te} Tag des Jahres a' n. Chr. der t^{te} Tag im m^{ten} Monate, und ändert sich dieser Monat, bei dem Uebergange auf das Jahr $a' + \Delta a'$ n. Chr. nicht, so findet man aus der Gleichung (84) in §. 52

$$(371) \qquad \Delta t = \Delta d' - \mathfrak{q}\frac{m+9}{12}\,\Delta i.$$

und hierin ist $\quad \Delta i = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{a'+\Delta a'}{4} - \mathfrak{R}\frac{a'}{4} + \mathfrak{r}\frac{a'}{4}}{4} = -1, 0, 1.$

Besondere Fälle.

1) Ist $\Delta a' = 1$, so ist auch $\Delta A = 1$,

$$\eta = \mathrm{q}\frac{11 + \mathrm{r}\frac{11A+4}{30}}{30}$$

$=$ der Anzahl der Schalttage des moham. Jahres A, $\Delta e' = i$,

daher $\quad \Delta d' = \eta - i - 11 = -(11 + i - \eta)$

und $\quad \Delta t = -\left(11 + i + \mathrm{q}\frac{m+9}{12}\Delta i - \eta\right)$.

Somit hat man für $m < 3$, $\Delta t = -(11 + i - \eta)$

und $\quad$ für $m \overline{\overline{>}} 3$, $\Delta t = -(11 + i + \Delta i - \eta)$.

Bezeichnet nun j die Zahl der julianischen Schalttage, die in das mohammedanische Jahr A oder zwischen die 0ten Moharrem der nach einander folgenden Jahre A und $A + 1$ fallen, so ist

$$j = i + \mathrm{q}\frac{m+9}{12}\Delta i, \text{ nemlich } j = i \text{ für } m < 3$$
$$\text{und } j = i + \Delta i \text{ für } m \overline{\overline{>}} 3;$$

daher $\quad \Delta t = -(11 + j - \eta)$ oder $-\Delta t = 11 + j - \eta$.

Für die Schalttage $\quad \eta = 0, \ 0; \ 1, \ 1$

und $\quad j = 1, \ 0; \ 1, \ 0$

erhält man daher Zurückweichung $-\Delta t = 12, \ 11; \ 11, \ 10$.

Von einem Jahre zum anderen weicht demnach das arabische Neujahr gewöhnlich um 11, zuweilen aber auch um 12 oder 10 Tage zurück, je nachdem in das Intervall von diesem arabischen Jahre ein julianischer oder ein arabischer Schalttag allein fällt.

2) Für $\Delta a' = 33$ findet man $\Delta A = 33 + 1 = 34$,

$$\eta = \mathrm{q}\frac{14 + \mathrm{r}\frac{11A+4}{30}}{30} = 0, \ 1.$$

$$\Delta e' = i + 8, \quad \Delta d' = \eta + 12 - i - 8 - 9 = \eta - i - 5$$

$$\Delta t = -5 - \left(i + \mathrm{q}\frac{m+9}{12}\Delta i\right) + \eta = -4, \ -5, \ -6.$$

Nach 33 christlichen oder 34 mohammedanischen Jahren weicht das mohammedanische Neujahr um 4, 5 oder 6 Tage zurück.

3) Zu $\Delta a' = 65$ findet sich $\Delta A = 65 + 2 = 67$,

$$\eta = \mathrm{q}\frac{17 + \mathrm{r}\frac{11A+4}{30}}{30}, \text{ gewöhnlicher} = 1 \text{ als } 0$$

$$\Delta e' = i + 16, \ \Delta d' = \eta + 24 - i - 16 - 7 = 1 + \eta - i$$

$$\Delta t = 1 + \eta - \left(i + \mathrm{q}\frac{m+9}{12}\Delta i\right) = 1 \text{ oder } 2, \text{ seltner } 0.$$

Nach 65 christlichen oder 67 mohammedanischen Jahren rückt das mohammedanische Jahr um 1 oder 2 Tage vor, zuweilen trifft es aber auch auf denselben Monatstag.

4) Ist $\Delta a' = 228$, so ergibt sich $\Delta A = 228 + 7 = 235$,

$$\eta = \mathfrak{q}\frac{5 + \mathfrak{r}\dfrac{11A+4}{30}}{30}, \text{ meistens } = 0, \text{ selten } 1,$$

$$\Delta e' = 57, \quad \Delta d' = \eta + 86 - 57 - 30 = \eta - 1, \quad \Delta i = 0,$$

$$\Delta t = \Delta d' = \eta - 1, \text{ meistens } = -1, \text{ selten } 0.$$

5) Für $\Delta a' = 293$ findet man $\Delta A = 293 + 9 = 302$,

$$\eta = \mathfrak{q}\frac{22 + \mathfrak{r}\dfrac{11A+4}{30}}{30}, \text{ gewöhnlich } 1, \text{ selten } 0,$$

$$\Delta e' = i + 73, \quad \Delta d' = \eta + 110 - i - 73 - 37 = \eta - i,$$

$$\Delta t = \eta - \left(i + \mathfrak{q}\frac{m+9}{12}\Delta i\right), \text{ meistens } = 1, \text{ seltner } 0, \text{ sehr selten } -1.$$

6) Zu $\Delta a' = 521$ ergibt sich $\Delta A = 521 + 16 = 537$,

$$\eta = \mathfrak{q}\frac{27 + \mathfrak{r}\dfrac{11A+4}{30}}{30}, \text{ fast immer } 1, \text{ höchst selten } 0,$$

$$\Delta e' = i + 130, \quad \Delta d' = \eta + 196 - i - 130 - 67 = \eta - 1 - i$$

$$\Delta t = -1 + \eta - \left(i + \mathfrak{q}\frac{m+9}{12}\Delta i\right), \text{ meistens } = 0, \text{ seltner } = -1, \text{ höchst selten } = -2.$$

Nach 521 christlichen oder 537 mohammedanischen Jahren trifft daher das mohammedanische Neujahr meistens wieder auf denselben Monatstag, zuweilen nur weicht es um einen Tag, höchst selten aber um 2 Tage zurück.

Im neuen oder gregorianischen Style besteht die angeführte Vorrückung des mohammedanischen Neujahrs nur, so lange der Kalenderunterschied oder die Voreilung **k** des neuen Kalenders vor dem alten unverändert bleibt, sonst rückt das Neujahr noch um die Vergrößerung Δk dieses Kalenderunterschiedes vor.

Der hier folgende Abriß eines Verzeichnisses von der beschriebenen Einrichtung gibt für die Jahre nach Chr. von 1700 bis 1961 oder für die Jahre der **Hedschra** von 1112 bis 1381 die Nummer des Wochentags und das gregorianische Datum des nullten **Moharrem**, indem die Epoche der **Hedschra**, gemäß dem heutigen Gebrauche der Mohammedaner, auf den 16 Juli 622 gesetzt wird.

Tafel 1. Verzeichniß mohammedanischer Jahranfänge.

Jahr der Hedschra	0 Moharrem			Jahr der Hedschra	0 Moharrem		
	Wch.	Monatstag	J. n. Chr.		Wch.	Monatstag	J. n. Chr.
1112*	5	17 Juni	1700	1157	6	14 Febr.	1744*
1113	3	7	1701	1158*	3	2	1745
1114	7	27 Mai	1702	1159	1	23 Jan.	1746
1115*	4	16	1703	1160	5	12	1747
1116	2	5	1704*	1161*	2	1	1748*
1117*	6	24 Apr.	1705	1162	7	21 Dec.	»
1118	4	14	1706	1163	4	10	1749
1119	1	3	1707	1164*	1	29 Nov.	1750
1120*	5	22 März	1708*	1165	6	19	1751
1121	3	12	1709	1166*	3	7	1752*
1122	7	1	1710	1167	1	28 Oct.	1753
1123*	4	18 Febr.	1711	1168	5	17	1754
1124	2	8	1712*	1169*	2	6	1755
1125*	6	27 Jan.	1713	1170	7	25 Sept.	1756*
1126	4	17	1714	1171	4	14	1757
1127	1	6	1715	1172*	1	3	1758
1128*	5	26 Dec.	»	1173	6	24 Aug.	1759
1129	3	15	1716*	1174	3	12	1760*
1130	7	4	1717	1175*	7	1	1761
1131*	4	23 Nov.	1718	1176	5	22 Jul.	1762
1132	2	13	1719	1177*	2	11	1763
1133	6	1	1720*	1178	7	30 Jun.	1764*
1134*	3	21 Oct.	1721	1179	4	19	1765
1135	1	11	1722	1180*	1	8	1766
1136*	5	30 Sept.	1723	1181	6	29 Mai	1767
1137	3	19	1724*	1182	3	17	1768*
1138	7	8	1725	1183*	7	6	1769
1139*	4	28 Aug.	1726	1184	5	26 Apr.	1770
1140	2	18	1727	1185*	2	15	1771
1141	6	6	1728*	1186	7	4	1772*
1142*	3	26 Jul.	1729	1187	4	24 März	1773
1143	1	16	1730	1188*	1	13	1774
1144	5	5	1731	1189	6	3	1775
1145*	2	23 Jun.	1732*	1190	3	20 Febr.	1776*
1146	7	13	1733	1191*	7	8	1777
1147*	4	1	1734	1192	5	29 Jan.	1778
1148	2	23 Mai	1735	1193	2	18	1779
1149	6	11	1736*	1194*	6	7	1780*
1150*	3	30 Apr.	1737	1195	4	27 Dec.	»
1151	1	20	1738	1196*	1	16	1781
1152	5	9	1739	1197	6	6	1782
1153*	2	28 März	1740*	1198	3	25 Nov.	1783
1154	7	18	1741	1199*	7	13	1784*
1155*	4	7	1742	1200	5	3	1785
1156	2	25 Feb.	1743	1201	2	23 Oct.	1786

Jahr der	0 Moharrem			Jahr der	0 Moharrem		
Hedschra	Wch.	Monatstag	J. n. Chr.	Hedschra	Wch.	Monatstag	J. n. Chr.
1202*	6	12 Oct.	1787	1247	7	11 Jun.	1831
1203	4	1	1788*	1248*	4	30 Mai	1832*
1204	1	20 Sept.	1789	1249	2	20	1833
1205*	5	9	1790	1250	6	9	1834
1206	3	30 Aug.	1791	1251*	3	28 Apr.	1835
1207*	7	18	1792*	1252	1	17	1836*
1208	5	8	1793	1253	5	6	1837
1209	2	28 Jul.	1794	1254*	2	26 März	1838
1210*	6	17	1795	1255	7	16	1839
1211	4	6	1796*	1256*	4	4	1840*
1212	1	25 Jun.	1797	1257	2	22 Febr.	1841
1213*	5	14	1798	1258	6	11	1842
1214	3	4	1799	1259*	3	31 Jan.	1843
1215*	7	24 Mai	1800	1260	1	21	1844*
1216	5	14	1801	1261	5	9	1845
1217	2	3	1802	1262*	2	29 Dec.	»
1218*	6	22 Apr.	1803	1263	7	19	1846
1219	4	11	1804*	1264	4	8	1847
1220	1	31 März	1805	1265*	1	26 Nov.	1848*
1221*	5	20	1806	1266	6	16	1849
1222	3	10	1807	1267*	3	5	1850
1223	7	27 Febr.	1808*	1268	1	26 Oct.	1851
1224*	4	15	1809	1269	5	14	1852*
1225	2	5	1810	1270*	2	3	1853
1226*	6	25 Jan.	1811	1271	7	23 Sept.	1854
1227	4	15	1812*	1272	4	12	1855
1228	1	3	1813	1273*	1	31 Aug.	1856*
1229*	5	23 Dec.	»	1274	6	21	1857
1230	3	13	1814	1275*	3	10	1858
1231	7	2	1815	1276	1	31 Jul.	1859
1232*	4	20 Nov.	1816*	1277	5	19	1860*
1233	2	10	1817	1278*	2	8	1861
1234	6	30 Oct.	1818	1279	7	28 Jun.	1862
1235*	3	19	1819	1280	4	17	1863
1236	1	8	1820*	1281*	1	5	1864*
1237*	5	27 Sept.	1821	1282	6	26 Mai	1865
1238	3	17	1822	1283	3	15	1866
1239	7	6	1823	1284*	7	4	1867
1240*	4	25 Aug.	1824*	1285	5	23 Apr.	1868*
1241	2	15	1825	1286*	2	12	1869
1242	6	4	1826	1287	7	2	1870
1243*	3	24 Jul.	1827	1288	4	22 März	1871
1244	1	13	1828*	1289*	1	10	1872*
1245*	5	2	1829	1290	6	28 Febr.	1873
1246	3	22 Jun.	1830	1291	3	17	1874

Jahr der Hedschra	0 Moharrem Wch.	Monatstag	J. n. Chr.	Jahr der Hedschra	0 Moharrem Wch.	Monatstag	J. n. Chr.
1292*	7	6 Febr.	1875	1337	1	6 Oct.	1918
1293	5	27 Jan.	1876*	1338*	5	25 Sept.	1919
1294	2	15	1877	1339	3	14	1920*
1295*	6	4	1878	1340	7	3	1921
1296	4	25 Dec.	»	1341*	4	23 Aug.	1922
1297*	1	14	1879	1342	2	13	1923
1298	6	3	1880*	1343	6	1	1924*
1299	3	22 Nov.	1881	1344*	3	21 Jul.	1925
1300*	7	11	1882	1345	1	11	1926
1301	5	1	1883	1346*	5	30 Jun.	1927
1302	2	20 Oct.	1884*	1347	3	19	1928*
1303*	6	9	1885	1348	7	8	1929
1304	4	29 Sept.	1886	1349*	4	28 Mai	1930
1305*	1	18	1887	1350	2	18	1931
1306	6	7	1888*	1351	6	6	1932*
1307	3	27 Aug.	1889	1352*	3	25 Apr.	1933
1308*	7	16	1890	1353	1	15	1934
1309	5	6	1891	1354	5	4	1935
1310	2	25 Jul.	1892*	1355*	2	23 März	1936*
1311*	6	14	1893	1356	7	13	1937
1312	4	4	1894	1357*	4	2	1938
1313	1	23 Jun.	1895	1358	2	20 Febr.	1939
1314*	5	11	1896*	1359	6	9	1940*
1315	3	1	1897	1360*	3	28 Jan.	1941
1316*	7	21 Mai	1898	1361	1	18	1942
1317	5	11	1899	1362	5	7	1943
1318	2	30 Apr.	**1900**	1363*	2	27 Dec.	»
1319*	6	19	1901	1364	7	16	1944*
1320	4	9	1902	1365*	4	5	1945
1321	1	29 März	1903	1366	2	25 Nov.	1946
1322*	5	17	1904*	1367	6	14	1947
1323	3	7	1905	1368*	3	2	1948*
1324	7	24 Febr.	1906	1369	1	23 Oct.	1949
1325*	4	13	1907	1370	5	12	1950
1326	2	3	1908*	1371*	2	1	1951
1327*	6	22 Jan.	1909	1372	7	20 Sept.	1952*
1328	4	12	1910	1373	4	9	1953
1329	1	1	1911	1374*	1	29 Aug.	1954
1330*	5	21 Dec.	»	1375	6	19	1955
1331	3	10	1912*	1376*	3	7	1956*
1332	7	29 Nov.	1913	1377	1	28 Jul.	1957
1333*	4	18	1914	1378	5	17	1958
1334	2	8	1915	1379*	2	6	1959
1335*	6	27 Oct.	1916*	1380	7	25 Jun.	1960*
1336	4	17	1917	1381	4	14	1961

Tafel 2.

Zusammenstellung der mohammedanischen Monatanfänge.

0 Moharrem	0 Safer	0 Rebi el-ewwel	0 Rebi el-achir	0 Dschumadi el-ewwel	0 Dschumadi el achir	0 Redscheb	0 Schaban	0 Ramadan	0 Schewwal	0 Dsu 'l kade	0 Dsu 'l hedsche
1 Jan.	31 Jan.	1 Mrz *	31 Mrz *	29 Apr. *	29 Mai *	27 Juni *	27 Juli *	25 Aug. *	24 Sep. *	23 Oct. *	22 Nov.
11	10 Feb.	11 *	10 Apr. *	9 Mai *	8 Juni *	7 Juli *	6 Aug. *	4 Sep. *	4 Oct. *	2 Nov. *	2 Dec.
21	20	21 *	20 *	19 *	18 *	17 *	16 *	14 *	14 *	12 *	12
1 Feb.	3 Mrz *	1 Apr. *	1 Mai *	30 *	29 *	28 *	27 *	25 *	25 *	23 *	23
11	13 *	11 *	11 *	9 Juni *	9 Juli *	7 Aug. *	6 Sep. *	5 Oct. *	4 Nov. *	3 Dec. *	2 Jan.
21	23 *	21 *	21 *	19 *	19 *	17 *	16 *	15 *	14 *	13 *	12
1 Mrz	31	29	29	27	27	25	24	23	22	21	20
11	10 Apr.	9 Mai	8 Juni	7 Juli	6 Aug.	4 Sep.	4 Oct.	2 Nov.	2 Dec.	31	30
21	20	19	18	17	16	14	14	12	12	10 Jan.	9 Feb.
1 Apr.	1 Mai	30	29	28	27	25	25	23	23	21	20
11	11	9 Juni	9 Juli	7 Aug.	6 Sep.	5 Oct.	4 Nov.	3 Dec.	2 Jan.	31	2 Mrz
21	21	19	19	17	16	15	14	13	12	10 Feb.	12
1 Mai	31	29	29	27	26	25	24	23	22	20	22
11	10 Juni	9 Juli	8 Aug.	6 Sep.	6 Oct.	4 Nov.	4 Dec.	2 Jan.	1 Feb.	2 Mrz *	1 Apr.
21	20	19	18	16	16	14	14	12	11	12 *	11
1 Juni	1 Juli	30	29	27	27	25	25	23	22	23 *	22
11	11	9 Aug.	8 Sep.	7 Oct.	6 Nov.	5 Dec.	4 Jan.	2 Feb.	4 Mrz *	2 Apr. *	2 Mai
21	21	19	18	17	16	15	14	12	14 *	12 *	12
1 Juli	31	29	28	27	26	25	24	22	24 *	22 *	22
11	10 Aug.	8 Sep.	8 Oct.	6 Nov.	6 Dec.	4 Jan.	3 Feb.	4 Mrz *	3 Apr. *	2 Mai *	1 Jun
21	20	18	18	16	16	14	13	14 *	13 *	12 *	11
1 Aug.	31	29	29	27	27	25	24	25 *	24 *	23 *	22
11	10 Sep.	9 Oct.	8 Nov.	7 Dec.	6 Jan.	4 Feb.	6 Mrz *	4 Apr. *	4 Mai *	2 Juni *	2 Juli
21	20	19	18	17	16	14	16 *	14 *	14 *	12 *	12
1 Sep.	1 Oct.	30	29	28	27	25	27 *	25 *	25 *	23 *	23
11	11	9 Nov.	9 Dec.	7 Jan.	6 Feb.	7 Mrz *	6 Apr. *	5 Mai *	4 Juni *	3 Juli *	2 Aug
21	21	19	19	17	16	17 *	16 *	15 *	14 *	13 *	12
1 Oct.	31	29	29	27	26	27 *	26 *	25 *	24 *	23 *	22
11	10 Nov.	9 Dec.	8 Jan.	6 Feb.	8 Mrz *	6 Apr. *	6 Mai *	4 Juni *	4 Juli *	2 Aug. *	1 Sep
21	20	19	18	16	18 *	16 *	16 *	14 *	14 *	12 *	11
1 Nov.	1 Dec.	30	29	27	29 *	27 *	27 *	25 *	25 *	23 *	22
11	11	9 Jan.	8 Feb.	9 Mrz *	8 Apr. *	7 Mai *	6 Juni *	5 Juli *	4 Aug. *	2 Sep. *	2 Oct.
21	21	19	18	19 *	18 *	17 *	16 *	15 *	14 *	12 *	12
1 Dec.	31	29	28	29 *	28 *	27 *	26 *	25 *	24 *	22 *	22
11	10 Jan.	8 Feb.	10 Mrz *	8 Apr. *	8 Mai *	6 Juni *	6 Juli *	4 Aug. *	3 Sep. *	2 Oct. *	1 Nov
21	20	18	20 *	18 *	18 *	16 *	16 *	14 *	13 *	12 *	11

In christlichen Schaltjahren gilt statt jedes mit einem * bezeichneten Tag

B. Von den Arabern gebrauchte fremde Zeitrechnungen nach dem Sonnenlaufe.

221.

Als die Araber ihre Grenzen überschreitend mit gebildeteren Völkern in Berührung kamen und allmälig selbst zu einer höheren bürgerlichen und wissenschaftlichen Entwicklung gelangten, waren sie bald genöthigt, neben ihrem wandelbaren Mondjahre eine feste, nach der Sonne geregelte, Zeitrechnung zu gebrauchen. Sie nahmen daher das julianische Jahr in den beiden im Oriente gebräuchlichen Formen, der syrischen und alexandrinischen, an.

1. Syrisch-julianische Jahrform bei den Arabern.

Bei den Arabern lauten die syrischen Monate — **schuhûr el-rûm**, Monate der Römer — und sind den römischen parallel wie folgt:

	Syro-arabische Monate.	Entsprechende julianisch-römische.	Tage.	Nullter Monatstag.
1)	**Tischrin el-ewwel**	October	31	0
2)	**Tischrin el-achir**	November	30	31
3)	**Kanun el-ewwel**	December	31	61
4)	**Kanun el-achir**	Januar	31	92
5)	**Schebat**	Februar	28 + i	123
6)	**Adar** oder **Adsar**	März	31	151 + i
7)	**Nisan**	April	30	182 + i
8)	**Ijar** oder **Ajar**	Mai	31	212 + i
9)	**Haziran**	Juni	30	243 + i
10)	**Tamuz**	Juli	31	273 + i
11)	**Ahb**	August	31	304 + i
12)	**Elul.**	September.	30	335 + i

Der Parallelismus der Monate besteht jedoch nur nach dem alten oder julianischen Kalender, der neue oder gregorianische ist den Morgenländern fremd.

2. Alexandrinische Jahrform bei den Arabern.

Die Namen der Monate, welche die Araber von den, durch sie unterjochten, neueren Aegyptern, den Kopten — **kebt** — annahmen und welche sie **schuhûr el-kebt** nennen, werden von ihnen auf folgende Weise entstellt.

	Alexandrinisch-arabische Monate	Aegyptische Monate.	Tage.	Nullter Monatstag.
1)	Tut	Thot	30	0
2)	Babe	Phaophi	30	30
3)	Hatur	Athyr	30	60
4)	Kihak	Chöak	30	90
5)	Tube	Tybi	30	120
6)	Amschir	Mechir	30	150
7)	Bermehat	Phamenoth	30	180
8)	Bermude	Pharmuthi	30	210
9)	Baschons	Pachon	30	240
10)	Bune	Payni	30	270
11)	Abib	Epiphi	30	300
12)	Mesri	Mesori	30	330
13)	Abugomena.	Epagomenae.	5+1	360.

Die Ergänzungstage nennen die Araber auch, nach den Kopten, el schehr el-saghir, den kleinen Monat.

222.

Fremde Aeren bei den Arabern.

Zugleich mit den Monaten der Syrer verbinden die Araber die Hauptäre derselben, die seleukidische, welche sie tarich el-rum, römische Aere, oder tarich Iskender, Aere Alexander's, oder tarich dsi 'l-karnain, Aere des Zweigehörnten nennen. Die alexandrinischen Jahre zählen sie ferner, gleich den Kopten, nach der diocletianischen Aere, welche sie tarich el-kebt, Aere der Kopten, oder tarich dikletjanus, Aere des Diocletian, nennen.

C. Zeitrechnung der Türken.

223.

In der türkischen Zeitrechnung hat man eben so wie in der arabischen, mit der sie im Wesentlichen völlig übereinstimmt, den Volkskalender von dem der Gebildeteren zu unterscheiden, welche nicht blos die Zeitrechnung der arabischen Astronomen nach dem Mondlaufe, sondern auch die orientalisch-christliche nach dem Sonnenlaufe angeordnete gebrauchen.

Den Tag fangen die Türken gleichfalls bei dem Untergange der Sonne an und theilen ihn, nach europäischer Weise, in 24 Stunden, die sie in zwei Absätzen bis je 12 zählen und durch Zusatz der persischen Wörter scheb, Nacht, und rus, Tag, unterscheiden.

Die Woche gebrauchen sie, wie die Juden und Christen, und geben den einzelnen Tagen derselben die arabischen Namen:

1)	Ahad	Sonntag
2)	Esnain	Montag
3)	Salasa	Dinstag
4)	Erbua	Mittwoch
5)	Chamis	Donnerstag
6)	Dschuma	Freitag
7)	Sebt.	Samstag.

Das Mondjahr der Türken ist ganz das arabische, nur lauten ihre Monatsnamen etwas anders, nemlich also:

	Türkische Mondmonate.	Tage.	Nullter Monatstag.
1)	Muharrem	30	0
2)	Safer	29	30
3)	Rebiül-ewwel	30	59
4)	Rebiül-achir	29	89
5)	Dschemasiül-ewwel	30	118
6)	Dschemasiül-achir	29	148
7)	Redscheb	30	177
8)	Schaban	29	207
9)	Ramasan	30	236
10)	Schewal	29	266
11)	Ssilkade	30	295
12)	Ssilhidsche	29 + e	325

Die Mondjahre zählen sie, eben so wie alle Moslemen, nach der Hedschra, der Aere von Mohammed's Flucht.

224.

Das Sonnenjahr entlehnten die Türken von den orientalischen Christen. Ihre Sonnenmonate sind den julianisch-römischen oder christlichen ganz parallel gestellt, nur fangen sie das Jahr, vernünftiger als wir, mit dem März an, damit ihnen der Schalttag an das Ende des Jahres falle. Ihr Schaltjahr endigt sich demnach am 29 Februar des julianischen Schaltjahres.

Die türkischen Namen der Sonnenmonate sind theils den römischen theils den syrischen nachgebildet, und lauten wie folgt:

Türkische Sonnenmonate.	Uebereinstimmende julianische.	Tage.	Nullter Monatstag.
1) Azer oder Mart	März	31	0
2) Nissan	April	30	31
3) Ajar oder Maïs	Mai	31	61
4) Hasiran	Juni	30	92
5) Timus	Juli	31	122
6) Ab oder Agustus	August	31	153
7) Eilul	September	30	184
8) Teschrini-ewwel	October	31	214
9) Teschrini-sani	November	30	245
10) Kianuni-ewwel	December	31	275
11) Kianuni-sani	Januar	31	306
12) Schubat.	Februar.	28 + i	337

Die Sonnenjahre zählen sie nur in dem Verkehr mit den Christen nach der dionysisch-christlichen Aere seit Christi Geburt, sonst bezeichnen sie selbe durch Angabe derjenigen Jahre der Hedschra, in denen sie anfangen. Ihre Schriftsteller bedienen sich auch zuweilen der seleukidischen Aere — tarichi iskienderi rumi.

D. Fest- und Fasttage der Mohammedaner.

225.

Die vorzüglichsten unter den mohammedanischen Fest- und Fasttagen, welche durchgehends an bestimmten Monatstagen haften, sind folgende:

Moharrem.

1. Neujahrstag.
10. Aschura oder Gedächtniß der Ermordung Hußeins, eines persischen Imans. (Dieses Fest dauert in Persien 10 Tage.)
16. Jerusalem wird zur Kibla erklärt.

Safer.

29. Trompetenfest oder Fest der Welten.

Rebi el-ewwel.

8. Medina wird zur Residenz erklärt.
11. Heilige Nacht.
12. Geburt Mohammed's.
23. Todestag Mohammed's.

Dschumadi el-ewwel.

8. Ali's Geburtstag.
15. Ali's Sterbetag.
20. Eroberung Constantinopels durch Mohammed II. (1453 n. Chr.)

Dschumadi el-achir.

1. Gabriel erscheint dem Propheten.
9. Geburtstag des Ebubeker, des siebenten Imans.
20. Geburtstag Fatima's, der Tochter Mohammed's.

Redscheb.

1. Bau der Arche Noa's.
4. Nacht der Geheimnisse.
28. Mohammed erhält das Prophetenthum.
29. Nacht der Himmelfahrt.

Schaban.

3. Geburtstag Hußein's.
15. Nacht der Prüfung, wo der Koran vom Himmel kam und von den Engeln die Thaten der Menschen in das große Buch der Welten verzeichnet werden.
16. Mekka wird zur Kaaba erklärt.

Ramadan.

Diesen ganzen Monat wird am Tage gefastet.

3. Das Buch, welches Abraham empfing, steigt vom Himmel nieder.
4. Der Koran wird der Welt gesandt.
7. Die Tora (5 Bücher Mosis) steigt vom Himmel herab.
18. Das Evangelium Jesu wird der Welt gesandt.
27. Nacht der Allmacht, wo dem Propheten die erste Offenbarung zu Theil wurde. Wunder der Mondspaltung.
29. Trauertag wegen der Niederlage vor Wien unter Kara Mustapha. (11 Sept. 1683.)

Schewwal.

1. 2. 3. } Großer Beiram, oder Ende der Fasten des Ramadan, das größte Fest der Türken.
7. Todestag des Hamsa, eines Martyrers.
16. Gedächtnißtag der Schlacht bei Ohud, die Mohammed seinem eigenen Stamme lieferte.

Dsu 'l-kade.

1. Moses versprach, 30 Tage zu fasten.
4. Die Siebenschläfer gingen in ihre Höhle.
5. Abraham baut die Kaaba.
7. Durchzug des Moses durch den Nil.

Dsu 'l-hedsche.

8. Offenbarung; der Prophet hört das erste Mal die Stimme Gottes.
10. Opfertag. Der kleine Beiram. Fällt er auf einen Freitag — **Dschuma** —, so heißt er **hadschal ekber**, der allergrößte.
18. Fest des Teiches, an welchem Mohammed das Kalifat an Ali abtrat. (Wird nur von den Persern gefeiert.)
22. Friedensfest.
25. Zurückgabe von Ali's Ring an einen Armen.

Außer diesen Festen, zu denen noch eine große Anzahl kleinerer gehört, gelten der 13., 14. und 15. Tag jedes Monates als g l ü c k l i c h e T a g e; und sämmtliche Freitage — **Dschuma** — werden, wie bei uns die Sonntage, gefeiert.

Achter Abschnitt.

Zeitrechnung der Perser.

A. Aeltere persische Zeitrechnung nach Sonnenjahren.

226.

Eine eigenthümliche Zeitrechnung bestand bei den Persern nur in der früheren Periode ihrer Selbständigkeit von der Mitte des sechsten Jahrhundertes vor Chr. bis zur Mitte des siebenten Jahrhunderts n. Chr. Sie empfiehlt sich durch besondere Einfachheit und wurde von den meisten arab. Astronomen gebraucht.

Den Anfang des bürgerlichen Tages setzten die alten Perser ohne Zweifel, wie ihre Nachbarn die Babylonier, auf den Sonnenaufgang.

Die Woche, welche bei den semitischen Völkern im Gebrauche stand und von ihnen zu den übrigen Völkern überging, war den Persern unbekannt.

227.

Jahrform.

Das Jahr der alten Perser war das altägyptische bewegliche Sonnenjahr von durchweg 365 Tagen, die in 12 dreißigtägige Monate mit 5 Ergänzungstagen — von den Arabern **el-musterake**, und von den Persern in gleichem Sinne **pendscheï düsdide**, die fünf verstohlenen Tage genannt — abgetheilt waren. Anfänglich standen diese Ergänzungstage zwischen dem achten und neunten Monate, später aber (1006 n. Chr.) wurden sie an den Schluß des Jahres versetzt.

Darnach war die altpersische Jahrform folgende:

Monate.	Nullter Tag.	Monate.	Nullter Tag. früher	Nullter Tag. später
1) **Ferwerdin**	0			
2) **Erdibihischt**	30	Ergänzungstage	240	
3) **Chordad**	60	9) **Aser**	245	240
4) **Tir**	90	10) **Dei**	275	270
5) **Murdad**	120	11) **Behmen**	305	300
6) **Schehriwer**	150	12) **Sipendarmed**	335	330
7) **Mihr**	180	Ergänzungstage		360
8) **Aban**	210			

Den einzelnen Monatstagen legten sie statt der Zahlen folgende besondere Namen auf:

1) Ormusd	11) Chor	21) Ram
2) Behmen	12) Mah	22) Bad
3) Erdibihischt	13) Tir	23) Dei be Din
4) Schehriwer	14) Gusch	24) Din
5) Sipendarmed	15) Dei be Mihr	25) Arad
6) Chordad	16) Mihr	26) Eschtad
7) Murdad	17) Surusch	27) Asüman
8) Dei be Aser	18) Resch	28) Semiad
9) Aser	19) Ferwerdin	29) Maraspend
10) Aban	20) Behram	30) Eniran.

Da hierunter auch die Monatsnamen vorkommen, so unterschied man solche durch die Zusäze mah, Monat, und rus, Tag; z. B. Ferwerdinmah bezeichnet den ersten Monat, Ferwerdinrus dagegen den neunzehnten Tag im Monate.

Die Ergänzungstage führten einzeln folgende Namen:

1) Ahnud
2) Aschnud
3) Isfendmed
4) Echschuter
5) Wehescht.

228.

Jahrrechnung.

Die orientalischen Astronomen bedienen sich, so oft sie nach der persischen Zeitrechnung datiren, der jesdegirdischen Aere tarich Jesdegird, welche auch die persische — tarich el-fars — genannt wird. Ihre Epoche trifft auf einen Dinstag, und zwar auf den ersten Tag des Jahres, worin Jesdegird, der lezte Sassanide, König geworden war, nemlich auf den 22 Rebi el-ewwel des Jahres 11 der Hedschra, oder auf den 16 Hasiran des Jahres 943 der Seleukiden, wofür die Reduction den 16 Junius 632 n. Chr. oder 6140 der byzantinischen Weltäre gibt. Die jesdegirdische Aere beginnt daher nach einem zweiten Wochentage (Montage) um 2242558 Tage später als die byzantinische Aere.

229.

Ausführliche Betrachtung der jesdegirdischen Aere.

Die auf diese Aere beziehlichen Rechnungen stimmen mit den bei der nabonassarischen Aere (§. 132 bis 135) erörterten überein,

I. So wie dort, ist demnach auch hier, bei der späteren Stellung der Ergänzungstage durchgängig, bei der früheren bis an den 9ten Monat, jedesmal der t^{te} Tag im m^{ten} Monate

$$\text{der } d = 30(m-1) + t^{te} \text{ Tag im Jahre}$$

und umgekehrt fällt der d^{te} Tag des Jahres

in den Monat $m = \mathfrak{Q}\frac{d}{30} + 1$

auf dessen Tag $t = \mathfrak{R}\frac{d}{30}$.

Bei dieser Vergleichung der Monats- und Jahrstage muß man jedoch wissen, ob der Astronom, der ein persisches Datum angibt, die Ergänzungstage ans Ende des achten oder zwölften Monates sezt. Von Ibn Junis gilt das Erste.

II. Der d^{te} Tag im Jahre a seit Jesdegird ist demnach in der Aere selbst der Tag

$$(372) \qquad n = 365(a-1) + d.$$

Umgekehrt fällt der n^{te} Tag der Aere in

das Jahr $a = \mathfrak{Q}\frac{n}{365} + 1$

auf den Tag $d = \mathfrak{R}\frac{n}{365}$.

III. Dieser Tag trifft, weil die Aere mit einem Dinstag anfängt, auf den Wochentag

$$(373) \qquad h \equiv n + 2, \text{ mod } 7$$
$$\equiv a + d + 1 \equiv a + 2m + t - 1.$$

230.

Fortsezung. Zurückführung eines Datums der jesdegirdischen Aere auf die christliche.

Da die jesdegirdische Aere um $2242558 = g$ Tage nach der byzantinischen anfängt, so trifft, nach §. 56, (90), der d^{te} Tag des jesdegirdischen Jahres a in das Jahr n. Chr.

$$(374) \qquad a' = a + 631 - \Delta a$$

und auf den Tag

$$(375) \qquad d' = d + 166 - \mathfrak{q}\frac{a-2-\Delta a}{4} + 365\,\Delta a = 1, 2, 3, \ldots 365 \text{ o. } 366$$

oder nach §. 56, (91), wenn man abkürzend

$$(376) \qquad 4d + 666 - a = c \text{ sezt,}$$

in das Jahr n. Chr.

$$(377) \qquad a' = a + 631 + \mathfrak{Q}\frac{c}{1461}$$

auf den Tag

$$(378) \qquad d' = \left(\mathfrak{R}\frac{c}{1461} + \mathfrak{r}\frac{a'-1}{4}\right) : 4.$$

Beispiel. 1. Ibn Junis vergleicht den Samstag den 29 Schewwal 367 der Hedschra, an welchem er die (im Beispiele zu §. 213, 215 u. 218) erwähnte Sonnenfinsterniß beobachtete, auch mit dem 19 Chordadmah des 347sten jesdegirdischen Jahres; mit welchem christlichen Tage stimmt dieser zusammen?

Hier ist $a = 347$, $m = \text{Chordad} = 3$, $t = 19$,
daher $d = 2.30 + 19 = 79$.
Daraus folgt $a \equiv 4$, mod 7, $d \equiv 2$,
und der Wochentag $h \equiv 4 + 2 + 1 \equiv 7$, mod 7 $\equiv$ Samstag.
Ferner ist $a - 2 = 345 = 4.86 + 1$,
mithin $\Delta a = 0$, $a' = 347 + 631 = 978$
und $d' = 79 + 166 - 86 = 159$
$= 159 - 151$ Juni $= 8$ Juni.
Oder $c = 316 + 666 - 347 = 635$,
$a' = 347 + 631 = 978$,
$a' - 1 = 977 \equiv 1$, mod 4,
$d' = (635 + 1) : 4 = 159 = 8$ Juni.

Der angeführte Tag ist demnach Samstag der 8 Juni 978 n. Chr., wie wir auch im Beispiele zu §. 218 gefunden haben.

Beispiel. 2. Derselbe Astronom bemerkt von einer zu Kahira im Schewwal des Jahres 368 der Hedschra beobachteten Mondfinsterniß: „Sie ereignete sich in der Nacht, deren Morgen die fünfte Ferie war — nach arabischer Weise ausgedrückt, in der Nacht der fünften Ferie —. Diese Ferie war der 25 Erdibihischtmah des 348sten jesdegirdischen, der 15 Ijar des 1290sten seleukidischen und der 20 Baschnas (Pachon) des 695sten diocletianischen Jahres." *) Welcher Tag der christlichen Zeitrechnung?

Für die Reduction des persischen Datums ist hier
$a = 348$, $m = \text{Erdibihischt} = 2$, $t = 25$,
also $d = 1.30 + 25 = 55$.
Hieraus folgt $a \equiv 5$, mod 7,
$d \equiv -1$, mod 7,
und Wochentag $h \equiv 5 - 1 + 1 \equiv 5 =$ Donnerstag.
Ferner $a - 2 = 346 = 4.86 + 2$,
daher $\Delta a = 0$
und sonach $a' = 348 + 631 = 979$,
und $d' = 55 + 166 - 86 = 135$
$= 135 - 120$ Mai $= 15$ Mai.

*) Ideler Handbuch 2. Bd. S. 492.

Der syrische Ijar ist = Mai, und das seleukidische Jahr 1290 = Jahr n. Chr. (1290 — 311 =) 979. (§. 173 u. 174). Ferner ist alexandrinischer 20 Pachon = 20 — 5 Mai = 15 Mai, und diocletianisches Jahr 695 = Jahr nach Chr. (695 + 284 =) 979. (§. 139).

Alle diese Data geben daher Donnerstag den 15 Mai 979 nach Chr. Weil jedoch die Beobachtung im Anfange der Nacht angestellt sein soll, so war ihr eigentliches Datum: Mittwoch der 14 Mai 979 Abends.

Verlangt man noch den Tag im arabischen Schewwal, so ist (nach §. 218)

$$a' - 623 = 356, \quad a' - 1 = 978 = 4.244 + 2,$$

$$b' = 3916 + 244 + 135 + 15 = 4310 = 354.12 + 62,$$

daher $a = 357 + 12 - \Delta a,$

sonach $\Delta a = 1, \quad a = 368, \quad e = \mathrm{q}\frac{368+37}{3} = 135$

und $d = 62 - 135 + 354 = 281 = 281 - 266$ Schewwal $= 15$ Schewwal.

Die Mondfinsterniß trat demnach zu Anfang des 15 Schewwal ein, was gut mit dem Himmel übereinstimmt, da selbe nur im Vollmonde eintreffen kann, der am 15 Tage des mit der Conjunction beginnenden Mondmonates eintritt.

231.

Fortsetzung. Reduction eines christlichen Datums auf die jesdegirdische Aere.

Aus den vorigen Gleichungen erschließt man leicht, daß umgekehrt der d'^{te} Tag des Jahres a' nach Chr. in das jesdegirdische Jahr

$$(379) \qquad a = a' - 632 + \Delta a$$

und auf den Tag

$$(380) \qquad d = d' + \mathrm{q}\frac{a'-1}{4} + 41 - 365\Delta a = 1, 2, \ldots 365$$

trifft. Oder setzt man

$$(381) \qquad d' + \mathrm{q}\frac{a'-1}{4} + 41 = c',$$

so trifft der angegebene Tag in das Jahr

$$(382) \qquad a = a' - 632 + \mathrm{Q}\frac{c'}{365}$$

und auf dessen Tag

$$(383) \qquad d = \mathrm{R}\frac{c'}{365}.$$

Beispiel. Ibn Junis beobachtete zu Kahira eine Conjunction des Jupiter und Saturn Freitags den 23 Safer des Jahres 398 der Hedschra, den 28 Abanmah des Jahres 376 des Jesdegird, den 7 Tischrin el-achir

des Jahres 1319 des Zweigehörnten und den 10 Hatur des Jahres 724 des Diocletian. *)

Hier ist syro-arabischer Tischrin el-achir = November, und Jahr 1319 des Zweigehörnten oder des Seleukus = Jahr n. Chr. (1319 — 312 =) 1007. (§. 173, 174 und 221, 1.) Ferner beginnt das diocletianische Jahr 724 im Jahre 724 + 283 = 1007 nach Chr., und endet im Jahre 1008, welches i = 1 Schalttag hat; daher ist 10 alexandrinisch-arabischer Hatur = 10 alexandrinischer Athyr = 10 + 1 — 4 Nov. = 7 November. (§. 221, 2.) Denselben 7 November 1007 nach Chr. gibt auch das angeführte arabische Datum nach §. 216. Will man ihn in die persische Zeitrechnung übersetzen, so ist

$$a' = 1007, \quad d' = 7 \text{ Nov.} = 311,$$

folglich

$$c' = 311 + 251 + 41 = 603 = 365 . 1 + 238,$$

und sonach jesdegirdisches Jahr

$$a = 1007 - 632 + 1 = 376,$$

und Tag

$$d = 238 = 238 - 210 \text{ Aban} = 28 \text{ Aban},$$

genau wie Ibn Junis datirt.

232.

Fortsetzung. Bestimmung der jesdegirdischen Jahre, welche in einem Jahre nach Christi Geburt mit einander abwechseln.

Der 0 Januar des Jahres a' nach Chr. trifft vermöge §. 34 oder 231 in das jesdegirdische Jahr

$$(384) \qquad a = a' - 632 + \Delta a$$

und auf dessen Tag

$$(385) \qquad d = \mathfrak{E}\frac{a'-1}{4} + 41 - 365\Delta a = 1, 2, \ldots 365,$$

oder, wenn man

$$(386) \qquad \mathfrak{E}\frac{a'-1}{4} + 41 = c'$$

setzt, in das jesdegirdische Jahr

$$(387) \qquad a = a' - 632 + \mathfrak{Q}\frac{c'}{365}$$

und auf den Tag

$$(388) \qquad d = \mathfrak{R}\frac{c'}{365}.$$

Im Jahre a' nach Chr. endigt sich daher das jesdegirdische Jahr a am Tage d' = 365 — d, und beginnt das jesdegirdische Jahr a + 1 am Tage d' + 1 = 366 — d.

*) Ideler Handb. 2. Bd. S. 522.

Beispiel. Welche jesdegirdischen Jahre wechseln im Jahre **1850** nach Chr. ab?

Hier ist $a' = 1850,\ a' - 1 = 1849 = 4 . 462 + 1,$

also $\Delta a = 1,\ a = 1850 - 632 + 1 = 1219$

und $d = 462 + 41 - 365 = 138.$

Daher ist $d' = 365 - 138 = 227 = 227 - 212$ Aug.

$= 15$ Aug. a. St. $= (15 + 12 =) 27$ Aug. n. St.

Im Jahre 1850 nach Chr. endet sich daher das jesdegirdische Jahr **1219** am 27 August n. St. und beginnt das Jahr 1220 am 28 August.

233.

Aeltere persische Einschaltung.

Das Jahr der alten Perser hielt, wie das ursprüngliche der Aegypter, durchgängig und ohne Einschaltung 12 dreißigtägige Monate und 5 Ergänzungstage, welche dem lezten Monate angehängt wurden. Der Anfang des Jahres, der Newrus, den man von jeher festlich beging, sollte beständig auf den Frühling treffen. Da man nun fand, daß er mit Bezug auf die Nachtgleichen alle 120 Jahre um etwa 30 Tage zurückwich, so schob man ihn nach Verlauf dieses Zeitraumes um einen Monat vorwärts, so daß er jezt auf den Ferwerdinmah, nach 120 Jahren auf den Erdibihischtmah u. s. w. traf. Das Jahr, das der Versezung zunächst voranging, hatte sonach 13 Monate, indem es mit einerlei Monat, z. B. dem Ferwerdinmah, anfing und endigte. Dabei gingen die fünf Ergänzungstage immer unmittelbar vor dem Newrus her und schritten mit ihm von einem Monate zum anderen vor.

Als im Jahre 636 nach Chr. die Mohammedaner mit der Herrschaft der Sassaniden die Religion der Magier vernichteten, haftete der Newrus auf dem Asermah und die Ergänzungstage folgten dem Abanmah. Die wenigen ihrer Religion treu gebliebenen Perser bedienten sich zwar noch immer der alten Zeitrechnung, ohne jedoch auf eine richtige Verschiebung des Newrus bedacht zu sein. Zugleich zählten sie die Jahre von der Thronbesteigung ihres lezten Königs Jesdegird, die am ersten Tage des Ferwerdinmah Statt gehabt haben soll. Dieser Monat, als der erste der Aere, wurde nun zugleich als der erste des Jahres angesehen, was er bei der früheren Wandelbarkeit des Newrus seit Jahrhunderten nicht gewesen war.

Als nachher die Araber sich der Astronomie befleißigten, fanden sie das wandelbare persische Jahr mit der jesdegirdischen Aere sehr bequem zu ihren Berechnungen, und sie bedienten sich desselben um so lieber, als Ptolomäus, ihr Lehrer, die ganz ähnliche ägyptische Zeitrechnung gebraucht hatte und die nabonassarische Aere für sie von keiner Bedeutsamkeit war. Anfangs ließen sie

die Ergänzungstage an der Stelle, wo sie dieselben vorfanden. Erst im 375. Jahre seit Jesdegird oder 1006 nach Chr., wo der 1 **Ferwerdinmah** auf die Frühlingsnachtgleiche traf, die damals dem 15 julianischen März entsprach, vereinigten sich die Astronomen dahin, die Ergänzungstage an das Ende des **Sipendarmedmah** zu setzen, den man seit Jesdegird als den letzten Monat im Jahre anzusehen gewohnt war.*)

B. Dschelalische Zeitrechnung nach festen Sonnenjahren.

234.

Jahresanfang und Jahrform.

Im Jahre 448 nach Jesdegird endlich, oder 1079 nach Chr., wo die Frühlingsnachtgleiche bereits auf den 19 **Ferwerdinmah** traf, erneuerte der Sultan Dschelal-Eddin Melek-Schah, der dritte aus dem Geschlechte der Seldschuken, welcher im Jahre 1072 nach Chr. zur Regierung kam und sie durch 20 Jahre glorreich führte, das alte Newrus-Fest, und setzte es auf den Tag der Frühlingsnachtgleiche selbst, da es ursprünglich nicht gerade an demselben, sondern nur in dessen Nähe gefeiert worden war. Zugleich führte er, auf die Berathung mit acht Astronomen, eine chronologisch merkwürdige Schaltrechnung ein, durch die das Neujahrsfest oder der Jahrsanfang auf diesen Zeitpunkt und zugleich auf den Anfang des **Ferwerdinmah** befestigt blieb.

Auf diese Weise wurden die Jahre zu wahren Sonnenjahren gemacht. Auch behielt man die durchweg gleiche 30tägige Dauer der 12 Monate mit den 5 Ergänzungstagen, denen von Zeit zu Zeit noch ein sechster angehängt wurde, und ihre Namen bei. So kommt demnach die Jahrform, wenn man von dem Schalttage absieht, mit der alten persischen überein. Zum Unterschiede fügt man den Benennungen der Monate und Tage die Wörter **kadim** alt und **dschelali** bei, und nennt die ganze Zeitrechnung die **meliki** oder **sultani**, die königliche, auch die dschelal-eddinische oder dschelalische.

235.

Jahrrechnung.

Zur Epoche der Jahrrechnung seit Dschelal-eddin oder zum 1 **Ferwerdinmah dschelali** des ersten Jahres dieser Zeitrechnung wählten seine Astronomen einen Tag, mit dessen Anfang, also beim Aufgange der Sonne, oder um 6 Uhr unserer Zählung, die Sonne zum Frühlingspunkt gelangt ist. Dieser Tag war Freitag der 10 **Ramadan** 471 der **Hedschra**, oder der 15 **Adar**

*) Ideler Lehrb. S. 495.

1390 der seleukidischen Aere, oder endlich der 19 **Ferwerdinmah** 448 seit Jesdegird, d. i. der 15 März 1079 n. Chr. oder 6587 der byzant. Weltäre. An diesem Tage trat wirklich, nach Ideler's Berechnung, zu Ispahan, der Residenz der seldschukischen Sultane, die Frühlingsnachtgleiche um 6 Uhr 31′ m. Z. Morgens, bald nach dem Aufgange der Sonne, ein. Die dschelalische Aere beginnt demnach, wenn man bei ihrer Vergleichung mit anderen Aeren den Anfang des persischen Tages vom Sonnenaufgange auf die nächst vorhergehende Mitternacht verlegt, nach einem fünften Wochentage (Donnerstage) um 2405731 Tage später als die byzantinische Weltäre.

236.

Schaltrechnung.

Der Anfang des dschelalischen Jahres, der **newrus dschelali**, wurde, so weit die Schriften der mittelalterlichen orientalischen Astronomen Kotb-eddin, Schah Choldschi und Ulugbeg *) darüber Aufklärung geben, höchst wahrscheinlich nicht astronomisch berechnet, sondern durch eine kyklische Einschaltung bestimmt. Der Hauptgedanke, welcher dieser zum Grunde lag, war, daß man wegen des Vierteltages, um den das Sonnenjahr höchst nahe länger als 365 Tage ist, zwar in der Regel, wie in der julianischen Schaltrechnung, nach je 4 Jahren, jedoch, weil dieser Ueberschuß beiläufig um den 130. Theil eines Tages weniger als einen Vierteltag beträgt, zuweilen erst nach dem 5. Jahre, einen Tag einschaltete. (Vergl. §. 19.) Wie jedoch diese 5jährigen Schaltkreise in jene 4jährigen eingeflochten wurden, läßt sich leider, nach den wenigen auf uns gekommenen Notizen, nicht mit Sicherheit entscheiden. Kotb-eddin sagt nemlich darüber: „Man ist darin übereingekommen, daß die Einschaltung eines Tages, wenn sie sieben oder achtmal hinter einander im vierten Jahre Statt gefunden, einmal auf das fünfte treffen soll." Schah Choldschi drückt sich eben so aus. Ulugbeg dagegen spricht von einer sechs- oder siebenmal nach vier Jahren zu wiederholenden Einschaltung. Hieraus erfährt man nur, daß $7.4+1.5=33$jährige Schaltkykel zu $7+1=8$ Schalttagen entweder mit $8.4+1.5=37$jährigen Schaltkykeln zu $8+1=9$ Schalttagen oder mit $6.4+1.5=29$jährigen Schaltkykeln zu $6+1=7$ Schalttagen abwechselten; welche aber und wie viele von jeder Art, wird nirgends gesagt.

---

*) Ulugbeg, Beherrscher von Persien, der im J. 1430 in Samarkand, der Hauptstadt seines Reiches, eine Sternwarte erbaute und sie mit den besten Instrumenten seiner Zeit versah, mit denen er selbst beobachtete, hinterließ ein astronomisches Werk, das unter dem Titel **Epochae celebriores**, 1650, von Greaves übersetzt wurde.

237.

Fortsezung. Schaltperioden.

Mit einiger Wahrscheinlichkeit läßt sich darüber aus der von Ulugbeg angegebenen mittleren Länge des dschelalischen Jahres, zu 365 Tagen nebst 14 Sexagesimaltheilen der ersten, 33 der zweiten, 7 der dritten und 32 der vierten Ordnung, *) entscheiden. Der Ueberschuß dieses mittleren Jahres über 365 Tage in gewöhnlichen Brüchen des Tages ausgedrückt ist daher

$$=\frac{14}{60}+\frac{33}{60^2}+\frac{7}{60^3}+\frac{3}{60^4}=\frac{3143252}{12960000}=\frac{785813}{3240000}.$$

Hätten nun die dschelalischen Astronomen x der 33jährigen Schaltkykel mit y der 29jährigen in eine $33x+29y$jährige Schaltperiode zu $8x+7y$ Schalttagen verbunden; so überträfe ihr mittleres Jahr das 365tägige um $\frac{8x+7y}{33x+29y}$ Tage, und es müßte

$$\frac{8x+7y}{33x+29y}=\frac{785813}{3240000}$$

sein. Daraus würde nach der Lehre von den Proportionen und der Gleichheit mehrerer Verhältnisse folgen

$$\frac{8x+7y}{785813}=\frac{33x+29y}{3240000}=\frac{x+y}{96748}=\frac{x}{108577}=\frac{y}{-11829}.$$

Diese Gleichheit bestände demnach hier nur dann, wenn die Zahlen x und y einander entgegengesezt, die eine positiv, die andere negativ, wären; was doch vermöge der Bedeutung oder Natur dieser Zahlen keineswegs Statt finden kann. Die von Ulugbeg angegebene mittlere Länge des dschelalischen Jahres läßt daher keine Zusammenstellung 33jähriger Schaltkykel mit 29jährigen zu.

Wohl aber gestattet sie, 33jährige Schaltkykel mit 37jährigen zu verknüpfen. Denn in diesem Falle treten oben an die Stellen der Zahlen 29 und 7 die Zahlen 33 und 9, wofern man jezt y der 37jährigen Schaltkykel nimmt; und man erhält die Bestimmungsgleichung

$$\frac{8x+9y}{33x+37y}=\frac{785813}{3240000}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{8x+9y}{785813}=\frac{33x+37y}{3240000}=\frac{x+y}{96748}=\frac{y}{11829}=\frac{x}{84919},$$

mithin

$$\frac{y}{x}=\frac{11829}{84919}.$$

Verwandelt man diesen Bruch in einen zusammenhängenden, so sind die nach einander folgenden Theilnenner 7, 5, 1, ... und die ihnen entsprechenden Näherungsbrüche $\frac{1}{7}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{6}{43}$, ..., zu denen vor dem ersten noch die

---

*) Ideler Handb. Bd. 2. S. 532.

eingeschalteten oder Zwischenbrüche $\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}$ genommen werden können. Nimmt man für den vorliegenden Zweck den durch die kleinsten Zahlen dargestellten Näherungsbruch $\frac{1}{7}$, so ist $x = 7$ und $y = 1$. Demnach könnte man 7 der 33jährigen Schaltkykel mit einem 37jährigen in eine $7.33 + 37 = 268$jährige Schaltperiode von $7.8 + 1.9 = 65$ Schalttagen zusammengestellt haben. Das mittlere Jahr dieser Periode würde $365\frac{65}{268} = 365 \cdot 2425373$ Taje gehalten haben, während das mittlere dschelalische Jahr $= 365\frac{785813}{3240000} = 365 \cdot 2425349$ Tagen, folglich nur um $0 \cdot 0000024$ Tag kürzer gewesen wäre.

Diese, so wie andere Schaltperioden, deren mittleres Jahr dem dschelalischen nahe kommt, findet man auch, wenn man für den Ueberschuß $\frac{785813}{3240000}$ T. des mittleren dschelalischen Jahres über das 365tägige mit Hilfe der Kettenbrüche, die Näherungsbrüche berechnet. Man findet nemlich dafür die Theilnenner 4, 8, 8, 5, ..., daraus die Näherungswerthe $\frac{1}{4}, \frac{8}{33}, \frac{65}{268}, \ldots$ und von den zwischen den zweiten und dritten Näherungsbruch fallenden Zwischenbrüchen, diejenigen, welche schon genauer als der zweite sind,

$$\frac{1+5.\ 8}{4+5.33} = \frac{41}{169},\quad \frac{1+6.\ 8}{4+6.33} = \frac{49}{169},\quad \frac{1+7.\ 8}{4+7.33} = \frac{57}{235}.$$

Aus all diesem erhellet, daß mit der von Ulugbeg angegebenen mittleren Länge des dschelalischen Jahres die auch von ihm angeführte sechs- oder siebenmalige Einschaltung nach je 4 Jahren im Widerspruche, wohl aber die von Kotb-eddin und Schah Choldschi erwähnte sieben- oder achtmalige Einschaltung im Einklange steht. Die kürzeste möglichst genaue solche Schaltperiode könnte aus vier 33jährigen und einem 37jährigen Schaltkykel, daher aus 169 Jahren mit 41 Schalttagen, bestanden haben. Ihr mittleres Jahr hätte dann $365\frac{41}{169}$ Tage $= 365 \cdot 2426036$ Tage, mithin um $0 \cdot 0000687$ Tag mehr als das dschelalische Jahr enthalten, was in 14500 Jahren einen Fehler von einem ganzen Tage ausmachen würde.

Obschon man aus allen diesen Angaben durchaus nicht mit Sicherheit zu bestimmen vermag, welche Schaltperiode Melek Schah mit seinen Astronomen annahm, so erzählen doch mehrere neueste Schriftsteller der Zeitkunde, er habe blos die allerdings höchst genaue und einfache 33jährige Periode mit 8 Schalttagen gewählt. Da sie jedoch die Quelle, aus der sie diese Nachricht schöpfen, nicht namhaft machen, so kann derselben kein Gewicht beigelegt werden.

238.

Fortsezung. Vertheilung der Schaltjahre.

Es bleibt sonach kein anderer Weg offen, als aus der mittleren Dauer des dschelalischen Jahres, welche Ulugbeg angibt, die Anfänge der dschelalischen Jahre zu berechnen. Dabei kommt es lediglich auf die Kenntniß des Tages an, welchen man als den dschelalischen Newrus festsezte. Dieser ist nach Ulugbeg's

und Schah Choldschi's Versicherung von Melek-Schah's Astronomen also festgestellt worden, daß allemal derjenige bürgerliche Tag, dessen Mittag dem Eintritte der Sonne in den Frühlingspunkt zunächst folgt, oder mit ihm zusammen trifft, für den Newrus genommen werden soll.*)

Nun trat am ersten Tage der dschelalischen Zeitrechnung die Sonne unter dem Meridiane von Ispahan wenige Minuten nach 6 Uhr Morgens, folglich, wenn man diese Minuten vernachlässigt, 18 Stunden oder $\frac{3}{4}$ Tag nach dem nächst vorhergegangenen Mittage in den Frühlingspunkt. Rechnet man daher den Ueberschuß des mittleren dschelalischen Jahres über das 365tägige Jahr zu $\frac{\varepsilon}{\varpi}$ Tagen, so vergehen von diesem Mittage bis zu dem mittleren Eintritte der Frühlingsnachtgleiche des a^{ten} dschelalischen Jahres

$$\text{Tage } \left(365 + \frac{\varepsilon}{\varpi}\right)(a-1) + \frac{3}{4}$$

$$= 365(a-1) + \frac{\varepsilon a - \varepsilon + \frac{3}{4}\varpi}{\varpi}.$$

Jeden in diesem Quotienten sich ergebenden echten Bruch des Tages rechnet man aber, gemäß der Satzung der Astronomen, als einen vollen Tag; folglich hat man bei der Bestimmung der Zahl $N+1$, welche angibt, der wie vielte Tag der dschelalischen Zeitrechnung der 1 Ferwerdinmah oder der Newrus des Jahres a ist, statt jenes Quotienten den oberen Quotus zu nehmen, und erhält daher

$$N+1 = 365(a-1) + q\frac{\varepsilon a + \frac{3}{4}\varpi - \varepsilon}{\varpi} + 1,$$

sonach die Nummer des 0 Ferwerdinmah oder die Anzahl der Tage, welche in der dschelalischen Aere dem Anfange des Jahres a vorangehen,

$$N = 365(a-1) + q\frac{\varepsilon a + \frac{3}{4}\varpi - \varepsilon - 1}{\varpi}.$$

Daraus ergibt sich die Anzahl der dschelalischen Schalttage vor dem Jahre a

$$(389) \qquad e = q\frac{\varepsilon a + \frac{3}{4}\varpi - \varepsilon - 1}{\varpi},$$

weil immer $N = 365(a-1) + e$ sein muß.

Nun ist eigentlich nach Ulugbeg

$$\frac{\varepsilon}{\varpi} = \frac{785813}{3240000} = \frac{78{\cdot}5813}{324},$$

folglich kann $\varpi = 324$ und $\varepsilon = 78{\cdot}5813$ gesetzt werden, und man erhält völlig genau nach diesem Astronomen

$$(390) \qquad e = q\frac{78{\cdot}5813a + 163{\cdot}4187}{324}.$$

*) Schah Choldschi drückt sich so aus: initium veris et neuruz sultanei dies est in cuius meridie sol in arietem ingressus est.

Man darf jedoch in aller nur zu fordernden Strenge

$$\frac{\varepsilon}{\varpi} = \frac{65}{268}$$

sezen, weil $\frac{65}{268}$ Tag nur um 0·0000024 Tag = 0·2″ mehr als $\frac{785813}{3240000}$ Tag beträgt, was sicher kleiner als der wahrscheinliche Beobachtungsfehler ist. Darnach erhält man $\varpi = 268$, $\varepsilon = 65$ und

$$(391) \qquad e = q\frac{65a+135}{268} = q\frac{a+1-q\frac{2(a-1)}{67}}{4}.$$

Dies Jahr a hat demnach für $\Delta a = 1$,

$$(392) \qquad \Delta e = q\frac{65a+200}{268} - q\frac{65a+135}{268} = q\frac{65+r\frac{65a+135}{268}}{268}$$

Schalttage, und ist folglich ein Schaltjahr, so oft

$$r\frac{65a+135}{268} > 202 \text{ ausfällt.}$$

Für diese Schaltjahre hat man demnach

$$r\frac{65a+135}{268} = 268 - z, \quad z = 1, 2, \ldots 65,$$

also $\qquad 65a \equiv 133 - z, \text{ mod } 268$

und weil (Vorbegr. XIX, Beisp. 2)

$$65.33 \equiv 1, \text{ mod } 268 \text{ ist,}$$

$$a \equiv 101 - 33z \equiv 101 + 235z, \text{ mod } 268.$$

Sezt man hierin, da $268 = 33.8 + 4$ ist, $z = 8u + v$, so wird der allgemeine Ausdruck der Schaltjahre

$$a \equiv 101 - 33v + 4u, \text{ mod } 268,$$

worin man $\qquad v = 1, 2 \ldots 8$ und $u = 0, 1, \ldots 8$,

jedoch $\qquad z = 8u + v = 1, 2, \ldots 65$ zu sezen hat,

und sonach folgende 65 Jahre in jeder 268jährigen Periode als Schaltjahre findet:

33jährige	Periode:		2,	6,	10,	14,	18,	22,	26,	30,	
»	»	»	35,	39,	43,	47,	51,	55,	59,	63,	
37	»	»	68,	72,	76,	80,	84,	88,	92,	96,	100,
33	»	»	105,	109,	113,	117,	121,	125,	129,	133,	
»	»	»	138,	142,	146,	150,	154,	158,	162,	166,	
»	»	»	171,	175,	179,	183,	187,	191,	195,	199,	
»	»	»	204,	208,	212,	216,	220,	224,	228,	232,	
»	»	»	237,	241,	245,	249,	253,	257,	261,	265.	

Dieselben Schaltjahre ergeben sich auch, wenn man die mittlere Länge des dschelalischen Jahres wiederholt zu sich selbst addirt, und in der jedesmaligen Summe den Ueberschuß über die vollen Tage entweder, wenn er weniger als die zwischen dem (frühstündigen) Tagesanfange der Perser und dem Mittag

enthaltenen 6 Stunden beträgt, vernachlässigt, oder, wenn er gerade 6 Stunden oder mehr ausmacht, als einen ganzen Tag rechnet, und endlich jede solche Tagsumme von der nachfolgenden abzieht; wornach die Reste die Dauer der nach einander kommenden dschelalischen Jahre angeben.

Daraus erfährt man auch diejenigen Jahre in den kürzeren näherungsweisen Schaltperioden, als in der 169 und 33jährigen, welche man zu Schaltjahren zu machen hätte, und darnach den Ausdruck für die Anzahl e der Schalttage vor dem Jahre a.

Wollte man die kürzeste, der Angabe Kotb-eddin's und Schah Choldschi's genügende, Schaltperiode von 169 Jahren gebrauchen, so müßten die in den ersten 5 Zeilen stehenden Jahre den Schalttag erhalten, und man fände [nach Gl. (389)] die Zahl der Schalttage

$$e = q\frac{41a + 84}{169} = q\frac{a + 1 - q\frac{5a + 1}{169}}{4}.$$

Weil endlich der Unterschied zwischen den beiden Näherungsbrüchen $\frac{8}{33}$ und $\frac{65}{268}$ nicht mehr als $\frac{1}{8844}$ beträgt, folglich, wenn man den Ueberschuß des mittleren dschelalischen Jahres über das 365tägige zu $\frac{8}{33}$ T. anschlägt, erst nach 8844 Jahren eine Abweichung von einem Tage eintritt; so kann man für die wenigen Jahrhunderte, in denen die dschelalische Zeitrechnung gebraucht wurde, die Rechnung in derselben allerdings so führen, als hätte man in ihr einen 33jährigen Schaltkykel gebraucht, in welchem den 8 Jahren 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30 ein Schalttag zugelegt wurde. Im Folgenden werden wir daher diese sehr genäherte und einfache Einschaltung stets benützen; wozu wir um so mehr durch den Umstand aufgefordert werden, daß selbst die genaueste der von uns als möglich hingestellten Schaltrechnungen von der eigentlichen dschelalischen zuweilen noch immer um einen Tag abweichen kann. Dabei möge jedoch nie vergessen werden, daß wir dieselbe keineswegs für die wahrhafte dschelalische Schaltrechnung ausgeben wollen. Nach ihr ergibt sich, vermöge Gl. (389), die Zahl der dem Jahre a vorangehenden Schalttage

$$(393) \qquad e = q\frac{8(a + 2)}{33} = q\frac{a + 1 - q\frac{a + 1}{33}}{4},$$

wenn man Dividend und Theiler mit 4 multiplicirt und durch 33 dividirt. Das Jahr a enthält

$$(394) \qquad \Delta e = q\frac{8(a + 3)}{33} - q\frac{8(a + 2)}{33} = q\frac{8 + r\frac{8(a + 2)}{33}}{33}$$

Schalttage, und es ist daher ein Schaltjahr, so oft es durch 33 getheilt eine der oben genannten Zahlen zum Reste gibt, oder so oft $r\frac{8(a + 2)}{33} > 24$ ausfällt.

239.

Vergleichung der dschelalischen Jahrstage mit denen der ganzen Aere.

Soll der d^{te} Tag des dschelalischen Jahres a der n^{te} Tag der ganzen dschelalischen Zeitrechnung sein, so ist nach dem Obigen (§. 238)

$$N = 365(a-1) + \left(e = \mathfrak{q}\frac{a+1-\mathfrak{q}\frac{a+1}{33}}{4}\right)$$

und $\quad n = N + d$

daher

$$(395) \qquad n = 365(a-1) + e + d = 365(a-1) + \mathfrak{q}\frac{a+1-\mathfrak{q}\frac{a+1}{33}}{4} + d.$$

Umgekehrt trifft der n^{te} Tag der dschelalischen Zeitrechnung in das Jahr

$$(396) \qquad a = \mathfrak{q}\frac{n}{365} + 1 - \Delta a,$$

und auf dessen Tag

$$(397) \qquad d = \mathfrak{R}\frac{n}{365} - \left(e = \mathfrak{q}\frac{a+1-\mathfrak{q}\frac{a+1}{33}}{4}\right) + 365\Delta a,$$

wobei Δa nur $= 0$ oder $= 1$ angenommen werden darf, wenn d positiv und nicht größer als die Länge des Jahres a ausfallen soll.

240.

Berechnung des Wochentages, worauf ein Tag der dschelalischen Zeitrechnung trifft.

Der nullte Tag der dschelalischen Aere war ein fünfter Wochentag, daher trifft der n^{te} Tag derselben, oder der d^{te} Tag im Jahre a oder der t^{te} Tag im m^{ten} Monate des Jahres a auf den Wochentag

$$(398) \qquad h \equiv n + 5, \bmod 7$$

$$\equiv a + \left(e = \mathfrak{q}\frac{a+1-\mathfrak{q}\frac{a+1}{33}}{4}\right) + d - 3,$$

$$\equiv a + \left(e = \mathfrak{q}\frac{a+1-\mathfrak{q}\frac{a+1}{33}}{4}\right) + 2m + t + 2.$$

241.

Vergleichung der dschelalischen Aere mit anderen.

Soll ein Tag der dschelalischen Zeitrechnung auf eine andere übertragen werden, so geht man, wie schon Ulugbeg richtig bemerkte, dabei nur dann ganz sicher, wenn zugleich der Wochentag gegeben ist. Denn die Anzahl der ihm vorangehenden dschelalischen Schalttage, also auch der entsprechende Tag

der anderen Aere kann um einen Tag schwanken; weswegen dieser durch den angegebenen Wochentag geprüft werden muß. Im Uebrigen geschieht die Vergleichung beider Data auf die in §. 31 und 32 allgemein gelehrte Weise.

242.

Reduction der dschelalischen Zeitrechnung auf die julianisch-christliche.

Weil die Dauer der mittleren dschelalischen und julianischen Jahre nahe gleich ist, so lassen sich diese Jahre leicht mit einander vergleichen. Im Jahre a' nach Chr. endigt sich nemlich das dschelalische Jahr $a' - 1079$ und beginnt das Jahr $a = a' - 1078$. Umgekehrt das dschelalische Jahr a beginnt im Jahre $a' = a + 1078$ nach Chr. und endet im Jahre $a + 1079$. Sieht man daher von dem geringen Unterschiede der Jahresanfänge ab, so kann man das dschelalische Jahr a und das Jahr a' nach Chr. einander gleich erachten, wofern $a = a' - 1078$ und $a' = a + 1078$ ist.

Zur Vergleichung der Monatstage beider Aeren ist es erforderlich, die Anzahl g der Tage zu kennen, um welche bis zum dschelalischen Jahre a mehr in der julianischen als in der dschelalischen Aere eingeschaltet wurden. Hiezu bemerken wir, daß wenn das julianische Jahr $a + 1078$, in welchem das dschelalische Jahr a anfängt, ein Schaltjahr sein soll, $a + 1078 \equiv 0, \bmod 4$ und daher $a \equiv 2, \bmod 4$ sein muß. Theilt man nemlich die dschelalischen Jahre in vierjährige Schaltkreise ab, so fängt jedesmal das zweite im Schaltkreise nach einem julianischen Schaltjahre an, und das erste enthält daher den julianischen Schalttag, so lange das dschelalische Jahr noch im julianischen März und nicht im Februar seinen Anfang nimmt, auf dessen 29sten er zum ersten Male in den 8 Schaltjahren von 2928 bis 2956 n. Chr. trifft. Sonach treten bis zum Beginn des dschelalischen Jahres a immer $\mathfrak{q}\frac{a+2}{4}$ julianische Einschaltungen ein, und in diesem Jahre liegen

$$i = \mathfrak{q}\frac{a+3}{4} - \mathfrak{q}\frac{a+2}{4} = \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{a-1}{4}}{4} \text{ julian. Schalttage.}$$

Bis eben dahin finden aber

$$e = \mathfrak{q}\frac{a+1-\mathfrak{q}\frac{a+1}{33}}{4} \text{ dschelalische Einschaltungen}$$

Statt, daher ist der Ueberschuß jener Einschaltungen über diese

$$(399) \qquad g = \mathfrak{q}\frac{a+2}{4} - \mathfrak{q}\frac{a+1-\mathfrak{q}\frac{a+1}{33}}{4}$$

$$= \mathfrak{q}\frac{\mathfrak{q}\frac{a+1}{33} + \mathfrak{r}\frac{1-a}{4} + 1}{4},$$

Um diese g Tage muß das julianische Datum des nemlichen dschelalischen Monatstages bis zum dschelalischen Jahre a zurück weichen. Da nun der 0 **Ferwerdinmah** des dschelalischen Jahres 1 auf den 14 März fiel, so muß er im dschelalischen Jahre a auf den 14 — g März treffen. Sonach erhält man für die Reduction der dschelalischen Data auf die julianisch-christlichen folgende Tafel; die sich jedoch auch sehr leicht umgekehrt zur Uebertragung der christlichen Data auf die dschelalischen verwenden läßt.

Dschelalisches Jahr a. Monatstag.		Nach Chr. Geb. Jahr $a' = a + 1078$.
1) t **Ferwerdin**	$t + 14 - g$ März	$= t - 17 - g$ Apr. alt. St.
2) t **Erdibihischt**	$t + 13 - g$ Apr.	$= t - 17 - g$ Mai
3) t **Chordad**	$t + 13 - g$ Mai	$= t - 18 - g$ Jun.
4) t **Tir**	$t + 12 - g$ Jun.	$= t - 18 - g$ Jul.
5) t **Murdad**	$t + 12 - g$ Jul.	$= t - 19 - g$ Aug.
6) t **Schehriwer**	$t + 11 - g$ Aug.	$= t - 20 - g$ Sept.
7) t **Mihr**	$t + 10 - g$ Sept.	$= t - 20 - g$ Oct.
8) t **Aban**	$t + 10 - g$ Oct.	$= t - 21 - g$ Nov.
9) t **Aser**	$t + 9 - g$ Nov.	$= t - 21 - g$ Dec.
10) t **Dei**	$t + 9 - g$ Dec.	Jahr $a' + 1 = a + 1079$. $= t - 22 - g$ Jan.
11) t **Behmen**	$t + 8 - g$ Jan.	$= t - 23 - g$ Feb.
12) t **Sipendarmed**	$t + 7 - g$ Feb.	$= t - 21 - g - i$ März
13) t **Düsdide** (Ergänzungstag)	$t + 9 - g - i$ März.	

243.

Fortsetzung. Anwendungen.

1. Beispiel. Beck hat unter dem Titel **Ephemerides Persarum juxta epochas celebriores 1696**, einen Kalender herausgegeben, in welchem das 609. dschelalische Jahr vollständig durchgeführt und mit den entsprechenden syrischen, arabischen, jesdegirdischen und koptischen Monaten und Tagen zusammen gestellt ist. In diesem Kalender, der vor mir liegt, stellt er den Newrus oder 1 **Ferwerdinmah** des dschelalischen Jahres 609, einen Freitag, dem 11 März 1687 a. St. gleich. Ist diese Vergleichung richtig?

Hier ist $a = 609$,

daher $a' = 609 + 1078 = 1687$,

ferner $a + 1 = 610 = 33.18 + 16$, $a \equiv 1$, mod 4,

$1 - a \equiv 1 - 1$, mod $4 \equiv 0$,

folglich $g = q\frac{18 + 0 + 1}{4} = 4$.

Sonach ist 1 **Ferwerdinmah** $= 1 + 14 - 4 = 11$ März alt. St.

Sucht man noch zur Prüfung den Wochentag, so ist für §. 240, (398),

$d = 1$ Ferwerdinmah $= 1$, $a \equiv 0$, mod 7,

$e = q\frac{610-18}{4} = 148 \equiv 1$, mod 7,

also $h \equiv 0 + 1 + 1 - 3$, mod $7 \equiv 6 =$ Freitag.

Darauf trifft auch der 11 März a. St. 1687, folglich entspricht dieser Tag wirklich dem angegebenen dschelalischen.

2. Beispiel. In demselben Kalender wird der 26 Sipendarmedmah des dschelalischen Jahres 609, ein Mittwoch, mit dem 5 Scheriwermah des jesdegirdischen Jahres 1058, mit dem 29 Schebat des seleukidischen Jahres 1999, mit dem 4 Phamenoth des Jahres 1404 seit Diocletian, mit dem 8 Dschumadi el-ewwel des Jahres 1099 der Hedschra, endlich mit dem 29 Februar a. St. 1688 n. Chr. zusammen gestellt.

Da hier nach dem Obigen $g = 4$ ist, so gibt die Tafel des §. 242 in der That den 26 Sipendarmedmah $= 26 + 7 - 4 = 29$ Februar 1688, und auf diesen Tag reduciren sich auch alle übrigen angegebenen Data.

3. Beispiel. Anquetil macht ein Schreiben der Desturs oder parsischen Gelehrten in Kerman an die Desturs in Surate bekannt,*) welches datirt ist vom Tage Bad, dem 22sten, des Abanmah im Jahre 1111 seit Jesdegird, oder vom 23 Erdibihischtmah 664 seit Dschelal-eddin. Von welchem Tage der christlichen Zeitrechnung?

Für das jesdegirdische Datum ist

$a = 1111$, $m =$ Aban $= 8$, $t =$ Bad $= 22$,

also $d = 7.30 + 22 = 232$,

dafür ist $a \equiv -2$, $d \equiv 1$, mod 7

und $h \equiv -2 + 1 + 1 \equiv 0$, mod $7 =$ Samstag.

Ferner ist $\Delta a = 0$, also $a' = 1111 + 631 = 1742$

und $d' = 232 + 166 - 277 = 121 = 121 - 120$ Mai $= 1$ Mai.

Für das dschelalische Datum hat man

$a = 664$, $m =$ Erdibihischt $= 2$, $t = 23$,

daher $d = 30 + 23 = 53$.

Hieraus folgt $a \equiv -1$, mod 7, $d \equiv -3$,

$a + 1 = 665 = 33.20 + 5$,

$e = q\frac{665-20}{4} = 161 \equiv 0$,

also $h \equiv -1 + 0 - 3 - 3 \equiv 0$, mod $7 =$ Samstag.

---

*) S. Kleuker's Anhang zum Zend-Avesta, Thl. 1. Abth. 1. S. 351. Ideler Handb. 2. Bd. S. 546.

Endlich ist $a \equiv 0, \mod 4,$

also $$g = q\frac{20+1+1}{4} = 5,$$

folglich 23 **Erdibihischt** = 23 — 17 — 5 Mai = 1 Mai.

Das Datum des Briefes ist demnach Samstag der 1 Mai alten oder der 12 Mai neuen Styls 1742 nach Chr.

4. Beispiel. Der heutige 9 August 1842 n. St. oder 31 + 9 — 12 Juli = 28 Juli a. St., ein Dinstag, fällt in das dschelalische Jahr $a = 1842 - 1078 = 764$. Dies gibt $a \equiv 0, \mod 4,$ $a + 1 = 765 = 33 . 23 + 6.$

also $$g = q\frac{23+1+1}{4} = 6.$$

Da nun der t **Murdad** = t + 12 — g Juli hier = 28 Juli sein soll, so muß $t = 28 + g - 12 = 28 + 6 - 12 = 22$ sein. Sofort ist $m = 5$, $e = 185$, daher $h \equiv 1+3+3+1+2, \mod 7 \equiv 3$ = Dinstag. Dieser Tag ist demnach der 22 **Murdad** des dschelalischen Jahres 764.

C. Gegenwärtige Zeitrechnung der Perser.

244.

Heut zu Tage gebrauchen die Perser, wie alle Bekenner des Islams, die arabischen Monate und die Aere der Flucht. (7. Absch. A. S. 437.)

Neunter Abschnitt.

Zeitrechnung der vormaligen französischen Republik.

245.

Geschichtliches.

Gleich im Anfange der französischen Revolution (1790) hatte man die höchst nöthige Feststellung eines in ganz Frankreich einzuführenden Maß- und Gewichtssystems und durchgängig die Decimaltheilung desselben beschlossen. Dies gab Anlaß, auch auf Vertauschung der durch lauter Zufälligkeiten zu Ehren gekommenen römischen Zeitrechnung mit einer eigenen ebenfalls decimalen zu sinnen. Romme, Professor der Schiffahrtskunde zu Rochefort, und Deputirter, stellte nun eine solche Zeitrechnung zusammen, die auf seinen Bericht von dem National-Convente durch Decret vom 5 October 1793 zur allgemeinen Zeitrechnung der französischen Republik erhoben wurde. Allein diese neue Zeitrechnung hatte noch weniger Glück als die Reform der Maße und Gewichte. Sie lebte nur in den öffentlichen Acten und Zeitungen. Die Decimaltheilung der Zeit konnte gar nicht in Gebrauch kommen, weil man die vorhandenen und kostspieligen Uhren, vorzüglich die öffentlichen, nicht nach ihr abzuändern vermochte. Nachdem sich daher die Franzosen mit derselben durch 13 Jahre abgemüht hatten, wurden sie ihrer Isolirung von den übrigen europäischen Völkern überdrüssig, und kehrten, nach einem durch Napoleon veranlaßten Senatsbeschluß vom 9 September 1805, mit 1 Januar 1806 wieder zum gregorianischen Kalender zurück.

246.

Grundzüge der republikanisch-französischen Zeitrechnung.

Das Wesentliche dieser ephemeren Zeitrechnung bestand in Folgendem.

1. Die Grundeinheit der Zeitmessung war der mittlere Sonnentag. Er fing mit der Mitternacht an, und wurde in 10 Stunden, die Stunde in 100 Minuten, und die Minute in 100 Secunden getheilt.

2. An die Stelle der siebentägigen Woche trat die zehntägige **Décade**, deren Tage nach ihrer Nummer genannt wurden;

Primidi, Duodi, Tridi, Quartidi, Quintidi,
Sextidi, Septidi, Octidi, Nonidi, Décadi.

3. Drei Dekaden bildeten einen Monat, der sonach wie der ägyptische durchaus 30 Tage enthielt. Zwölf Monate mit 5 oder zeitweise mit 6 Ergänzungstagen — **jours épagomènes** oder **complémentaires** — machten ein bürgerliches Jahr aus; das also ganz die Form des alexandrinischen hatte.

4. Der Anfang des Jahres wurde auf die wahre Herbst-nachtgleiche festgesezt und astronomisch dergestalt bestimmt, daß das Jahr mit derjenigen Mitternacht anfange, welche dem, für den Meridian der Pariser Sternwarte astronomisch berechneten wirklichen Eintritte der Sonne in den Herbstpunkt, oder 180. Grad der geocentrischen Länge, unmittelbar vorherging; wornach also dieser Jahrpunkt jederzeit in den ersten Tag des beginnenden Jahres fiel, und das Jahr mit dem 22 oder 23 September n. St. anfing.

5. Bei dieser astronomischen Ausgleichung des bürgerlichen Jahres mit dem wahren tropischen Sonnenjahre, welches dadurch als größere Zeiteinheit festgesezt wurde, mußte in der Regel alle vier Jahre, zuweilen aber auch erst nach dem fünften Jahre, zu den 365 Tagen am Schlusse noch ein 366ster als Schalttag kommen, folglich statt des Gemeinjahres ein Schaltjahr eintreten. Zugleich traf in jedem solchen 4 oder 5jährigen Schaltkreise — **franciade** — der Schalttag auf das dritte Jahr. Weil jedoch die ganze Zeitrechnung nicht länger als 14 Jahre dauerte und darein kein 5jähriger Schaltkreis traf; so kann man die Einschaltung während derselben so ansehen, als wäre sie julianisch, also durchweg vierjährig, und in jedem vierjährigen Schaltkreise das dritte Jahr das Schaltjahr gewesen.

6. Die Namen der Monate bezogen sich auf die wichtigsten und gewöhnlichsten Witterungsverhältnisse und ländlichen Geschäfte in Frankreich; zugleich erhielten die Namen jeder drei Monate, welche in die nemliche Jahrzeit fielen, einerlei Endung. So waren

a) Herbstmonate:	**Vendémiaire,**	**Brumaire,**	**Frimaire;**
b) Wintermonate:	**Nivôse,**	**Pluviôse,**	**Ventôse;**
c) Frühlingsmonate:	**Germinal,**	**Floréal,**	**Prairial;**
d) Sommermonate:	**Messidor,**	**Thermidor,**	**Fructidor.**

7. Die Jahre wurden von der Gründung der französischen Republik gezählt. Die Epoche dieser republikanisch-französischen Aere — **ère française, années de la république française** — war die Mitternacht, mit welcher der 22 September n. St. oder der 11 September a. St. 1792 nach Chr. anfing. Der 0 **Vendémiaire** des französischen Jahres 1 kam daher mit dem 10 September a. St. 1792 nach Chr. überein.

247.
Vergleichung der neufränkischen Zeitrechnung mit der christlichen.

Ein Jahr a der französischen Republik beginnt demnach im Herbste des Jahres $a + 1791$ n. Chr., und endet im nächst folgenden Jahre $a' = a + 1792$ n. Chr. Umgekehrt endet im Herbste des Jahres a' n. Chr. das neufränkische Jahr $a = a' - 1792$, und beginnt das Jahr $a' - 1791$.

Schaltjahre waren die Jahre 3, 7, 11, welche nemlich durch 4 getheilt 3 zum Reste lassen. Daher vergingen, vermöge §. 24, II. Beisp., bis zum Anfange des französischen Jahres a, allgemein $q\frac{a}{4}$ französische Schalttage, und die Anzahl der Schalttage des Jahres a war $= q\frac{R\frac{a-3}{4}}{4} = q\frac{R\frac{a+1}{4}}{4}$.

Weil ferner im julianisch-christlichen Kalender die durch 4 theilbaren Jahre nach Chr. Schaltjahre sind, so enthält das französische Jahr a einen julianischen Schalttag, so oft $a' = a + 1792 \equiv 0$, mod 4, also $a \equiv 0$, mod 4 ist, nemlich in jedem französischen vierjährigen Schaltkreise das vierte Jahr. Daher sind bis zum französischen Jahre a, vermöge §. 24, II. Beisp., $q\frac{a-1}{4}$ julianische Schalttage vergangen, und dieses Jahr a selbst enthält überhaupt

$$i = q\frac{a}{4} - q\frac{a-1}{4} = q\frac{R\frac{a}{4}}{4} \text{ julianische Schalttage.}$$

Bis zum Anfange des Jahres a gibt es demnach mehr französische als julianische Schalttage

$$g = q\frac{a}{4} - q\frac{a-1}{4} = q\frac{R\frac{a}{4}}{4} = i,$$

also entweder einen, $g = i = 1$, oder keinen, $g = i = 0$, je nachdem das französische Jahr a durch 4 theilbar ist oder nicht.

Um diese $g = i$ Tage mußte daher das julianische Datum des 0ten Tages des franz. Jahres a jenem des Jahres 1 voreilen, also auf den $10 + g^{ten}$ September a. St. treffen. Gewöhnlich führt man aber die neufränkischen Data sogleich auf den dazumal schon in Europa herrschend gewesenen gregorianischen Styl zurück; folglich hat man zu den julianischen Datis noch die Voreilung k des neuen Styls vor dem alten zu addiren, welche nach §. 47, II, im 18ten Jahrhunderte, bis zum lezten oder 28 Febr. neuen Styls oder 17 Februar alten Styls im Jahre 1800, d. i. bis zum 9 Ventose des franz. Jahres 8 einschließlich, 11, nachher aber 12 Tage beträgt. Denn eigentlich wäre der t Ventôse des 8. Jahres $= t + k + g - i - 21$ März 1800, wenn i die Schalttage des Februars vorstellt. Nun ist nach dem alten Style immer $i = g$, daher obiger Ausdruck $= t + k - 21$ März; im neuen Style aber ist $i = 0$

und $g = 1$, daher jener Ausdruck $= t + k + 1 - 21$ März. Mithin muß bereits vom 1 März **neuen** Styls 1800 an für k der größere Werth 12 gesezt werden. — Daher fällt der 0te Tag des Jahres a auf den $10 + k + g$ Sept. neuen Styls. Für den alten Styl hat man stets $k = 0$ zu sezen.

Auf diese Weise ergibt sich folgende Tafel zur Reduction der Data der neufränkischen Zeitrechnung auf die christliche.

Franz. Jahr a. Monat.	Jahr n. Chr. a + 1791. 1ter Tag des franz. Monates.	
1) Vendémiaire	$t + k + g + 10$ Sept.	$= t + k + g - 20$ Oct.
2) Brumaire	$t + k + g + 10$ Oct.	$= t + k + g - 21$ Nov.
3) Frimaire	$t + k + g + 9$ Nov.	$= t + k + g - 21$ Dec.
		Jahr n. Chr. a + 1792.
4) Nivôse	$t + k + g + 9$ Dec.	$= t + k + g - 22$ Jan.
5) Pluviôse	$t + k + g + 8$ Jan.	$= t + k + g - 23$ Feb.
6) Ventôse	$t + k + g + 7$ Feb.	$= t + k - 21$ März
7) Germinal	$t + k + 9$ März	$= t + k - 22$ Apr.
8) Floréal	$t + k + 8$ Apr.	$= t + k - 22$ Mai
9) Prairial	$t + k + 8$ Mai	$= t + k - 23$ Jun.
10) Messidor	$t + k + 7$ Jun.	$= t + k - 23$ Jul.
11) Thermidor	$t + k + 7$ Jul.	$= t + k - 24$ Aug.
12) Fructidor	$t + k + 6$ Aug.	$= t + k - 25$ Sept.
13) Jours complém.	$t + k + 5$ Sept.	

$g = 1$, wenn a durch 4 theilbar, sonst $g = 0$.

$k = 11$ bis einschließlich 9 Ventôse des franz. Jahres $8 \doteq 28$ Febr. neuen Styls 1800, nachher $k = 12$ im neuen Style; sonst $k = 0$ im alten Style.

a ein Schaltjahr, wenn $a \equiv 3$, mod 4.

1. **Beispiel.** Der Sturz Robespierre's erfolgte am 9 Thermidor des Jahres 2 der Republik, also, weil $g = 0$ und $k = 11$ ist, am $9 + 11 + 7$ Juli $= 27$ Juli 1794.

2. **Beispiel.** Der Sieg des Barras gelang am 18 Fructidor des franz. Jahres 5; daher wegen $g = 0$ und $k = 11$ am $18 + 11 - 25$ Sept. $= 4$ Sept. 1797.

3. **Beispiel.** Bonaparte's sieghafte Revolution wurde am 18 Brumaire des fr. J. 8 durchgeführt; also wegen $g = 1$ und $k = 11$ am $18 + 1 + 11 - 21$ Nov. $= 9$ November 1799.

4. **Beispiel.** Der Friede zu Amiens wurde am 25 März 1802 geschlossen. Dieser Tag fällt daher in das franz. Jahr $1802 - 1792 = 10$, sonach ist $g = 0$ und $k = 12$. Der Tafel zufolge ist demnach der 25 März $= 25 - k - 9$ Germinal $= 4$ Germinal. Mithin war der Friedensschluß am 4 Germinal des franz. Jahres 10.

Zugabe.

Vorschlag zu einer historischen Zeitrechnung.



Zugabe.

Vorschlag zu einer genauen und wissenschaftlich angeordneten Zeitrechnung für Geschichte und Astronomie.

1.

Beweggründe.

Jeder Freund der Wissenschaften, vorzüglich der Geschichtforscher und Astronom, muß eine wohl geregelte, mit dem Laufe der Gestirne so nahe als möglich übereinstimmende, Zeitrechnung höchst wünschenswerth finden. Allein die Geschichte der Zeitrechnungen, besonders die der Einführung der gregorianischen und vormaligen französischen, wird ihn auch wissen lassen, daß eine Verbesserung einer Zeitrechnung in den bürgerlichen Geschäftsverkehr nur äußerst schwer Eingang findet. Deswegen wird er nur wenigstens das leicht Ausführbare wünschen, daß vorerst blos in den Wissenschaften, besonders in der Geschichte und Astronomie, eine genaue und systematisch angeordnete, die Bedürfnisse der Wissenschaft und des bürgerlichen Lebens berücksichtigende, Zeitrechnung von den Gelehrten allgemein angenommen werden möchte, so wie dies vormals mit dem alt Pariser Längenmaße und Gewichte in den physikalischen Wissenschaften der Fall war; mag es dann der Zeit überlassen bleiben, ob eine solche Rechnung auch in den privaten und öffentlichen Verkehr der Völker sich Einlaß erringe. Zu diesem frommen Wunsche einer wissenschaftlich geregelten Zeitrechnung, welche die historische genannt werden dürfte, erlaube ich mir folgende Vorschläge zu machen.

2.

Der Tag, sein Anfang und seine Eintheilung.

Als Grundeinheit aller Zeitmessung kann nur, wie schon jetzt, der in dem Umschwunge der Erde um ihre Achse begründete mittlere Tag beibehalten werden. Sein Anfang kann keine bessere Stelle als die Mitternacht bekommen. An seiner Eintheilung möchte der Rechner zwar gern eine Verbesserung anbringen, ihn in zwei gleiche Hälften zu je 10 St., also im Ganzen in 20 Stunden theilen, die er in einem Zuge von

1 bis 20 zählen würde; ferner möchte er jede Stunde in 100 Minuten und jede Minute iu 100 Secunden abtheilen; allein eine solche Abtheilung könnte blos in den Rechnungen oder in der Theorie figuriren, nie aber weder in den angewandten Wissenschaften noch im bürgerlichen Leben Plaz gewinnen; weil man alle vorhandenen unzähligen und kostspieligen Uhren verwerfen und durch neue ersezen müßte, welches Opfer doch kein Verständiger fordern wird. Man wird daher schon bei der üblichen Eintheilung des mittleren Tages in 24 Stunden zu 60 Minuten, jede zu 60 Secunden gerechnet, bleiben müssen; höchstens könnte man mit den Astronomen die Stunden in Einem von 1 bis 24 zählen, aber auch da blieben die Zusäze der Tageszeiten, »Morgens, vor Mittag, nach Mittag, Abends, Nachts,« zur größeren Sicherheit in den Zeitangaben wünschenswerth.

3.

Die Woche.

Die siebentägige Woche ist für die Geschichte und Astronomie ohne Bedeutsamkeit. Mag sie daher unbeanständet und ununterbrochen wie bisher fortlaufen. Wer will, kann bei dem Datiren auch den jedesmaligen Wochentag mit ansezen; ob er dabei ihre Tage benennt oder zählt, bleibt gleichgiltig. Für das bürgerliche Leben wird sich an ihr mit wenig Vortheil künsteln lassen.

4.

Das Jahr und der Monat.

Die größere, in dem Umlaufe der Erde um die Sonne begründete, brauchbare Zeiteinheit ist das tropische Sonnenjahr. Leider ist seine jeweilige Dauer ein wenig veränderlich und selbst seine mittlere Dauer gegen die des mittleren Tages irrational, auch bisher noch nicht aufs schärfste bestimmt. Die historische Chronologie kann das Jahr blos in vollen Tagen rechnen, folglich ihm gewöhnlich, als einem Gemeinjahre, 365, und von Zeit zu Zeit als einem Schaltjahre 366 Tage zuweisen. Daß hier der Schalttag immer der lezte im Jahre sein müsse, bleibt wohl unbestritten.

Der Anfang des Jahres wird am passendsten an einen der vier Jahrpunkte geknüpft. Da diese für das gewöhnliche Leben von durchaus gleicher Bedeutsamkeit sind, für die Astronomie aber und für die weit verbreitete christliche und jüdische Religion die Frühlingsnachtgleiche von Wichtigkeit ist; so möchte es rathsam sein, das Jahr mit der Frühlingsnachtgleiche anfangen zu lassen.

Die Abtheilung des Jahres in 12 Monate wird theils durch den allgemeinen Gebrauch, theils durch die ausgezeichnete Beschaffenheit der

Zahl 12 geheiligt, daß sie die kleinste unter den Zahlen ist, welche vier verschiedene Theiler besitzen, und daß unter diesen Theilern auch die Anzahl 4 der von den Jahrpunkten hervorgebrachten Abtheilungen des Jahres sich befindet; wornach auf jede der 4 Jahrszeiten 3 Monate entfallen.

Die Monate mit besonderen Namen zu belegen würde allerdings mancherlei Vortheile gewähren; besonders wenn solche Namen möglichst kurz, ein- oder höchstens zweisilbig wären, wenn sich an ihren Anfangsbuchstaben, Selbstlauten und Endungen leicht erkennen ließen, die wie vielten sie im Jahre sind, in welche Jahrszeit sie fallen, und ob sie 30 oder 31 Tage halten, wenn sie für alle Völker gleich verständlich oder bedeutungslos wären, und — was das Wichtigste ist — allgemeinen Beifall und Gebrauch unter den Gelehrten fänden. Da sich jedoch allen diesen Anforderungen kaum genügen lassen dürfte, so bleibt es wohl am besten, die Monate des Jahres der Reihe nach zu zählen und mit den Ordnungszahlwörtern zu benennen, wie dies bei den Kleinasiaten geschah. (§. 172, d, S. 374.) Vielleicht könnte man die Stammsilben der Ordnungszahlwörter mit einer Nachsilbe, im Deutschen mit der einzigen noch nicht anderseitig verwendeten ner, oder mit dem Gattungsnamen Monat, niederdeutsch Maand oder Mand verknüpfen, als: Erst-, Zweit-, ... Siebent-, ... Zehent-, Elft-, Zwölft-ner oder -mand.

5.

Fortsezung.

Die Dauer der einzelnen Monate wäre eigentlich dergestalt in ganzen Tagen zu bemessen, daß jede Jahrszeit volle 3 Monate umfasse und in jedem Monate der von der Sonne zur Erde gehende Radiusvector den zwölften Theil der ganzen Umdrehung oder 30 Grad durchstreiche. Allein die zwischen den beiden Nachtgleichen begriffenen Halbjahre sind ungleich, indem das bei uns sommerliche nahe 186$\frac{1}{2}$, das winterliche dagegen nur 178$\frac{3}{4}$ Tage enthält. Daher bekämen die Monate der Reihe nach 31, 31, 31; 31, 31, 31; 30, 30, 29; 30, 30 und 29 Tage im Gemein- oder 30 im Schaltjahre. Aber theils unterliegt diese Dauer der Sonnenmonate und Jahrszeiten wegen der Bewegung des Apheliums einer allmäligen Veränderung, theils enthält einerlei Anzahl nach einander folgender Monate wenigstens dreierlei Anzahlen von Tagen, was, falls die vorgeschlagene Zeitrechnung auch einer allgemeinen Anwendung gewürdigt werden sollte, im Geschäftsverkehr stören würde. Derselbe Vorwurf trifft auch und noch stärker die, blos die Bequemlichkeit der Rechnung berücksichtigende, ägyptische Eintheilung des Jahres in 12 Monate zu 30 Tagen und in 5 oder 6 Ergänzungstage. Daher scheint es am zweckmäßigsten zu sein, ohne Rücksicht auf die doch nur geringe Ungleichheit und

Wandelbarkeit der Längen der Jahrszeiten, die Anzahlen der Tage der einzelnen Monate möglichst gleich, folglich nicht mehr als zweierlei zu machen, und möglichst regelmäßig zu vertheilen.

Nun geben die Anzahlen 365 und 366 der Tage des Jahres durch 12 getheilt 30 zum Quotus, zum Reste aber 5 und 6; mithin müssen im Gemeinjahre 5, im Schaltjahre 6 Monate 31, die übrigen jedoch nur 30 Tage erhalten. Der Schalttag kommt an das Ende des lezten Monates, daher erhält der zwölfte oder lezte geradstellige Monat im Schaltjahre 31 und im Gemeinjahre 30 Tage. Sonach hat man auch den 5 übrigen geradstelligen Monaten jederzeit 31 Tage zuzuweisen. Auf diese Art werden die 30 und 31tägigen Monate im Schaltjahre durchgängig, und im Gemeinjahre bis an den lezten Monat, regelmäßig wechseln, da hier zulezt zwei 30tägige Monate auf einander folgen. Ferner hält ein Paar nach einander folgender Monate meistens 61 und nur bei dem Wechsel nach einem Gemeinjahre 60 Tage; drei Monate oder ein Vierteljahr halten gewöhnlich 91 oder 92 und nur bei dem Uebergange von einem Gemeinjahre auf das folgende 90 Tage; 4 Monate enthalten 121 oder 122 Tage, 5 Monate 151 oder 152 Tage; 6 Monate oder ein Halbjahr 182 oder 183 Tage, u. s. f.

Die Form des historischen Jahres, wenn es i Schalttage hat, ist daher folgende:

		Tage	Nullter Monatstag	Jahrpunkt.
Erster	Monat	30	0	Frühlingsnachtgleiche.
Zweiter	—	31	30	
Dritter	—	30	61	
Vierter	—	31	91	Sommerliche Sonnenwende.
Fünfter	—	30	122	
Sechster	—	31	152	
Siebenter	—	30	183	Herbstnachtgleiche.
Achter	—	31	213	
Neunter	—	30	244	
Zehnter	—	31	274	Winterliche Sonnenwende.
Elfter	—	30	305	
Zwölfter	—	30+i	335	

6.

Einschaltung.

Zu Schaltkreisen wählt man (§. 19 und 20) am vortheilhaftesten für gewöhnlich den 4jährigen und zuweilen den 5jährigen, indem man jedesmal dem dritten Jahre des Schaltkreises den Schalttag zulegt. Aus diesen kleinen

Kreisen sezt man größere, in der Regel 33jährige mit 8 Schalttagen und ausnahmsweise 29jährige mit 7 Schalttagen zusammen; und vereinigt diese selbst wieder in die größte anzunehmende Schaltperiode von 128 Jahren mit 31 Schalttagen, *) in welchen sonach die Jahre

3,	7,	11,	15,	19,	23,	27,	31	des ersten	33j.	Schaltkreises,
36,	40,	44,	48,	52,	56,	60,	64	— zweiten	33j.	—
69,	73,	77,	81,	85,	89,	93		— dritten	29j.	—
98,	102,	106,	110,	114,	118,	122,	126	— vierten	33j.	—

Schaltjahre sind. Bei einer solchen Schaltrechnung wird man erst nach 29000 Jahren um einen Tag zu wenig zählen; ja vielleicht stellt sich der Fehler noch geringer, wenn man über die periodische Zu- und Abnahme der Dauer des tropischen Sonnenjahres die genaueste Kenntniß erlangt haben wird.

Gegen diese Einschaltung dürfte leicht eingewendet werden, sie sei minder einfach als die julianische und lilianische. Wenn dies auch zugestanden werden muß, so wolle man doch bedenken, daß es bei einer Einschaltung nicht lediglich auf ihre Einfachheit, sondern vielmehr auf ihre Richtigkeit, d. i. auf die durch sie herzustellende möglichst genaue und stete Uebereinstimmung der kyklischen Zeitrechnung mit der mittleren astronomischen ankomme; daß man im gewöhnlichen und Geschäftsleben durch den vereinzelt da stehenden Schalttag gar nicht beirrt wird, folglich sich um seine Bestimmungsweise, diese mag nun leicht oder schwer sein, eben so wenig als um Vorausberechnung der christlichen beweglichen Feste oder der Erscheinungen am Himmel, kümmert, weil dies Alles vom Kalender angegeben wird; und daß man sonach blos das Bedürfniß der strengeren Wissenschaft zu beachten habe.

7.

Jahrrechnung.

Mehr Anstand als die bisherigen Vorschläge dürfte die anzutragende Epoche für die Zählung der Jahre in der histor. Zeitrechnung finden; doch vielleicht einigt man sich auch noch über diesen schwierigen Punkt. Eine solche Begebenheit, von der man in der Geschichte und Astronomie die Jahre zu zählen beabsichtiget, muß offenbar für alle Zeiten, Völker und Religionen von gleicher Bedeutsamkeit und der Zeit nach, in der sie sich zutrug, völlig bestimmt sein; daher kann man für sie nur ein in der Vorzeit beobachtetes Ereigniß am Himmel wählen, bei welchem die Zeit des Eintrittes durch Nachrechnung streng erwiesen werden kann. Von den auf uns gekommenen

*) Die 128jährige Schaltperiode wurde bereits von Vega in der von ihm herausgegebenen »Anleitung zur Zeitkunde, aufgesezt von einem Freunde der Wissenschaften (A. Cramer von Kronenbach),« Wien 1801, S. 199, und in neuester Zeit von Mädler in seiner »populären Astronomie,« Breslau 1849, S. 526, vorgeschlagen.

ältesten Beobachtungen der Chineser, Indier und Chaldäer eignet sich nun zu diesem Zwecke blos die von den Chaldäern zu Babylon am Abende des 29 Thoth im 27sten Jahre seit Nabonassar, d. i. am 19 März 721 vor Chr., im ersten Jahre des Königs Mardokempad, wenige Tage vor der Frühlingsnachtgleiche beobachtete totale Mondfinsterniß, deren Mittel $2\frac{1}{2}$ Stunden vor der Mitternacht eintrat. (§. 133, 1. Beispiel, S. 828.) Dieses älteste, historisch und astronomisch genau bestimmte Datum, wovon wir durch den Almagest des Ptolomäus Kunde besitzen, dürfte zur Epoche der vorgeschlagenen historischen Aere am geeignetsten sein; da in dem, was von Völkergeschichten aus dem langen Zeitraume vor ihm noch übrig ist, anfangs völlige Dunkelheit, dann nur stellenweise mythisches Dämmerlicht herrscht, und erst seit dem dritten Jahrhunderte vor ihm bis ans dritte nach ihm allmälig das geschichtliche Morgenlicht anbricht; so daß man diesen Zeitpunkt als den Eingang zur wahren Völkergeschichte betrachten kann.

Nun sollen aber die Jahre der historischen Zeitrechnung mit der Frühlingsnachtgleiche anfangen, und einem allgemeinen Gebrauche der Chronologie gemäß gehört das Factum, vor dem man die Jahre einer Aere zählt, jedesmal, so oft es nicht mit dem Anfange derselben zusammenfällt, in das erste Jahr dieser Aere, selbst wenn es auch noch so nahe an das Ende dieses Jahres fiele. Denn so trifft der Regierungsantritt jedes ägyptischen Herrschers in das erste nach ihm benannte Jahr, der Sieg Cäsars bei Pharsalus in das erste davon gezählte Jahr der syrischen Hauptstadt Antiochia, die Geburt Christi sehr nahe an das Ende des ersten Jahres der dionysischen Aere, u. m. dgl. Mithin sind die historischen Jahre von der, obiger Sonnenfinsterniß nächst vorangegangenen, Frühlingsnachtgleiche des Jahres 722 vor Chr. an zu zählen.

Nach meiner Berechnung trat die Frühlingsnachtgleiche im Jahre 722 v. Chr. am 29 März ein, und zwar

unter dem Meridiane von Babylon	um 7 Uhr	10′	Morgens
— — — — Alexandrien	— 6 —	30	—
— — — — Rom	— 5 —	20	—,

im nächst folgenden Jahre 721 v. Chr. aber am 28 März

unter dem Meridiane von Babylon	um 1 Uhr	10′	nach Mittag,
— — — — Alexandrien	— 12 —	15′	Mittags,
— — — — Rom	— 11 —	10	vor Mittag.

Daher fängt die vorgeschlagene historische Jahrrechnung mit dem 29 März des Jahres 722 vor Chr., oder 4787 der byzantinischen Weltäre, an einem Dinstage, mithin um 1748295 Tage später als die byzantinische Weltäre an. In ihr erstes Jahr traf, nebst der angeführten totalen Mondfinsterniß kurz vor der Frühlingsnachtgleiche, der Anfang der Regierung des babylonischen

Königs Mardokempad, und nach Petav's Rechnung der Umsturz des Reiches Israel durch den Assyrer Salmanassar.

Für den an bekannter und wahrer Völkergeschichte armen Zeitraum vor dem Anfang dieser Aere, oder für die Dauer der weltgeschichtlichen Nacht, mag man immerhin die Jahre, in der gewöhnlichen Weise, von 1 an rückwärts zählen. Der Geschichtschreiber bedarf dabei weder einer Schaltrechnung, noch einer Abtheilung des Jahres in Monate, weil er anfangs kaum das Jahrtausend, später nur das Jahrhundert, und erst in den lezten drei Jahrhunderten das Jahrzehend, niemals aber das einzelne Jahr, festzustellen vermag, in dem sich eine Begebenheit zutrug.

An die Frühlingsnachtgleiche des Jahres 722 n. Chr., welche bei Sonnenaufgang in der alten Welt eintrat, und an die wir die historische Jahrrechnung banden, werden wir jedoch keineswegs auch unsere 128jähr. Schaltperiode knüpfen, — weil wir beabsichtigen, die Frühlingsnachtgleiche fast immer an dem Neujahrstage zu behalten, — sondern an die nächst folgende des Jahres 721 v. Chr., welche um die Mittagsstunde in der alten Welt eintrat. Wir werden daher unsere Schaltperiode nicht mit dem ersten, sondern mit dem zweiten Jahre der historischen Aere anheben lassen; folglich werden wir eigentlich mit dem ersten historischen Jahre eine andere als die in Art. 6 angeführte 128jährige Schaltperiode anfangen, in welcher

der erste	33j. Kreis die 8 Schaltj.		4,	8,	12,	16,	20,	24,	28,	32,
— zweite	33j.	— 8 —		37,	41,	45,	49,	53,	57,	61,	65,
— dritte	29j.	— 7 —		70,	74,	78,	82,	86,	90,	94,	
— vierte	33j.	— 8 —		99,	103,	107,	111,	115,	119,	123,	127

besizt.

8.

Vergleichung der Monats- und Jahrestage in der historischen Jahrform.

Wenn jeder geradstellige Monat vor dem lezten 31, jeder ungeradstellige aber 30 Tage enthält, so sind bis zu Anfange des m^{ten} Monates $\mathfrak{q}\frac{m-1}{2} = \mathfrak{Q}\frac{m}{2}$ jener 31tägigen Monate, bis eben dahin $30(m-1) + \mathfrak{Q}\frac{m}{2}$ Tage. Mithin ist der t^{te} Tag des m^{ten} Monates im ganzen Jahre selbst der Tag

$$d = 30(m-1) + \mathfrak{q}\frac{m-1}{2} + t = 30(m-1) + \mathfrak{Q}\frac{m}{2} + t.$$

Umgekehrt fällt der d^{te} Tag des Jahres in den Monat

$$m = \mathfrak{Q}\frac{d}{30} + 1 - \Delta m,$$

und auf dessen Tag

$$t = \mathfrak{R}\frac{d}{30} - \mathfrak{q}\frac{m-1}{2} + 30\Delta m,$$

wofern man $\Delta m = 0$ oder 1 setzt, damit t nicht größer als die Zahl der Tage des m^{ten} Monates ausfalle.

Oder: Aus $d = 30(m-1) + q\frac{m-1}{2} + t$

folgt $2d = 61(m-1) - r\frac{m-1}{2} + 2t$,

also, weil $2t - r\frac{m-1}{2} = 1, 2, \ldots 61$ ist,

der Monat $m = Q\frac{2d}{61} + 1$

und sein Tag $t = \left(R\frac{2d}{61} + r\frac{m-1}{2}\right) : 2$.

9.

Anzahl der Schalttage vor einem Jahre der historischen Aere.

Nach unserer Anordnung der historischen Schaltrechnung ist, in den Vorbegriffen XXII, 3,

$$\varpi = 128, \quad \varepsilon = 31,$$

$$\Sigma\xi = (4+32)4 + (37+65)4 + \tfrac{1}{2}(70+94)7 + (99+127)4$$
$$= 4(36+102+226) + 7.82 \equiv -18, \text{ mod } 128,$$

also $\delta \equiv -16 + 18 \equiv 2$, mod 128.

Vor einem Jahre a der historischen Aere sind daher Schalttage

$$e = q\frac{31a+2}{128} = q\frac{a + q\frac{2-a}{32}}{4} = q\frac{a-1-q\frac{a-8}{32}}{4};$$

dieses Jahr enthält demnach für $\Delta a = 1$ der Schalttage

$$\Delta e = q\frac{31a+33}{128} - q\frac{31a+2}{128} = q\frac{31 + r\frac{31a+2}{128}}{128},$$

und ist sofort ein Schaltjahr, wenn $r\frac{31a+2}{128} > 96$ ist.

Die Anzahl e der vor dem Jahre a vergangenen Schalttage läßt sich auch noch anders ausdrücken. Es ist nemlich

$$e = q\frac{31(a+x)+2-31x+128y}{128} - y.$$

Wählt man nun x und y dergestalt, daß

$$2 - 31x + 128y = 0 \text{ werde,}$$

so hat man $e = q\frac{31(a+x)}{128} - y$;

und findet (nach den Vorbegriffen XIX)

$$x = 62, \quad y = 15,$$

oder $x = -66, \quad y = -16,$

daher $e = q\frac{31(a+62)}{128} - 15 = q\frac{31(a-66)}{128} + 16.$

Nach dem Jahre 65 wiederkehrt demnach in der histor. Aere die 128jähr. Schaltperiode dergestalt, daß in ihr der 29jährige Kreis den drei 33jährigen Kreisen, und in jedem dieser vier Kreise der 5jährige Schaltkreis den 4jährigen vorgeht.

Wollte man dagegen diese Periode so anordnen, daß immer die größeren Kreise den kleineren folgen, so müßte man sie um $2.33+29=95$ Jahre später oder um 33 früher anfangen lassen, nemlich dort dem $2.8+7=23$, und hier vor 8 kürzesten Schaltkreisen; also wäre $x=-95$, und $y=-23$, oder $x=33$, und $y=8$ anzunehmen; dann ist $2-31x+128y=2+1=3$, folglich

$$e=\mathfrak{q}\frac{31(a+33)+3}{128}-8=\mathfrak{q}\frac{31(a-95)+3}{128}+23.$$

Sezt man hierin $\mathfrak{R}\frac{a+33}{128}=\mathfrak{R}\frac{a-95}{128}=\alpha$,

so erhält man

$$e=-8+31\mathfrak{Q}\frac{a+33}{128}+\mathfrak{q}\frac{31\alpha+3}{128}$$
$$=23+31\mathfrak{Q}\frac{a-95}{128}+\mathfrak{q}\frac{31\alpha+3}{128};$$

und wenn man hierin noch

$$\alpha=33\mathfrak{Q}\frac{\alpha}{33}+\mathfrak{R}\frac{\alpha}{33}$$ schreibt,

$$\mathfrak{q}\frac{31\alpha+3}{128}=8\mathfrak{Q}\frac{\alpha}{33}+\mathfrak{q}\frac{\mathfrak{R}\frac{\alpha}{33}-1}{4},$$

weil der von dem lezten Dividende eigentlich noch abzuziehende Quotus $\mathfrak{q}\frac{\mathfrak{Q}\frac{\alpha}{33}+\mathfrak{R}\frac{\alpha}{33}-4}{32}$, wie man sich leicht überzeugt, immerhin weggelassen werden kann; folglich

$$e=-8+31\mathfrak{Q}\frac{a+33}{128}+8\mathfrak{Q}\frac{\alpha}{33}+\mathfrak{Q}\frac{\mathfrak{R}\frac{\alpha}{33}}{4}$$
$$=23+31\mathfrak{Q}\frac{a-95}{128}+8\mathfrak{Q}\frac{\alpha}{33}+\mathfrak{Q}\frac{\mathfrak{R}\frac{\alpha}{33}}{4}.$$

Der lezte Ausdruck läßt sich auch direct aufstellen, wenn man erwägt, daß 23 Schalttage bis zum Jahre 95 bestehen, daß von da bis zum Jahre a offenbar $\mathfrak{Q}\frac{a-95}{128}$ Schaltperioden zu 31 Schalttagen folgen, daß dieses Jahr das α^{te} in der laufenden 128jähr. Schaltperiode ist, folglich bis dahin $\mathfrak{Q}\frac{\alpha}{33}$ der 33jährigen Schaltkreise zu 8 Schalttagen und noch im laufenden 33- oder 29jährigen Kreise $\mathfrak{Q}\frac{\mathfrak{R}\frac{\alpha}{33}}{4}$ Schalttage vergehen. Zugleich erkennt man, daß das Jahr a ein Schaltjahr ist, wenn $\mathfrak{R}\frac{\alpha}{33}=\mathfrak{R}\frac{\mathfrak{R}\frac{a-95}{128}}{33}$ durch 4 theilbar ist.

10.

Vergleichung der Jahrestage mit jenen der ganzen historischen Aere.

Sei der d^{te} Tag im a^{ten} Jahre der n^{te} Tag der historischen Zeitrechnung, so ist (§. 26),

$$n = 365(a-1) + e + d = 365(a-1) + \mathfrak{q}\frac{a-1-\mathfrak{q}\frac{a-3}{32}}{4} + d.$$

Umgekehrt (§. 27) fällt der n^{te} Tag der historischen Zeitrechnung in das Jahr

$$a = \mathfrak{Q}\frac{n}{365} + 1 - \Delta a,$$

und auf dessen Tag

$$d = \mathfrak{R}\frac{n}{365} - \mathfrak{q}\frac{a-1-\mathfrak{q}\frac{a-3}{32}}{4} + 365\Delta a;$$

wofern man $\Delta a = 0, 1, 2, \ldots$ dergestalt wählt, daß d positiv und nicht größer als die Anzahl der Tage des Jahres a sich ergebe.

Oder, weil $4n = 1461(a-1) - \mathfrak{q}\frac{a-3}{32} + 4d$ ist,

fällt der n^{te} Tag der Aere in das Jahr

$$a = \mathfrak{Q}\frac{4n}{1461} + 1 + \Delta a$$

und auf dessen Tag

$$d = \frac{\mathfrak{R}\frac{4n}{1461} + \mathfrak{q}\frac{a-3}{32} - \Delta a}{4} - 365\Delta a,$$

wobei d jedesmal eine positive ganze Zahl werden muß.

11.

Berechnung des Wochentages, auf den ein Tag der historischen Zeitrechnung trifft.

Der erste Tag der historischen Zeitrechnung ist ein Dinstag, also der nullte ein Montag oder zweiter Wochentag. Soll daher der n^{te} Tag auf den Wochentag h treffen, so findet sich

$$h \equiv n + 2, \bmod 7.$$

Ist dieser Tag der d^{te} des Jahres a, so findet man, nach dem Ausdrucke von n in Art. 10,

$$h \equiv a + \mathfrak{q}\frac{a-1-\mathfrak{q}\frac{a-3}{32}}{4} + d + 1, \bmod 7.$$

Bezeichnet H den Wochentag des nullten Tags des Jahres a, oder den Wochentag, nach welchem dieses Jahr anfängt, so ergibt sich hieraus, für $d = 0$,

$$H \equiv a + \mathfrak{q}\frac{a-1-\mathfrak{q}\frac{a-3}{32}}{4} + 1, \bmod 7;$$

daher $$h \equiv H + d, \bmod 7.$$

Ist derselbe Tag der t^{te} Tag im m^{ten} Monate, so erfolgt, nach obigem Ausdrucke von d, in Art. 8,

$$h \equiv H + 2(m-1) + \mathrm{q}\frac{m-1}{2} + t, \bmod 7.$$

12.

Vergleichung der historischen Zeitrechnung mit der christlichen.

Soll der d^{te} Tag des Jahres a, oder der n^{te} Tag der historischen Aere, welche um $g = 1748295$ Tage nach der byzantinischen anfängt, mit dem d'^{ten} Tage gregorianischen Styles des Jahres a′ oder mit dem n'^{ten} Tage der Aere nach Chr. Geb., welche um $g' = 2011919$ Tage nach der byzantinischen beginnt, zusammen fallen, und mit Rücksicht auf die bestehende Ausnahme

$$k = \mathrm{q}\frac{a'}{100} - \mathrm{q}\frac{\mathrm{q}\frac{a'}{100}}{4} - 2$$

die Voreilung des gregorianischen Styles vor dem julianischen seit dem Jahre $a' = 1582$ n. Chr. vorstellen, vor diesem Zeitpunkte aber Null sein, (§. 47, II); so hat man die Gleichungen

$$n = 365(a-1) + \mathrm{q}\frac{a-1-\mathrm{q}\frac{a-3}{32}}{4} + d$$

$$n' = 365(a'-1) + \mathrm{q}\frac{a'-1}{4} + d' - k$$

$$n + g = n' + g'.$$

Hieraus folgt

$$n - n' = g' - g = 263624 = 365.722 + 94$$

$$= 365(a-a') + \mathrm{q}\frac{a-1-\mathrm{q}\frac{a-3}{32}}{4} - \mathrm{q}\frac{a'-1}{4} + d - d' + k,$$

mithin ist für die Reduction der christlichen Zeitrechnung auf die historische

$$a = a' + 722 - \alpha$$

$$d = \mathrm{q}\frac{a'-1}{4} - \mathrm{q}\frac{a-1-\mathrm{q}\frac{a-3}{32}}{4} + d' - k + 94 + 365\alpha$$

und für die Reduction der historischen Zeitrechnung auf die christliche

$$a' = a - 722 + \alpha$$

$$d' = \mathrm{q}\frac{a-1-\mathrm{q}\frac{a-3}{32}}{4} - \mathrm{q}\frac{a'-1}{4} + d + k - 94 - 365\alpha;$$

wobei $\alpha = 0$ oder 1 anzunehmen ist, damit d oder d′ weder negativ noch zu groß ausfalle.

Im März des Jahres a′ nach Chr. endigt sich also das historische Jahr $a' + 721$ und beginnt das Jahr $a' + 722$, oder das Jahr a′ nach Chr.

beginnt im 10. Monate des historischen Jahres $a' + 721$ und endet im Jahre $a' + 722$.

Umgekehrt im zehnten Monate des historischen Jahres a

endet das Jahr $a - 722$ n. Chr.

und beginnt „ $a - 721$ „

oder das historische Jahr a

beginnt im März des Jahres $a - 722$ n. Chr.

und endet „ „ „ $a - 721$ „

Beispiel. Welches historische Jahr beginnt im Jahre 1843 n. Chr. und an welchem Tage?

Hier ist $a' = 1843$, also $a = a' + 722 = 2565$, $\alpha = 0$. Ferner ist $d = 1$; $a - 3 = 2562 = 32.80 + 2$, $a - 1 - 80 = 2484 = 4.621$; $a' - 1 = 1842 = 4.460 + 2$;

daher $d' - k = 621 - 460 + 1 - 94 = 68$

$$\begin{array}{rl} 0 \text{ März} = 59 & \\ \hline d' - k = 9 & \text{März alt. St.} \\ k = 12 & \\ \hline d' = 21 & \text{März n. St.} \end{array}$$

Im Jahre 1843 nach Chr. fängt demnach das historische Jahr 2565 am 21 März an; und wirklich tritt an diesem Tage die (wahre) Frühlingsnachtgleiche unter dem Meridiane Wiens um 7 Uhr 8 Min. Morgens ein.

13.

Fortsezung.

Da die mittleren Jahre der hier mit einander zu vergleichenden Zeitrechnungen nahe genug übereinkommen; so können sie auf folgende Weise leichter auf einander zurück geführt werden.

Benüzt man von dem Jahre 1582 nach Chr. an die lilianische Schaltrechnung, oder die julianische höchstens noch bis zum Jahre 2900 nach Chr., so fällt der Anfang des historischen Jahres jedesmal in den Monat März des christlichen Jahres; folglich stehen die Anfänge beider Jahre um kein volles Vierteljahr von einander ab. Sind daher a, a' ein historisches und ein dionysisch-christliches Jahr, welche zu drei Viertheilen, mithin größtentheils, zusammen stimmen, so ist nach dem Gefundenen,

$$a = a' + 722$$
$$a' = a - 722.$$

Der 0. Tag des Jahres 1 der historischen Aere trifft auf den 28 März 722 vor Chr. Von diesem Tage an bis zum Anfange des historischen Jahres a mögen nun e Schalttage der historischen und e' der julianischen Zeitrechnung vergehen; von der lezteren aber sollen durch die lilianische Schaltrechnung

k Tage unterdrückt werden, daher noch $e'-k$ übrig bleiben. Dann wird der 0. Tag des historischen Jahres a um e Tage hinter, und zugleich um $e'-k$ Tage vor, also um $e'-k-e$ Tage vor den 28 März gerückt sein, somit auf den $28-(e'-k-e)=28+k-(e'-e)^{\text{ten}}$ März treffen.

Die bis zum Anfange des historischen Jahres a oder bis zum März des Jahres a' nach Chr. ausgemerzten k Schalttage ergeben sich, vermöge §. 47, II, (61), aus dem Ausdrucke

$$k=\mathrm{q}\frac{a'}{100}-\mathrm{q}\frac{\mathrm{q}\frac{a'}{100}}{4}-2,$$

wenn $a' \overline{\gtrless} 1583$ ist. Vor dieser Zeit und selbst nach ihr, wenn man die julianische Schaltrechnung anwendet, bleibt immer $k=0$. Da hier k jederzeit für den März des Jahres a' bestimmt werden soll, so gilt sein Ausdruck auch noch für die durch 400 untheilbaren Säcularjahre hinter 1582.

Das Jahr 721 vor Chr. ist ein Schaltjahr, folglich geht dem zweiten historischen Jahre ein julianischer Schalttag vor, und daher ist die Menge der julianischen Schalttage bis zum Jahre a

$$e'=\mathrm{q}\frac{a+2}{4}=\mathrm{q}\frac{a'}{4}+181.$$

Die Anzahl der historischen Schalttage vor dem Jahre a fanden wir bereits in Art. 9

$$e=\mathrm{q}\frac{a-1-\mathrm{q}\frac{a-3}{32}}{4}=\mathrm{q}\frac{a'-1-\mathrm{q}\frac{a'+15}{32}}{4}+175.$$

Sei $\mathrm{q}\frac{a}{128}=\pi$ und $\mathrm{r}\frac{a}{128}=\alpha$, also $a=128\pi+\alpha$, folglich das Jahr a das α^{te} nach der π^{ten} oder in der $\pi+1^{\text{sten}}$ 128jährigen Schaltperiode; so findet sich der Unterschied

$$e'-e=\pi+\varepsilon,$$

wenn

$$\varepsilon=\mathrm{q}\frac{\alpha+2}{4}-\mathrm{q}\frac{\alpha-1-\mathrm{q}\frac{\alpha-3}{32}}{4}$$

$$=-\mathrm{q}\frac{\mathrm{q}\frac{\alpha-3}{32}+\mathrm{r}\frac{1-\alpha}{4}}{4}+1$$

angibt, wie vielmal in der laufenden 128jährigen Periode öfter nach der julianischen als nach der historischen Weise eingeschaltet wird, nachdem in jeder der bereits verflossenen π solchen Perioden ein, also in sämmtlichen diesen Perioden, π julianische Schalttage mehr als historische eingeschoben wurden.

Der Ueberschuß ε zeigt sich mit Ausschluß von 31 Jahren, daher in der Regel $=1$, und ausnahmsweise ist entweder $\varepsilon=0$, wenn

$$\mathrm{q}\frac{\alpha-3}{32}=0 \text{ und } \mathrm{r}\frac{1-\alpha}{4}=0,$$

also wenn $\alpha<35$ und $\alpha\equiv 1, \bmod 4$ ist,

folglich in den 9 Jahren

$$\alpha = 1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ 25,\ 29,\ 33,$$

vor 35, die durch 4 getheilt 1 zum Reste lassen; oder es ist $\varepsilon = 2$, sowohl

wenn $q\frac{\alpha-3}{32} = 2$ und $r\frac{1-\alpha}{4} = 3$,

nemlich wenn $\alpha > 66,\ \alpha < 99$ und $\alpha \equiv 2$, mod 4,

als auch wenn $q\frac{\alpha-3}{32} = 3$ und $r\frac{1-\alpha}{4} = 3$ oder 2,

nemlich wenn $\alpha > 98,\ \alpha < 128$ und $\equiv 2$ oder 3, mod 4 ist,

folglich sowohl in den 8 Jahren

$$\alpha = 70,\ 74,\ 78,\ 82,\ 86,\ 90,\ 94,\ 98,$$

von 67 bis 98, die durch 4 getheilt 2 zum Reste geben, als auch in den 14 Jahren

$$\alpha = 102, 103, 106, 107, 110, 111, 114, 115, 118, 119, 122, 123, 126, 127,$$

nach 98, die durch 4 getheilt 2 oder 3 zum Reste lassen.

14.

Fortsezung.

Diesen Bestimmungen zu Folge trifft der 0. Tag des ersten Monates im historischen Jahre a auf den $28 + k - \pi - \varepsilon^{\text{ten}}$ März des Jahres $a' = a - 722$ nach Chr.; und darnach verfaßt man leicht folgende

1. Tafel zur Reduction der historischen Zeitrechnung auf die christliche.

Histor. Jahr a. t^{ter} Tag im		Nach Chr. Geb. Jahr a' n. St.
1. Monat	$t + k + 28 - \pi - \varepsilon$ März	$= t + k - 3 - \pi - \varepsilon$ Apr.
2. —	$t + k + 27 - \pi - \varepsilon$ Apr.	$= t + k - 3 - \pi - \varepsilon$ Mai
3. —	$t + k + 28 - \pi - \varepsilon$ Mai	$= t + k - 3 - \pi - \varepsilon$ Juni
4. —	$t + k + 27 - \pi - \varepsilon$ Juni	$= t + k - 3 - \pi - \varepsilon$ Jul.
5. —	$t + k + 28 - \pi - \varepsilon$ Jul.	$= t + k - 3 - \pi - \varepsilon$ Aug.
6. —	$t + k + 27 - \pi - \varepsilon$ Aug.	$= t + k - 4 - \pi - \varepsilon$ Sept.
7. —	$t + k + 27 - \pi - \varepsilon$ Sept.	$= t + k - 3 - \pi - \varepsilon$ Oct.
8. —	$t + k + 27 - \pi - \varepsilon$ Oct.	$= t + k - 4 - \pi - \varepsilon$ Nov.
9. —	$t + k + 27 - \pi - \varepsilon$ Nov.	$= t + k - 3 - \pi - \varepsilon$ Dec.
		Jahr $a' + 1$
10. —	$t + k + 27 - \pi - \varepsilon$ Dec.	$= t + k - 4 - \pi - \varepsilon$ Jan.
11. —	$t + k + 27 - \pi - \varepsilon$ Jan.	$= t + k - 4 - \pi - \varepsilon$ Febr.
12. —	$t + k + 26 - \pi - \varepsilon$ Febr.	$= t + k - 2 - \pi - \varepsilon - I$ Mrz.

$a = a' + 722$, $\quad a' = a - 722$.

$I =$ Anzahl der Schalttage des Jahres $a' + 1$ nach Chr.

$\pi = q\frac{a}{128}$.

Daraus ergibt sich sonach umgekehrt folgende

2. Tafel zur Reduction der christlichen Zeitrechnung auf die historische.

N. Chr. Geb. Jahr a' n. St.	Tag. Historisches Jahr a — 1.	$a = a' + 722$, $a' = a - 722$.
t Januar	$t+\pi+\varepsilon+4-k+j-i$ im 10. Monat	$= t+\pi+\varepsilon-27-k+j-i$ im 11. Monat
t Februar	$t+\pi+\varepsilon+4-k+j-i$ im 11. Monat	$= t+\pi+\varepsilon-26-k+j-i$ im 12. Monat.
		Histor. Jahr a.
t März	$t+\pi+\varepsilon+2-k+j$ im 12. Monat	$= t+\pi+\varepsilon-28-k$ im 1. Monat
t April	$t+\pi+\varepsilon+3-k$ im 1. Monat	$= t+\pi+\varepsilon-27-k$ im 2. Monat
t Mai	$t+\pi+\varepsilon+3-k$ im 2. Monat	$= t+\pi+\varepsilon-28-k$ im 3. Monat
t Juni	$t+\pi+\varepsilon+3-k$ im 3. Monat	$= t+\pi+\varepsilon-27-k$ im 4. Monat
t Juli	$t+\pi+\varepsilon+3-k$ im 4. Monat	$= t+\pi+\varepsilon-28-k$ im 5. Monat
t August	$t+\pi+\varepsilon+3-k$ im 5. Monat	$= t+\pi+\varepsilon-27-k$ im 6. Monat
t September	$t+\pi+\varepsilon+4-k$ im 6. Monat	$= t+\pi+\varepsilon-27-k$ im 7. Monat
t October	$t+\pi+\varepsilon+3-k$ im 7. Monat	$= t+\pi+\varepsilon-27-k$ im 8. Monat
t November	$t+\pi+\varepsilon+4-k$ im 8. Monat	$= t+\pi+\varepsilon-27-k$ im 9. Monat
t December	$t+\pi+\varepsilon+3-k$ im 9. Monat	$= t+\pi+\varepsilon-27-k$ im 10. Monat.

$i =$ Anzahl der Schalttage des Jahres a' nach Chr.

$j =$ » » » » historischen Jahres $a - 1$.

Im gregorianischen Kalender findet man für $a' \geqq 1583$, wenn man e und e' durch a' ausdrückt,

$$\pi + \varepsilon - k = e' - e - k = 8 + g,$$

wofern man
$$g = q\frac{a' + 375 + 800R\frac{-a'}{4} + 32r\frac{a'}{100} - 8r\frac{a'}{400}}{3200}$$
sezt.

Vor dem Jahre $a' = 2036$ ist fast immer $g = 1$, selten $g = 0$, mithin meistens $\pi + \varepsilon - k = 9$, selten $= 8$. Blos in den Schaltjahren von 1652 bis 1696, und von 1780 bis 1796, so wie in den, nach Schaltjahren kommenden, Gemeinjahren von 1681 bis 1697 ist $g = 2$, also $\pi + \varepsilon - k = 10$.

Beispiel. Die dschelalische Aere der Perser fing mit der Frühlingsnachtgleiche am 15 März 1079 nach Chr. an; wann nach der historischen Zeitrechnung?

Hier ist $a' = 1079$, $a = 1079 + 722 = 1801 = 128.14 + 9$, $\pi = 14$, $\alpha = 9$, also $\varepsilon = 0$; ferner hat man $k = 0$, folglich 15 März $= 15 + 14 + 0 - 28 - 0 = 1^{\text{ster}}$ Tag im 1. Monate. Die dschelalische Aere fängt daher genau mit dem 1801. Jahre der historischen Aere, folglich um volle 1800 historische Jahre oder um 18 historische Jahrhunderte später als die historische Aere an.

Da die in beiden Zeitrechnungen übliche Schaltrechnung, wenigstens für die Zeit ihrer bisherigen Anwendung, höchst nahe gleiche Schärfe besizen; so kann man die Jahre derselben gleichzeitig endigend und anfangend, also wenn auch nicht in der Eintheilung, so wenigstens in der Dauer für übereinstimmend ansehen; folglich mit ziemlicher Genauigkeit einen Tag eines dschelalischen Jahres A mit dem ebenso vielten Tage des historischen Jahres A + 1800 zusammen fallend annehmen. So z. E. wenn man den im 3. Beispiele des §. 243 angeführten 23 Erdibihischtmah oder den 53. Tag 664 seit Dschelaleddin, als den 53. Tag, oder als den 23. im zweiten Monate des historischen Jahres 2464 betrachtet, so ist hier

$$a = 2464 = 128.19 + 32,$$

also
$$\pi = 19,\ \alpha = 32,\ \varepsilon = 1,$$

dann
$$a' = 2464 - 722 = 1742,\ k = 11,$$

folglich der 23. Tag im 2. Monate des historischen Jahres 2464

$$= 23 + 11 - 3 - 19 - 1 = 11 \text{ Mai}$$

des Jahres 1742 nach Chr. Der genaue Tag ist der 12 Mai, mithin nur um einen Tag später.

Anmerkung. Daß man die bei solchen Reductionen in Anwendung kommenden Zahlen leicht in bequeme Tafeln bringen und dadurch die Rechnung sehr erleichtern oder wohl gar gänzlich beseitigen könne, begreift sich von selbst.

Anhang.

Tafeln zur christlichen Festrechnung.

1. Tafel.

Sonntagsbuchstaben in den Jahren nach Christo.

Jahrhunderte nach Chr., oder Hunderte des Jahres n. Chr.							Jahr im Jahrhunderte						
							0	1	2	3	9	4	5
							6	7	13	8	15	10	11
							17	12	19	14	20	21	16
							23	18	24	25	26	27	22
							28	29	30	31	37	32	33
							34	35	41	36	43	38	39
							45	40	47	42	48	49	44
							51	46	52	53	54	55	50
							56	57	58	59	65	60	61
							62	63	69	64	71	66	67
							73	68	75	70	76	77	72
							79	74	80	81	82	83	78
							84	85	86	87	93	88	89
							90	91	97	92	99	94	95
							.	96	.	98	.	.	.
im julianischen Kalender							Sonntagsbuchstabe						
0	7	14	21	28	35	42	C	B	A	G	F	E	D
1	8	15	22	29	36	43	D	C	B	A	G	F	E
2	9	16	23	30	37	44	E	D	C	B	A	G	F
3	10	17	24	31	38	45	F	E	D	C	B	A	G
4	11	18	25	32	39	46	G	F	E	D	C	B	A
5	12	19	26	33	40	47	A	G	F	E	D	C	B
6	13	20	27	34	41	48	B	A	G	F	E	D	C
im gregorianischen Kalender							Sonntagsbuchstabe						
15	19	23	27	31	35	39	G	F	E	D	C	B	A
16	20	24	28	32	36	40	A	G	F	E	D	C	B
17	21	25	29	33	37	41	C	B	A	G	F	E	D
18	22	26	30	34	38	42	E	D	C	B	A	G	F

2.

Zur alexandrinischen Osterrechnung nach der julianischen Jahrform,

Goldene Zahl, Numerus aureus. Alexandrin. Mondcirkel, Cyclus decemnovalis.	Mondcirkel der Juden und griechischen Christen, Cyclus lunae.	Januarstag des 1. Neumonds im Jahre / Märztag » 3. » »	Epakte: alexandrinische am 1 Januar	Epakte: dionysische am 23 März	Epakte: julianische am 1 Januar (russ. Osnovanie).	Epakte: im russischen Kalender	Ostervollmond, Luna XIV. Ostergrenze, Terminus paschalis.	Sonntags- / Concurrente / Wochentag des 0 Januars / Sonnencirkel, — Abstand der Ostergr. vom 21 Mrz. p	Claves terminorum.
1	17	23	8	0	11	10	5 April	15	26
2	18	12	19	11	22	29	25 März	4	15
3	19	1	30	22	3	18	13 April	23	34
4	1	20	11	3	14	7	2 April	12	23
5	2	9	22	14	25	26	22 März	1	12
6	3	28	3	25	6	15	10 April	20	31
7	4	17	14	6	17	4	30 März	9	20
8	5	6	25	17	28	23	18 April	28	39
9	6	25	6	28	9	12	7 April	17	28
10	7	14	17	9	20	1	27 März	6	17
11	8	3	28	20	1	20	15 April	25	36
12	9	22	9	1	12	9	4 April	14	25
13	10	11	20	12	23	28	24 März	3	14
14	11	30	1	23	4	17	12 April	22	33
15	12	19	12	4	15	6	1 April	11	22
16	13	8	23	15	26	25	21 März	0	11
17	14	27	4	26	7	14	9 April	19	30
18	15	16	15	7	18	3	29 März	8	19
19	16	5	26	18	29	22	17 April	27	38

Tafel.

oder zur Bestimmung der Festzahlen im julianischen Kalender.

buchstabe		G	F	E	D	C	B	A
(russisch Wrutzeleto)		7	1	2	3	4	5	6
in Gemeinjahren		Son.	Mon.	Din.	Mitt.	Don.	Freit.	Sam.
in Schaltjahren		Sam.	Son.	Mon.	Din.	Mitt.	Don.	Freit.
cyclus solis.		6 12 17 23	1 7 18 24	2 8 13 19	3 14 20 25	4 9 15 26	10 16 21 27	5 11 22 28
Wochen-buchstabe der Oster-grenze.	Regu-lares paschae	Festzahl v Osternummer, Kalenderschlüssel (ruff. Klutsch-Granitz).						
D	5	18	17	16	22	21	20	19
G	1	11	10	9	8	7	6	5
E	6	25	24	30	29	28	27	26
A	2	18	17	16	15	14	13	19
D	5	4	3	2	8	7	6	5
B	3	25	24	23	22	21	27	26
E	6	11	10	16	15	14	13	12
C	4	32	31	30	29	35	34	33
F	7	18	24	23	22	21	20	19
B	3	11	10	9	8	7	13	12
G	1	32	31	30	29	28	27	26
C	4	18	17	16	15	21	20	19
F	7	4	10	9	8	7	6	5
D	5	25	24	23	29	28	27	26
G	1	18	17	16	15	14	13	12
C	4	4	3	2	1	7	6	5
A	2	25	24	23	22	21	20	26
D	5	11	10	9	15	14	13	12
B	3	32	31	30	29	28	34	33

Tafel 3. Verzeichniß der alexandrinischen Festzahlen im julianischen Kalender.

Jahr nach Christi Geburt						0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	532	1064	1596	2128	2660	21*	6	26	18	2*	22	14	34	18*	10
10	542	1074	1606	2138	2670	30	15	6*	26	18	3	22*	14	34	19
20	552	1084	1616	2148	2680	10*	30	15	7	26*	11	31	23	7*	27
30	562	1094	1626	2158	2690	19	4	23*	15	7	20	11*	31	16	8
40	572	1104	1636	2168	2700	27*	19	4	24	15*	35	20	12	31*	16
50	582	1114	1646	2178	2710	8	28	12*	4	24	9	28*	20	5	25
60	592	1124	1656	2188	2720	16*	8	21	13	32*	24	9	29	20*	5
70	602	1134	1666	2198	2730	25	17	1*	21	13	33	17*	9	29	14
80	612	1144	1676	2208	2740	5*	25	10	30	21*	13	26	18	9*	29
90	622	1154	1686	2218	2750	14	6	25*	10	30	22	6*	26	18	3
100	632	1164	1696	2228	2760	22*	14	34	19	10*	30	15	7	26*	18
110	642	1174	1706	2238	2770	3	23	14*	34	19	14	30*	15	7	27
120	652	1184	1716	2248	2780	11*	31	23	8	27*	19	4	24	15*	7
130	662	1194	1726	2258	2790	20	12	31*	16	8	28	19*	4	24	16
140	672	1204	1736	2268	2800	35*	20	12	32	16*	8	28	13	4*	24
150	686	1214	1746	2278	2810	9	29	20*	5	25	17	8*	21	13	33
160	692	1224	1756	2288	2820	24*	9	29	21	5*	25	17	2	21*	13
170	702	1234	1766	2298	2830	33	18	9*	29	14	6	25*	10	30	22
180	712	1244	1776	2308	2840	13*	26	18	10	29*	14	6	26	10*	30
190	722	1254	1786	2318	2850	22	7	26*	18	3	23	14*	34	19	11
200	732	1264	1796	2328	2860	30*	15	7	27	18*	3	23	15	34*	19
210	742	1274	1806	2338	2870	11	24	15*	7	27	12	31*	23	8	28
220	752	1284	1816	2348	2880	19*	4	24	16	7*	20	12	32	16*	8
230	762	1294	1826	2358	2890	28	13	4*	24	16	29	20*	12	32	17
240	772	1304	1836	2368	2900	8*	28	13	5	24*	9	29	21	5*	25
250	782	1314	1846	2378	2910	17	2	21*	13	33	18	9*	29	21	6
260	792	1324	1856	2388	2920	25*	17	2	22	13*	33	18	10	29*	14
270	802	1334	1866	2398	2930	6	26	10*	30	22	7	26*	18	10	23
280	812	1344	1876	2408	2940	14*	6	26	11	30*	22	7	27	18*	3
290	822	1334	1886	2418	2950	23	15	34*	19	11	31	15*	7	27	12
300	832	1354	1896	2428	2960	3*	23	15	28	19*	11	24	16	7*	27
310	842	1364	1906	2438	2970	12	32	23*	8	28	20	4*	24	16	1
320	852	1374	1916	2448	2980	20*	12	32	17	8*	28	13	5	24*	16
330	862	1384	1926	2458	2990	29	21	12*	32	17	9	28*	13	5	25
340	872	1394	1936	2468	3000	9*	29	21	6	25*	17	2	22	13*	33
350	882	1404	1946	2478	3010	18	10	29*	21	6	26	17*	2	22	14
360	892	1414	1956	2488	3020	33*	18	10	30	14*	6	26	11	30*	22
370	902	1424	1966	2498	3030	7	27	18*	10	23	15	6*	26	11	31
380	912	1434	1976	2508	3040	22*	7	27	19	3*	23	15	35	19*	11
390	922	1444	1986	2518	3050	31	16	7*	27	12	4	23*	15	28	20
400	932	1454	1996	2528	3060	11*	24	16	8	27*	12	32	24	8*	28
410	942	1464	2006	2538	3070	20	5	24*	16	1	21	12*	32	17	9
420	952	1474	2016	2548	3080	28*	13	5	25	16*	29	21	13	32*	17
430	962	1484	2026	2558	3090	9	29	13*	5	25	10	29*	24	6	26
440	972	1494	2036	2568	3100	17*	2	22	14	33*	18	10	30	21*	6
450	982	1504	2046	2578	3110	26	18	2*	22	14	34	18*	10	30	15
460	992	1514	2056	2588	3120	6*	26	11	31	22*	7	27	19	10*	23
470	1002	1524	2066	2598	3130	15	7	26*	11	31	16	7*	27	19	4
480	1012	1534	2076	2608	3140	23*	15	35	20	11*	31	16	8	27*	12
490	1022	1544	2086	2618	3150	4	24	15*	28	20	5	24*	16	8	21
500	1032	1564	2096	2628	3160	12*	32	24	9	28*	20	5	25	16*	1
510	1042	1574	2106	2638	3170	21	13	32*	17	9	29	13*	5	25	10
520	1052	1584	2116	2648	3180	29*	21	13	26	17*	9	29	14	5*	25
530	1062	1594	2126	2658	3190	10	30	21*	6	26	18	2*	22	14	34

4. Tafel.

Zur Bestimmung der Festzahl im gregorianischen Kalender.

Hunderte des Jahres n. Chr.					Nummer der lilian. Epaktenreihe.	Zusatz zur goldenen Zahl.	Goldene Zahl N sammt Zusatz Z		Lilianische Epakte.	Vorrückung der Ostergrenze.	Sonntagsbuchstabe						
											G	F	E	D	C	B	A
s					M	Z	N+Z		E	p—δp	Festzahl v						
15	16		85	86	22	13	1	31	8	15	18	17	16	22	21	20	19
17	18	87	88	89	23	2	2	32	19	4	11	10	9	8	7	6	5
19	20	21		90	24	21′	3	33	0	23	25	24	30	29	28	27	26
22	24	91	92	93	25	10	4	34	11	12	18	17	16	15	14	13	19
23	25		94	96	26	29	5	35	22	1	4	3	2	8	7	6	5
26	27	28	95	97	27	18	6	36	3	20	25	24	23	22	21	27	26
29	30	98	99	100	28	7	7	37	14	9	11	10	16	15	14	13	12
31	32	33			29	26′	8	38	25,26′	28,27′	32	31	30	29	35,28′	34	33
34	36				30	15	9	39	6	17	18	24	23	22	21	20	19
35	37				1	4	10	40	17	6	11	10	9	8	7	13	12
38	39	40			2	23′	11	41	28	25	32	31	30	29	28	27	26
41					3	12	12	42	9	14	18	17	16	15	21	20	19
42	43	44			4	1	13	43	20	3	4	10	9	8	7	6	5
45	46				5	20′	14	44	1	22	25	24	23	29	28	27	26
47	48	49			6	9	15	45	12	11	18	17	16	15	14	13	12
50	52				7	28	16	46	23	0	4	3	2	1	7	6	5
51	53				8	17	17	47	4	19	25	24	23	22	21	20	26
54	55	56			9	6	18	48	15	8	11	10	9	15	14	13	12
57	58				10	25′	19		26	27	32	31	30	29	28	34	33
59	60	61			11	14	20		7	16	18	17	23	22	21	20	19
62	64				12	3	21		18	5	11	10	9	8	7	6	12
63	65				13	22′	22		29	24	25	31	30	29	28	27	26
66	68				14	11	23		10	13	18	17	16	15	14	20	19
67	69				15	0	24		21	2	4	3	9	8	7	6	5
70	71	72			16	19′	25		2	21	25	24	23	22	28	27	26
73	74				17	8	26		13	10	11	17	16	15	14	13	12
75	76	77			18	27	27		25	28	32	31	30	29	35	34	33
78	80				19	16	28		5	18	25	24	23	22	21	20	19
79	81				20	5	29		16	7	11	10	9	8	14	13	12
82	83	84			21	24′	30		27	26	32	31	30	29	28	27	33

5. Tafel. Verzeichniß der Festzahlen im gregorianischen Kalender vom Jahre 1582 bis 2499 n. Chr.

Jahr n. Chr.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1580	.	.	28	20	11*	31	16	8	27*	12
1590	32	24	8*	28	20	5	24*	16	1	21
1600	12*	32	17	9	28*	20	5	25	16*	29
1610	21	13	32*	17	9	29	13*	5	25	10
1620	29*	21	6	26	17*	9	22	14	33*	25
1630	10	30	21*	6	26	18	2*	22	14	34
1640	18*	10	30	15	6*	26	11	31	22*	14
1650	27	19	10*	23	15	7	26*	11	31	23
1660	7*	27	19	4	23*	15	35	20	11*	31
1670	16	8	27*	12	4	24	15*	28	20	12
1680	31*	16	8	28	12*	32	24	9	28*	20
1690	5	25	16*	1	21	13	32*	17	9	29
1700	21	6	26	18	2*	22	14	34	18*	10
1710	30	15	6*	26	11	31	22*	7	27	19
1720	10*	23	15	7	26*	11	31	23	7*	27
1730	19	4	23*	15	35	20	11*	31	16	8
1740	27*	12	4	24	15*	28	20	12	24*	16
1750	8	21	12*	32	24	9	28*	20	5	25
1760	16*	1	21	13	32*	17	9	29	13*	5
1770	25	10	29*	21	13	26	17*	9	29	14
1780	5*	25	10	30	21*	6	26	18	2*	22
1790	14	34	18*	10	30	15	6*	26	18	3
1800	23	15	28	20	11*	24	16	8	27*	12
1810	32	24	8*	28	20	5	24*	16	1	21
1820	12*	32	17	9	28*	13	5	25	16*	29
1830	21	13	32*	17	9	29	13*	5	25	10
1840	29*	21	6	26	17*	2	22	14	33*	18
1850	10	30	21*	6	26	18	2*	22	14	34
1860	18*	10	30	15	6*	26	11	31	22*	7
1870	27	19	10*	23	15	7	26*	11	31	23
1880	7*	27	19	4	23*	15	35	20	11*	31
1890	16	8	27*	12	4	24	15*	28	20	12
1900	25	17	9	22	13*	33	25	10	29*	21
1910	6	26	17*	2	22	14	33*	18	10	30
1920	14*	6	26	11	30*	22	14	27	18*	10
1930	30	15	6*	26	11	31	22*	7	27	19
1940	3*	23	15	35	19*	11	31	16	7*	27
1950	19	4	23*	15	28	20	11*	31	16	8
1960	27*	12	32	24	8*	28	20	5	24*	16
1970	8	21	12*	32	24	9	28*	20	5	25
1980	16*	29	21	13	32*	17	9	29	13*	5
1990	25	10	29*	21	13	26	17*	9	22	14
2000	33*	25	10	30	21*	6	26	18	2*	22
2010	14	34	18*	10	30	15	6*	26	11	31
2020	22*	14	27	19	10*	30	15	7	26*	11

Jahr n. Chr.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2030	31	23	7*	27	19	4	23*	15	35	20
2040	11*	31	16	8	27*	19	4	24	15*	28
2050	20	12	31*	16	8	28	12*	32	24	9
2060	28*	20	5	25	16*	8	21	13	32*	24
2070	9	29	20*	5	25	17	29*	21	13	33
2080	17*	9	29	14	5*	25	10	30	21*	13
2090	26	18	9*	22	14	34	25*	10	30	22
2100	7	27	19	4	23*	15	28	20	11*	31
2110	16	8	27*	12	32	24	8*	28	20	5
2120	24*	16	8	21	12*	32	24	9	28*	20
2130	5	25	16*	29	21	13	32*	17	9	29
2140	13*	5	25	10	29*	21	13	26	17*	9
2150	22	14	33*	25	10	30	21*	6	26	18
2160	2*	22	14	34	18*	10	30	15	6*	26
2170	11	31	22*	14	27	19	10*	30	15	7
2180	26*	11	31	23	7*	27	19	4	23*	15
2190	35	20	11*	31	16	8	27*	19	4	24
2200	16	29	21	13	32*	17	9	29	13*	5
2210	25	10	29*	21	6	26	17*	9	22	14
2220	33*	25	10	30	21*	6	26	18	2*	22
2230	14	34	18*	10	30	15	6*	26	11	31
2240	22*	14	27	19	10*	23	15	7	26*	11
2250	31	23	7*	27	19	4	23*	15	35	20
2260	11*	31	16	8	27*	12	4	24	15*	28
2270	20	12	31*	16	8	28	12*	32	24	9
2280	28*	20	5	25	16*	1	21	13	32*	17
2290	9	29	20*	5	25	17	29*	21	13	26
2300	18	10	30	15	6*	26	11	31	22*	7
2310	27	19	10*	23	15	7	26*	11	31	16
2320	7*	27	19	4	23*	15	35	20	11*	31
2330	16	8	27*	12	4	24	15*	28	20	5
2340	24*	16	8	21	12*	32	24	9	28*	20
2350	5	25	16*	1	21	13	32*	17	9	29
2360	13*	5	25	10	29*	21	13	26	17*	9
2370	29	14	5*	25	10	30	21*	6	26	18
2380	2*	22	14	34	18*	10	30	15	6*	26
2390	18	3	22*	14	27	19	10*	30	15	7
2400	26*	11	31	23	7*	27	19	4	23*	15
2410	35	20	11*	31	16	8	27*	12	4	24
2420	15*	28	20	12	31*	16	8	28	12*	32
2430	24	9	28*	20	5	25	16*	1	21	13
2440	32*	17	9	29	20*	5	25	17	29*	21
2450	13	26	17*	9	29	14	5*	25	10	30
2460	21*	6	26	18	9*	22	14	34	25*	10
2470	30	15	6*	26	18	3	22*	14	34	19
2480	10*	30	15	7	26*	11	31	23	14*	27
2490	19	4	23*	15	7	20	11*	31	23	8

6. Tafel. Immerwährender Wochentags-Kalender.

Januar in Gemeinj. (31) October (31)	0 7 14 21 28	1 8 15 22 29	2 9 16 23 30	3 10 17 24 31	4 11 18 25	5 12 19 26	6 13 20 27
Januar in Schaltj. (31) April (30) Juli (31)	1 8 15 22 29	2 9 16 23 30	3 10 17 24 31	4 11 18 25	5 12 19 26	6 13 20 27	0 7 14 21 28
September (30) December (31)	2 9 16 23 30	3 10 17 24 31	4 11 18 25	5 12 19 26	6 13 20 27	0 7 14 21 28	1 8 15 22 29
Juni (30)	3 10 17 24	4 11 18 25	5 12 19 26	6 13 20 27	0 7 14 21 28	1 8 15 22 29	2 9 16 23 30
Februar in Gemeinj. (28) März (31) November (30)	4 11 18 25	5 12 19 26	6 13 20 27	0 7 14 21 28	1 8 15 22 29	2 9 16 23 30	3 10 17 24 31
Februar in Schaltj. (29) August (31)	5 12 19 26	6 13 20 27	0 7 14 21 28	1 8 15 22 29	2 9 16 23 30	3 10 17 24 31	4 11 18 25
Mai (31)	6 13 20 27	0 7 14 21 28	1 8 15 22 29	2 9 16 23 30	3 10 17 24 31	4 11 18 25	5 12 19 26

Concurrentes C	Sonntagsb. L	Festzahl v												
3	D	1	8	15	22	29	Mittwoch	Donnerst.	Freitag	Samstag	Sonntag	Montag	Dinstag
2	E	2	9	16	23	30	Dinstag	Mittwoch	Donnerst.	Freitag	Samstag	Sonntag	Montag
1	F	3	10	17	24	31	Montag	Dinstag	Mittwoch	Donnerst.	Freitag	Samstag	Sonntag
7	G	4	11	18	25	32	Sonntag	Montag	Dinstag	Mittwoch	Donnerst.	Freitag	Samstag
6	A	5	12	19	26	33	Samstag	Sonntag	Montag	Dinstag	Mittwoch	Donnerst	Freitag
5	B	6	13	20	27	34	Freitag	Samstag	Sonntag	Montag	Dinstag	Mittwoch	Donnerst.
4	C	7	14	21	28	35	Donnerst.	Freitag	Samstag	Sonntag	Montag	Dinstag	Mittwoch

Des Monatstages Wochentag $\equiv 1, \ldots 7 \equiv$ mod 7.	$C+1$ $-L+1$ $-v-2$	$C+2$ $-L+2$ $-v-1$	$C+3$ $-L+3$ $-v$	$C-3$ $-L-3$ $-v+1$	$C-2$ $-L-2$ $-v+2$	$C-1$ $-L-1$ $-v+3$	C $-L$ $-v-$
Abstand d. Wochent. h zunächst Monatst.) $\equiv 1, \ldots 7$ ") $\equiv$ mod 7	$v+h+2$ $-v-h-2$	$v+h+1$ $-v-h-1$	$v+h$ $-v-h$	$v+h-1$ $-v-h+1$	$v+h-2$ $-v-h+2$	$v+h-3$ $-v-h+3$	$v+h+$ $-v-h-$

Tafel 7.

Allgemeiner Kalender der Christen überhaupt und der Katholiken insbesondere.

Modul der Congruenz = 7.

Argumente: v, Festzahl,
i, Anzahl der Schalttage des Jahres, in Gemeinjahren 0,
in Schaltjahren 1.

Sonntagsbuchstabe des Jahres $L \equiv v + 3$.

Ausnahmsweiser Sonntagsbuchstabe eines Schaltjahres vom Anfange des Jahres bis 24 Februar $\equiv v + 3 + i$.

I.

Das Jahr hat $365 + i$ Tage;
fängt an mit dem Wochentage $\equiv - v - i - 1$,
endigt sich mit dem Wochentage $\equiv - v - 1$;
enthält den h^{ten} Wochentag

$$52 + \mathfrak{q}\frac{v+h+i+1}{7} - \mathfrak{q}\frac{v+h}{7} = 52 + \mathfrak{q}\frac{i + \mathfrak{R}\frac{v+h+1}{7}}{7} \text{ Mal};$$

überhaupt kommt im Gemeinjahre der Wochentag $\equiv - v - 1$, womit es anfängt und endet, so wie im Schaltjahre, dasjenige Paar der Wochentage $\equiv - v - 2$ und $\equiv - v - 1$, mit denen es anfängt und endet, 53 Mal, jeder andere Wochentag aber 52 Mal vor.

Setzt man Kürze halber

$$\mathfrak{R}\frac{v+i+h+2}{7} = t,$$

so ist

Wochentag h	am
1.	t Januar
5.	t + 28 Januar = t − 3 Februar
6.	t + 4 Februar
9.	t + 25 Februar = t − i − 3 März
10.	t − i + 4 März
13.	t − i + 25 März = t − i − 6 April
14.	t − i + 1 April
18.	t − i + 29 April = t − i − 1 Mai
19.	t − i + 6 Mai

Wochentag h	am
22.	t — i + 27 Mai = t — i — 4 Juni
23.	t — i + 3 Juni
26.	t — i + 24 Juni = t — i — 6 Juli
27.	t — i + 1 Juli
31.	t — i + 29 Juli = t — i — 2 Aug.
32.	t — i + 5 Aug.
35.	t — i + 26 Aug. = t — i — 5 Sept.
36.	t — i + 2 Sept.
40.	t — i + 30 Sept. = t — i — 7 Oct.
41.	t — i + 7 Oct.
44.	t — i + 28 Oct. = t — i — 3 Nov.
45.	t — i + 4 Nov.
48.	t — i + 25 Nov. = t — i — 5 Dec.
49.	t — i + 2 Dec.
52.	t — i + 23 Dec.
53.	t — i + 30 Dec.
letzter	$24 + R\frac{v+h+1}{7}$ Dec.

II.

Ueber die Wochentage der einzelnen Monate läßt sich Folgendes bemerken:

Der Monat	fängt an mit dem Wochentage	endigt sich mit dem Wochentage
Januar	≡ — v — i — 1	≡ — v — i + 1
Februar	≡ — v — i + 2	≡ — v + 1
März	≡ — v + 2	≡ — v — 3
April	≡ — v — 2	≡ — v — 1
Mai	≡ — v	≡ — v + 2
Juni	≡ — v + 3	≡ — v — 3
Juli	≡ — v — 2	≡ — v
August	≡ — v + 1	≡ — v + 3
September	≡ — v — 3	≡ — v — 2
October	≡ — v — 1	≡ — v + 1
November	≡ — v + 2	≡ — v + 3
December	≡ — v — 3	≡ — v — 1.

III.

Im Monat	ist der erste	ist der lezte
	Wochentag h am	
Januar	$\mathfrak{R}\frac{v+i+h+2}{7}$	$24+\mathfrak{R}\frac{v+i+h-1}{7}$
Februar	$\mathfrak{R}\frac{v+i+h-1}{7}$	$21+i+\mathfrak{R}\frac{v+h-1}{7}$
März	$\mathfrak{R}\frac{v+h-1}{7}$	$24+\mathfrak{R}\frac{v+h+3}{7}$
April	$\mathfrak{R}\frac{v+h+3}{7}$	$23+\mathfrak{R}\frac{v+h+1}{7}$
Mai	$\mathfrak{R}\frac{v+h+1}{7}$	$24+\mathfrak{R}\frac{v+h-2}{7}$
Juni	$\mathfrak{R}\frac{v+h-2}{7}$	$23+\mathfrak{R}\frac{v+h+3}{7}$
Juli	$\mathfrak{R}\frac{v+h+3}{7}$	$24+\mathfrak{R}\frac{v+h}{7}$
August	$\mathfrak{R}\frac{v+h}{7}$	$24+\mathfrak{R}\frac{v+h-3}{7}$
September	$\mathfrak{R}\frac{v+h-3}{7}$	$23+\mathfrak{R}\frac{v+h+2}{7}$
October	$\mathfrak{R}\frac{v+h+2}{7}$	$24+\mathfrak{R}\frac{v+h-1}{7}$
November	$\mathfrak{R}\frac{v+h-1}{7}$	$23+\mathfrak{R}\frac{v+h-3}{7}$
December	$\mathfrak{R}\frac{v+h-3}{7}$	$24+\mathfrak{R}\frac{v+h+1}{7}$

Im Monate	befinden sich Wochentage h
Januar	$4+\mathfrak{q}\frac{v+i+h+1}{7}-\mathfrak{q}\frac{v+i+h-2}{7}=4+\mathfrak{q}\frac{3+\mathfrak{r}\frac{v+i+h-2}{7}}{7}$
Februar	$4+\mathfrak{q}\frac{v+i+h-2}{7}-\mathfrak{q}\frac{v+h-2}{7}=4+\mathfrak{q}\frac{i+\mathfrak{r}\frac{v+h-2}{7}}{7}$
März	$5+\mathfrak{q}\frac{v+h-2}{7}-\mathfrak{q}\frac{v+h+2}{7}=4+\mathfrak{q}\frac{3+\mathfrak{r}\frac{v+h+2}{7}}{7}$
April	$4+\mathfrak{q}\frac{v+h+2}{7}-\mathfrak{q}\frac{v+h}{7}=4+\mathfrak{q}\frac{2+\mathfrak{r}\frac{v+h}{7}}{7}$
Mai	$5+\mathfrak{q}\frac{v+h}{7}-\mathfrak{q}\frac{v+h+4}{7}=4+\mathfrak{q}\frac{3+\mathfrak{r}\frac{v+h-3}{7}}{7}$
Juni	$4+\mathfrak{q}\frac{v+h+4}{7}-\mathfrak{q}\frac{v+h+2}{7}=4+\mathfrak{q}\frac{2+\mathfrak{r}\frac{v+h+2}{7}}{7}$

Im Monate	befinden sich Wochentage h
Juli	$4+q\frac{v+h+2}{7}-q\frac{v+h-1}{7}=4+q\frac{3+r\frac{v+h-1}{7}}{7}$
August	$5+q\frac{v+h-1}{7}-q\frac{v+h+3}{7}=4+q\frac{3+r\frac{v+h+3}{7}}{7}$
September	$4+q\frac{v+h+3}{7}-q\frac{v+h+1}{7}=4+q\frac{2+r\frac{v+h+1}{7}}{7}$
October	$4+q\frac{v+h+1}{7}-q\frac{v+h-2}{7}=4+q\frac{3+r\frac{v+h-2}{7}}{7}$
November	$5+q\frac{v+h-2}{7}-q\frac{v+h+3}{7}=4+q\frac{2+r\frac{v+h+3}{7}}{7}$
December	$4+q\frac{v+h+3}{7}-q\frac{v+h}{7}=4+q\frac{3+r\frac{v+h}{7}}{7}.$

Ueberhaupt kommen in jedem Monate 5 Mal blos so viele und jene Wochentage vor, als der Monat Tage über 4 Wochen enthält, und mit denen er sowohl anfängt als auch endigt, folglich in einem 31tägigen Monate die 3, und in einem 30tägigen Monate die 2 ersten und letzten Wochentage, im 29tägigen Februar des Schaltjahres der erste und lezte Wochentag; die übrigen Wochentage, und im 28tägigen Februar des Gemeinjahres alle, wiederholen sich blos 4 Mal.

IV.

Bewegliche Feste.

Abkürzende Annahmen:

$$m=q\frac{v+i+2}{7}+2,$$

$$n=1+q\frac{v+i+2}{7}-q\frac{v+i+3}{7}=q\frac{6+r\frac{v+i+3}{7}}{7},$$

$$m-n=q\frac{v+i+3}{7}+1$$

$$l=r\frac{v+i+3}{7}.$$

A. Anfang des Jahres.

Neujahrssonntag, nach dem Introitus der Messe **Puer natus** genannt, der Sonntag, welcher nicht hinter, sondern vor oder höchstens auf Epiphania (6 Jan.), folglich immer vor den 7 Januar fällt, der n^{te} Sonntag im Jahre am l^{ten} Januar.

Wenn $v + i + 3$ durch 7 theilbar, also $v + i \equiv 4$, mod 7, nemlich in einem Gemeinjahre $v = 4, 11, 18, 25, 32$, und in einem Schaltjahre $v = 3, 10, 17, 24, 31$ ist, folglich wenn der im Januar giltige Sonntagsbuchstabe G ist, das Jahr mit einem Montage anfängt und sein erster Sonntag auf den 7 Januar fällt, wird $t = 0$, $n = 0$; in einem solchen Jahre gibt es keinen Neujahrssonntag.

Nach dem gregorianischen Kalender geschieht dies in den Jahren
1590, 96;
1601, 7, 18, 24, 29, 35, 46, 52, 57, 63, 74, 80, 85, 91;
1703, 14, 20, 25, 31, 42, 48, 53, 59, 70, 76, 81, 87, 98;
1810, 16, 21, 27, 38, 44, 49, 55, 66, 72, 77, 83, 94;
1900, 6, 12, 17, 23, 34, 40, 45, 51, 62, 68, 73, 79, 90, 96;
und so fort alle vierte Jahrhunderte in denselben Jahren.

B. Die Fastnachtszeit.

a) Sonntage nach Epiphania oder Faschingssonntage.

Die nach dem Feste der Erscheinung des Herrn (ἐπιφάνεια), d. i. dem 6 Januar, zunächst folgenden Sonntage werden erster, zweiter, dritter, u. s. w. Sonntag nach Epiphania oder Faschingssonntag genannt; weil der Fasching oder die Fastnacht mit dem Tage nach Epiphania, also mit dem 7 Januar anfängt.

1. Sonntag nach Epiphania oder 1. Faschingssonntag, **In excelso throno**, der $n + 1^{te}$ Sonntag im Jahre, den $t + 7$ Januar.

In den eben genannten Jahren ist dieser Sonntag der erste im Jahre und trifft auf den 7 Januar, sonst ist er immer der zweite Sonntag des Jahres.

2. Sonntag nach Epiphania oder 2. Faschingssonntag, **Omnis terra**, der $n + 2^{te}$ Sonntag im Jahre, am $t + 14$ Januar.

An diesem Sonntage wird auch das Fest des Namens Jesu gefeiert.

3. Sonntag nach Epiphania oder 3. Faschingssonntag, **Adorate Deum, I.**, der $n + 3^{te}$ Sonntag im Jahre, am $t + 21$ Januar.

4. Sonntag nach Epiphania oder 4. Faschingssonntag, **Adorate Deum, II.**, der $n + 4^{te}$ Sonntag im Jahre, am $t + 28$ Januar $= t - 3$ Februar.

5. Sonntag nach Epiphania oder 5. Faschingssonntag, **Adorate Deum, III.**, der $n + 5^{te}$ Sonntag im Jahre, am $t + 4$ Februar.

6. Sonntag nach Epiphania oder 6. Faschingssonntag, **Adorate Deum, IV.**, der $n + 6^{te}$ Sonntag im Jahre, am $t + 11$ Februar.

Sonntage nach Epiphania sind in einem Jahre $1 + \mathrm{q}\frac{v+i+3}{7} = m - n$, also wenigstens einer, und höchstens sechs.

Lezter Sonntag nach Epiphania oder $\mathrm{q}\frac{v+i+3}{7} + 1 = m - n^{ter}$ Faschingssonntag, der $\mathrm{q}\frac{v+i+2}{7} + 2 = m^{te}$ Sonntag im Jahre, am $v + i + 10$ Januar $= v + i - 21$ Februar.

b) Lezte drei Faschingssonntage.

Sonntag **Septuagesimae**, der $m - n + 1^{te}$ Faschingssonntag, **Circumdederunt**, der $m + 1^{te}$ Sonntag im Jahre, am $v + i + 17$ Januar $= v + i - 14$ Februar.

Auf diesen Tag fällt das Namen-Jesu-Fest, wenn das Jahr nur einen Sonntag nach Epiphania hat, weil dieses Fest immer am zweiten Sonntage nach dem 6 Januar, also am $i + 14$ Januar, dem $n + 2^{ten}$ Sonntage im Jahre gefeiert wird.

Sonntag **Sexagesimae**, der $m - n + 2^{te}$ Faschingssonntag, **Exsurge Domine**, der $m + 2^{te}$ Sonntag im Jahre, am $v + i + 24$ Januar $= v + i - 7$ Februar.

Donnerstag nach **Sexagesimae**, am $v + i + 28$ Januar $= v + i - 3$ Februar $= v - 31$ März, fetter (feister, auch unsinniger) Donnerstag.

Sonntag **Quinquagesimae**, der $m - n + 3^{te}$ und lezte Faschingssonntag, **Esto mihi**, auch der Fastnachtssonntag genannt, der $m + 3^{te}$ Sonntag im Jahre, am $v + i$ Februar $= v - 28$ März.

Nach dem Sonntage **Quinquagesimae** folgt

die Fastnacht (der Fastenabend, die junge Fastnacht, das Carneval, vormals Fasang-Tag)

eigentlich die Nacht, in welcher die Fasten anfängt, und in weiterer Bedeutung der Tag vor dieser Nacht, oder der Faschingsdinstag, am Dinstage den $v + i + 2$ Februar $= v - 26$ März, mit dem sich also die Faschingszeit schließt.

Unter Fasching, Fastnacht oder Carneval versteht man aber auch die Zeit vom Tage nach Christi Erscheinung bis zur eigentlichen Fastnacht oder bis zum Fastnachtsdinstage einschließlich, also vom 7 Januar bis zum $v + i + 2$ Februar $= v - 26$ März; folglich dauert der Fasching durch $v + i + 27$ Tage, und daher wenigstens 28, höchstens 63 Tage.

Nach dem gregorianischen Kalender dauert der Fasching

28 Tage in den Jahren 1598, 1693, 1761, 1818, 2285, 2353, 2437,...
29 » » » » 1845, 1913,
62 » » » » 1666, 1734, 1886, 1943, 2038, 2190, . . .
63 » » » » 3784, 4088, 4156, . . .

Im julianischen Kalender währte der Fasching

28	Tage in den Jahren	319, 414, 509, 851, 946, 1041, 1383, 1478, 1573;
29	» » » »	251, 262, 346, 357, 441, 604, 699, 783, 794, 878, 889, 973, 1136, 1231, 1315, 1326, 1410, 1421, 1505;
62	» » » »	292, 387, 482, 824, 919, 1014, 1356, 1451, 1546;
63	» » » »	672, 1204.

Während des Faschings werden erstlich die $q\frac{v+i+3}{7} + 1 = m - n$ Sonntage nach Epiphania, dann die drei lezten Faschingssonntage, folglich in Allem $q\frac{v+i+3}{7} + 4 = m - n + 3$ Faschingssonntage gefeiert.

C. Die große Fastenzeit (quadragesima), oder die vierzigtägige Fasten vor Ostern.

Sie fängt an mit dem

Aschermittwoch, Dies cinerum, am $v + i + 3$ Februar $= v - 25$ März.

Von Weihnachten, oder dem Christfeste, dem 25 December des nächst früheren Jahres, bis zum Aschermittwoch, sind $v + i + 39$ Tage, mithin wenigstens 40 und höchstens 75 Tage.

Das Fest der fünf Wunden Jesu Christi am Freitag nach dem Aschermittwoch den $v + i + 5$ Februar $= v - 23$ März.

Die sechs Fastensonntage.

1. Fastensonntag, Invocavit, oder Quadragesima, auch die große oder alte Fastnacht genannt, der $m + 4^{te}$ Sonntag im Jahre, am $v + i + 7$ Februar $= v - 21$ März.

2. Fastensonntag, Reminiscere, der $m + 5^{te}$ Sonntag im Jahre, am $v + i + 14$ Februar $= v - 14$ März.

3. Fastensonntag, Oculi, der $m + 6^{te}$ Sonntag im Jahre, am $v + i + 21$ Februar $= v - 7$ März.

Der Mittwoch nach dem dritten Fastensonntage, d. i. der $v + i + 24$ Februar $= v - 4$ März, heißt Mittfasten (Halbfasten), nemlich die Mitte der Fasten.

Das Fest der Dornenkrone Jesu Christi, wird überhaupt an einem Freitage in der Fasten, gewöhnlich am Freitage nach dem dritten Fastensonntage, dem $v + i + 26$ Februar $= v - 2$ März $= v - 33$ April gefeiert. Trifft es jedoch auf Josephi (19 März), für $v = 21$, so wird es auf den folgenden Freitag den 26 März verlegt; desgleichen, wenn es auf Mariä

Verkündigung (25 März) träfe, also $v = 27$ wäre, wird es auf den nächst kommenden Freitag, den 1 April verschoben.

4. Fastensonntag, Laetare, der $m + 7^{te}$ Sonntag im Jahre, am v März $= v - 31$ April.

5. Fastensonntag, Judica, auch der schwarze Sonntag, Dominica passionis genannt, der $m + 8^{te}$ Sonntag im Jahre, am $v + 7$ März $= v - 24$ April.

Das Fest der sieben Schmerzen Mariä am Freitag nach dem schwarzen Sonntage, den $v + 12$ März $= v - 19$ April.

6. und lezter Fastensonntag, Domine ne longe, auch der Palmsonntag, Dominica palmarum, genannt, der $m + 9^{te}$ Sonntag im Jahre, am $v + 14$ März $= v - 17$ April.

Die mit dem Palmsonntage anfangende Woche heißt die Char-, Marter- oder Leidenswoche, Hebdomada major. Ihre drei lezten Tage sind

der grüne Donnerstag, Coena Domini, am $v + 18$ März $= v - 13$ April,

der Charfreitag, stille Freitag, Parasceve, am $v + 19$ März $= v - 12$ April, und

der Charsamstag, Sabbatum sanctum, am $v + 20$ März $= v - 11$ Apr.

Mit dem Charsamstage schließt sich die große Fasten, welche daher, weil sie mit dem Aschermittwoch beginnt, 46 Tage dauert.

D. Die Osterzeit.

Ostern, das Auferstehungsfest, Pascha resurrectionis, das Hauptfest aller Christen, der Ostersonntag, Resurrexi, an dem nächsten Sonntage nach dem Vollmonde, der an oder zunächst nach dem 21 März eintritt, der $m + 10^{te}$ Sonntag im Jahre, am $v + 21$ März $= v - 10$ April *).

Der **Ostermontag**, oder das zweite Osterfest, am $v + 22$ März $= v - 8$ April.

Der Osterdinstag, vormals das dritte Osterfest, am $v + 23$ März $= v - 8$ April.

---

*) Weil der Ostervollmond am $21 + p$ März, und Ostern höchstens 7 Tage später, bis zum lezten Viertel des Mondes eintritt, so sind die Nächte zu Ostern hell. Der Osterneumond aber fällt auf den $8 + p$ März, daher trifft der nächst vorhergehende Neumond um 30 Tage früher auf den $p + i + 6$ Februar. Der Fastnachtsdinstag also, welcher auf den $v + i + 2$ Februar $= p + b + i + 2$ Februar fällt, tritt demnach um $b - 4$, höchstens 8 Tage später, oder um $4 - b$, höchstens 3 Tage früher als jener Neumond ein; mithin sind dazumal die Nächte finster. Daher das Sprichwort: Ostern licht, Fastnacht finster.

Die Oster-Octave dauert die ganze Osterwoche, d. i. vom Ostersonntag bis nächsten Samstag, also vom v + 21 März = v — 10 April bis v + 27 März = v — 4 April.

Die sechs Sonntage nach Ostern.

1. Sonntag nach Ostern, Quasimodo geniti oder Clausum Pascha, weißer Sonntag, Dominica in albis, der m + 11te Sonntag im Jahre, am v + 28 März = v — 3 April = v — 33 Mai.

Fest der Lanze und Nägel Jesu Christi am Freitage nach dem weißen Sonntage, den v + 2 April = v — 28 Mai.

2. Sonntag nach Ostern, Misericordias Domini oder Pastor bonus, der m + 12te Sonntag im Jahre, am v + 4 April = v — 26 Mai.

An diesem Sonntage wird zugleich das Fest des heiligen Grabes begangen. Fällt es jedoch auf Kreuzerfindung, den 3 Mai, was für v = 29 geschieht, so wird es auf den zweiten Donnerstag darnach, d. i. auf den 14 Mai verlegt. Trifft es, für v = 21, auf Markus (25 April), so verschiebt man es auf Mittwoch darnach, den 28 April.

3. Sonntag nach Ostern, Jubilate, der m + 13te Sonntag im Jahre, am v + 11 April = v — 19 Mai; zugleich Schutzfest des heil. Joseph.

4. Sonntag nach Ostern, Cantate, der m + 14te Sonntag im Jahre, am v + 18 April = v — 12 Mai.

5. Sonntag nach Ostern, Rogate oder Vocem jucunditatis, der m + 15te Sonntag im Jahre, am v + 25 April = v — 5 Mai.

Nach Rogate folgen unmittelbar die drei Bitt-Tage; nemlich

erster Bitt-Tag, Montag den v + 26 April = v — 4 Mai,

zweiter Bitt-Tag, Dinstag den v + 27 April = v — 3 Mai = v — 34 Juni,

dritter Bitt-Tag, Mittwoch den v + 28 April = v — 2 Mai = v — 33 Juni.

An sie schließt sich

das Fest Christi Himmelfahrt, Ascensio Domini, der 40. Tag nach Ostern, am Donnerstag den v + 29 April = v — 32 Juni.

6. und letzter Sonntag nach Ostern, Exaudi, der m + 16te Sonntag im Jahre, am v + 2 Mai = v — 29 Juni.

E. Die Pfingstzeit.

Pfingsten, Pentecoste, der Pfingstsonntag, Dominica Pentecostes, Spiritus Domini, der 50. Tag (πεντηκόστη ἡμέρα) seit Ostern,

(den Ostersonntag als den ersten gezählt), der m + 17te Sonntag im Jahre, am v + 9 Mai = v — 22 Juni.

Der **Pfingstmontag**, das zweite Pfingstfest, am v + 10 Mai = v — 21 Juni.

Der Pfingstdinstag, vormals das dritte Pfingstfest, am v + 11 Mai = v — 20 Juni.

Die Pfingst-Octave dauert die volle Pfingstwoche, d. i. vom Sonntag, den v + 9 Mai = v — 22 Juni, bis nächsten Samstag, den v + 15 Mai = v — 16 Juni.

Die Sonntage nach Pfingsten.

1. Sonnt. n. Pf., **Domine in tua misericordia**, das Dreifaltigkeitsfest, **Festum trinitatis**, der m + 18te Sonntag im Jahre, am v + 16 Mai = v — 15 Juni.

Fest des heil. Blutes Jesu Christi, Montag nach **Trinitatis**, am v + 17 Mai = v — 14 Juni.

Das Frohnleichnamsfest, **Corpus Christi**, Donnerstag nach **Trinitatis**, am v + 20 Mai = v — 11 Juni.

2. Sonnt. n. Pf., **Factus est Dominus**, der m + 19te Sonntag im Jahre, am v + 23 Mai = v — 8 Juni.

Das Herz-Jesu-Fest am Freitag nach der Frohnleichnams-Octave, oder am zweiten Freitage nach dem Frohnleichnams- oder Dreifaltigkeitsfeste, den v + 28 Mai = v — 3 Juni = v — 33 Juli.

3. Sonnt. n. Pf., **Respice in me**, der m + 20ste Sonntag im Jahre, am v + 30 Mai = v — 1 Juni = v — 31 Juli.

4. Sonnt. n. Pf., **Dominus illuminatio mea**, der m + 21ste Sonntag im Jahre, am v + 6 Juni = v — 24 Juli.

5. Sonnt. n. Pf., **Exaudi Domine**, der m + 22ste Sonntag im Jahre, am v + 13 Juni = v — 17 Juli.

6. Sonnt. n. Pf., **Dominus fortitudo**, der m + 23ste Sonntag im Jahre, am v + 20 Juni = v — 10 Juli.

7. Sonnt. n. Pf., **Omnes gentes**, der m + 24ste Sonntag im Jahre, am v + 27 Juni = v — 3 Juli = v — 34 August.

8. Sonnt. n. Pf., **Suscepimus**, der m + 25ste Sonntag im Jahre, am v + 4 Juli = v — 27 August.

9. Sonnt. n. Pf., **Ecce Deus adjuvat**, der m + 26ste Sonntag im Jahre, am v + 11 Juli = v — 20 August.

10. Sonnt. n. Pf., **Dum clamarem**, der m + 27ste Sonntag im Jahre, am v + 18 Juli = v — 13 August.

11. Sonnt. n. Pf., Deus in loco sancto, der m + 28ste Sonntag im Jahre, am v + 25 Juli = v — 6 August.

12. Sonnt. n. Pf., Deus in adjutorium, der m + 29ste Sonntag im Jahre, am v + 1 August = v — 30 September.

13. Sonnt. n. Pf., Respice Domine, der m + 30ste Sonntag im Jahre, am v + 8 August = v — 23 September.

14. Sonnt. n. Pf., Protector noster, der m + 31ste Sonntag im Jahre, am v + 15 August = v — 16 September.

15. Sonnt. n. Pf., Inclina Domine, der m + 32ste Sonntag im Jahre, am v + 22 August = v — 9 September.

16. Sonnt. n. Pf., Miserere mihi, der m + 33ste Sonntag im Jahre, am v + 29 August = v — 2 September = v — 32 October.

17. Sonnt. n. Pf., Justus es Domine, der m + 34ste Sonntag im Jahre, am v + 5 September = v — 25 October.

18. Sonnt. n. Pf., Da pacem Domine, der m + 35ste Sonntag im Jahre, am v + 12 September = v — 18 October.

19. Sonnt. n. Pf., Salus populi, der m + 36ste Sonntag im Jahre, am v + 19 September = v — 11 October.

20. Sonnt. n. Pf., Omnia quae fecisti, der m + 37ste Sonntag im Jahre, am v + 26 September = v — 4 October.

21. Sonnt. n. Pf., In voluntate tua, der m + 38ste Sonntag im Jahre, am v + 3 October = v — 28 November.

22. Sonnt. n. Pf., Si iniquitates, der m + 39ste Sonntag im Jahre, am v + 10 October = v — 21 November.

23. Sonnt. n. Pf., Dicit Dominus, I., der m + 40ste Sonntag im Jahre, am v + 17 October = v — 14 November.

24. Sonnt. n. Pf., Dicit Dominus, II., der m + 41ste Sonntag im Jahre, am v + 24 October = v — 7 November; wenn v höchstens = 33 ist.

25. Sonnt. n. Pf., Dicit Dominus, III., der m + 42ste Sonntag im Jahre, am v November; wenn v höchstens = 26 ist.

26. Sonnt. n. Pf., Dicit Dominus, IV., der m + 43ste Sonntag im Jahre, am v + 7 November; wofern v höchstens = 19 ist.

27. Sonnt. n. Pf., Dicit Dominus, V., der m + 44ste Sonntag im Jahre, am v + 14 November; wofern v höchstens = 12 ist.

28. Sonnt. n. Pf., Dicit Dominus, VI., der m + 45ste Sonntag im Jahre, am v + 21 November; wofern v höchstens = 5 ist.

Lezter Sonntag nach Pfingsten, der fünfte Sonntag vor Weihnachten, oder vor dem 25 December, also der nächste Sonntag vor dem 27 November, am $27 - R\frac{-v-1}{7} = 20 + r\frac{v+1}{7}$ November, daher der

$47 + q\frac{v+i+2}{7} - q\frac{v+1}{7} = 47 + q\frac{i+1+r\frac{v+1}{7}}{7}$te Sonntag im Jahre, und der $28 - q\frac{v+1}{7}$te nach Pfingsten.

Sonntage nach Pfingsten sind demnach $28 - q\frac{v+1}{7}$, folglich wenigstens 23 und höchstens 28.

F. Adventszeit.

1. Adventsonntag, **Ad te levavi**, der vierte Sonntag vor Weihnachten, dem 25 December, oder der nächste Sonntag vor dem 4 December, oder endlich der nächste Sonntag an dem Feste des heil. Apostels Andreas, dem 30 November, am $27 + r\frac{v+1}{7}$ November $= r\frac{v+1}{7} - 3$ December, daher der $48 + q\frac{v+i+2}{7} - q\frac{v+1}{7} = 48 + q\frac{i+1+r\frac{v+1}{7}}{7}$te Sonntag im Jahre.

Mit dem 1. Adventsonntage fängt die Christenheit in den Meßbüchern, Brevieren, Evangelien u. s. w. in Bezug auf den Gottesdienst das Kirchenjahr an.

2. Adventsonntag, **Populus Sion**, der $49 + q\frac{i+1+r\frac{v+1}{7}}{7}$te Sonntag im Jahre, am $r\frac{v+1}{7} + 4$ December.

3. Adventsonntag, **Gaudete in Domino**, der $50 + q\frac{i+1+r\frac{v+1}{7}}{7}$te Sonntag im Jahre, am $r\frac{v+1}{7} + 11$ December.

4. Adventsonntag, **Rorate coeli** oder **Memento**, der $51 + q\frac{i+1+r\frac{v+1}{7}}{7}$te Sonntag im Jahre, am $r\frac{v+1}{7} + 18$ December.

G. Schluß des Jahres.

Letzter Sonntag des Jahres, der $52 + q\frac{v+i+2}{7} - q\frac{v+1}{7}$ $= q\frac{i+1+r\frac{v+1}{7}}{7}$te Sonntag im Jahre am $r\frac{v+1}{7} + 25$ December; wird auch der Sonntag nach Weihnachten genannt, so oft er nicht auf den Christtag (25 December) selbst fällt. Er trifft aber hierauf, wenn $v+1$ durch 7

theilbar ist, oder v durch 7 getheilt 6 zum Reste gibt, also wenn v = 6, 13, 20, 27, 34, folglich der Sonntagsbuchstabe B ist; daher im n. St. in den Jahren

1583, 88, 94,
1605, 11, 16, 22, 33, 39, 44, 50, 61, 67, 72, 78, 89, 95,
1701, 7, 12, 18, 29, 35, 40, 46, 57, 63, 68, 74, 85, 91, 96,
1803, 8, 14, 25, 31, 36, 42, 53, 59, 64, 70, 81, 87, 92, 98,
1904, 10, 21, 27, 32, 38, 49, 55, 60, 66, 77, 83, 88, 94;

und darnach alle vierte Jahrhunderte in denselben Jahren.

V.

Unbewegliche Feste,

mit vorzüglicher Berücksichtigung solcher, welche in Zeitangaben angeführt werden.

Januar.

1. Neujahr. Beschneidung Christi.
6. Erscheinung Christi. (Epiphania.) Heilige 3 Könige.
7. Valentin, Bischof.
8. Severin, Abt.
17. Anton, Einsiedler.
18. Petri Stuhlfeier zu Rom.
20. Fabian und Sebastian, Märtirer.
21. Agnes, Jungfrau und Märtrerin.
23. Mariä Vermählung mit Joseph.
25. Pauli Bekehrung.

Februar.

2. Mariä Reinigung. Lichtmesse.
3. Blasius, Bischof.
5. Agatha.
6. Dorothea.
9. Apollonia.
10. Scholastica.
22. Petri Stuhlfeier zu Antiochia.
24 + i. Mathias, Apostel.

März.

9. Cyrillus und Methudius, Apostel von Mähren.
19. Joseph, Nährvater Christi.
21. Benedict, Abt.

24. Gabriel, Erzengel.
25. Mariä Verkündigung.
Fällt dieses Fest auf den Charfreitag oder Charsamstag, so wird es auf den Montag nach dem weißen Sonntage, d. i. für v = 6 auf den 4 April, und für v = 5 auf den 3 April verlegt.
27. Rupert.
28. Agnes von Böhmen.

April.

2. Franz de Paula.
5. Vincenz Ferrerius.
11. Leo, Papst.
23. Adalbert, Bischof und Märtirer.
24. Georg.
25. Markus, Evangelist.

Mai.

1. Philipp und Jakob der Jüngere, Apostel.
3. Kreuzerfindung.
4. Florian.
6. Johann vor der lateinischen Pforte.
7. Stanislaus.
13. Servatius, Bischof.
14. Bonifacius, Märtirer.
16. Johann von Nepomuk.
25. Urban, Papst.

Juni.

8. Medardus.
9. Felician.
11. Barnabas, Apostel.
13. Anton von Padua.
14. Basilius, Bischof.
15. Veit (Vitus), Märtirer.
16. Maria vom Berge Karmel.
24. Geburt Johannis des Täufers. Johannitag.
29. Petrus und Paulus, Apostel.

Juli.

2. Mariä Heimsuchung.
4. Ulrich (Udalrich) von Augsburg.
13. Margarita von Ungarn.

15. Apostel-Theilung.
Am Sonntage nach dem 15 Juli, am $15 + \not{R}\frac{v+3}{7} = 16 + \not{r}\frac{v+2}{7}$ Juli, dem $10 - \not{q}\frac{v+2}{7}$ten Sonntage nach Pfingsten, Scapulirfest.
20. Margaretha, Jungfrau.
22. Maria Magdalena, Büßerin.
24. Christina.
25. Jakob der Aeltere, Apostel. Jakobitag.
26. Anna, Mutter Mariens.

August.

1. Petri Kettenfeier.
2. Portiuncula.
4. Dominicus, Ordensstifter.
5. Maria Schnee.
6. Verklärung Christi.
Am 2. Sonntage im August, dem $7 + \not{R}\frac{v+1}{7} = 8 + \not{r}\frac{v}{7}$ August, dem $18 - \not{q}\frac{v}{7}$ten Sonntage nach Pfingsten, Mariä Hinscheidung.
10. Laurenz, Märtirer.
15. Mariä Himmelfahrt.
Sonntag nach Mariä Himmelfahrt, am $15 + \not{R}\frac{v}{7} = 16 + \not{r}\frac{v-1}{7}$ Aug., dem $14 - \not{q}\frac{v-1}{7}$ten Sonntage nach Pfingsten, Fest des heil. Joachim, Vater der heil. Jungfrau Maria.
16. Rochus.
20. Bernard, Abt. Stephan, König von Ungarn.
24. Bartholomäus, Apostel.
28. Augustin, Kirchenlehrer.
29. Johann's des Täufers Enthauptung.
An jenem Sonntage, welcher der nächste an Aegidi, am 1 September ist, d. i. am ersten Sonntage nach dem 28 August, also am $28 + \not{R}\frac{v+1}{7} = 29 + \not{r}\frac{v}{7}$ August $= \not{r}\frac{v}{7} - 2$ Sept, dem $16 - \not{q}\frac{v}{7}$ten Sonntage nach Pfingsten, Schuzengelfest.

September.

1. Aegidius, Abt.
8. Mariä Geburt. Unser lieben Frauen Tag.
Sonntag nach Mariä Geburt, am $8 + \not{R}\frac{v-3}{7} = 9 + \not{r}\frac{v+3}{7}$ Sept., dem $18 - \not{q}\frac{v+3}{7}$ten Sonntage nach Pfingsten, Fest des Namens Mariä.

14. Kreuzerhöhung.
16. Ludmilla.
21. Mathäus, Apostel und Evangelist.
22. Mauritius.
24. Mariä Gnadenfest. Johann's des Täufers Empfängniß.
28. Wenzeslaus.
29. Michael, Erzengel.

October.

1. Remigius.

   Am ersten Sonntage im October, dem $R\frac{v+3}{7} = 1 + r\frac{v+2}{7}$ October, am $21 - Q\frac{v+3}{7} = 21 - q\frac{v+2}{7}$ten Sonntage nach Pfingsten, Rosenkranzfest.

4. Franciscus Seraphicus.
13. Coloman.
15. Theresia, Jungfrau.

    An Theresia, wenn dieser Tag ein Sonntag ist, oder den nächst folgenden Sonntag, also am ersten Sonntage nach dem 14 October, oder am dritten Sonntage im Oct., dem $14 + R\frac{v+3}{7} = 15 + r\frac{v+2}{7}$ October am $23 - Q\frac{v+3}{7} = 23 - q\frac{v+2}{7}$ten Sonntage nach Pfingsten, das allgemeine Kirchweihfest.

16. Gallus.
17. Hedwig, Herzogin von Polen.
18. Lukas, Evangelist.
21. Ursula.
28. Simon und Judas, Apostel.

November.

1. Allerheiligenfest.
2. Allerseelentag.

   Trifft der 2 Nov. auf einen Sonntag, was geschieht, wenn $v \equiv 2$, mod 7, also $v = 2, 9, 16, 23, 30$ ist; wird Allerseelen auf den folgenden Tag, d. i. auf Montag den 3 November verlegt.

4. Karl Borromäus.
11. Martin, Bischof.
12. Martin, Papst.
15. Gertrud, Jungfrau, Leopold.

Am dritten Sonntage im Nov., den $14 + R\frac{v}{7} = 15 + r\frac{v-1}{7}$ Nov., dem $27 - Q\frac{v}{7} = 27 - q\frac{v-1}{7}$ten Sonntage nach Pfingsten, Mariä Schutz.

19. Elisabeth, Witwe.
20. Felix von Valois.
21. Mariä Opferung.
22. Cäcilia, Jungfrau und Märtrerin.
23. Clemens I., Papst und Märtirer.
25. Katharina, Jungfrau und Märtrerin.
30. Andreas, Apostel.

December.

3. Franz Xaver.
4. Barbara.
6. Nikolaus, Bischof.
8. Mariä Empfängniß.
13. Lucia, Jungfrau.
18. Mariä Erwartung der Geburt Jesu. Gratian.
21. Thomas, Apostel.
24. Christabend.
25. *Christi Geburt. Weihnachten.
26. Stephan, erster Märtirer.
27. Johann, Apostel und Evangelist.
28. Unschuldige Kinder.
31. Silvester I., Papst.

VI.

Die Quatember.

Die Quatember (quatuor tempora) sind vierteljährige Fastenwochen, in denen der Mittwoch, Freitag und Samstag gebotene Fasttage sind.

1. Der Fasten-Quatember, nach Invocavit, dem ersten Sonntage in der Fasten:

Mittwoch	den	$v + i + 10$ Februar	=	$v - 18$ März.
Freitag	»	$v + i + 12$ »	=	$v - 16$ »
Samstag	»	$v + i + 13$ »	=	$v - 15$ »

2. Der Dreifaltigkeits-Quatember, vor dem Dreifaltigkeitsfeste;

Mittwoch	den	$v + 12$ Mai	=	$v - 19$ Juni.
Freitag	»	$v + 14$ »	=	$v - 17$ »
Samstag	»	$v + 15$ »	=	$v - 16$ »

3. Der Kreuzerhöhungs-Quatember, zunächst nach Kreuzerhöhung, dem 14 September:

Mittwoch den 15 + $r\frac{v}{7}$ September.
Freitag » 17 + » »
Samstag » 18 + » »

4. Der Lucia-Quatember, nach Lucia, dem 13 December, oder nach dem dritten Adventsonntage:

Mittwoch den 14 + $r\frac{v+1}{7}$ December.
Freitag » 16 + » »
Samstag » 17 + » »

Vom Anfange des Jahres bis zum 1. Quatember sind 40 + v + i Tage,
vom 1. zum 2. Quatember sind 91 Tage = 13 Wochen,
» 2. » 3. » 126 — 7$q\frac{v}{7}$ Tage = 18 — $q\frac{v}{7}$ W.
» 3. » 4. » 90 + $r\frac{v+1}{7}$ — $r\frac{v}{7}$ T. = 13 — $q\frac{r\frac{v+1}{7}}{7}$ W.
» 4. Quatember bis zum Ende des Jahres 18 — $r\frac{v+1}{7}$ Tage.

VII.

Die Hochzeitfeier ist verboten,

vermöge eines Decretes des tridentinischen Conciliums,

1. vom ersten Adventsonntage, dem 27 + $r\frac{v+1}{7}$ Nov. = $r\frac{v+1}{7}$ — 3 Dec., bis zum Feste der Erscheinung des Herrn, am 6 Januar einschließlich, durch 40 — $r\frac{v+1}{7}$ Tage;

2. vom Aschermittwoch, dem v + i + 3 Februar = v — 25 März, bis zur Oster-Octave einschließlich, d. i. bis zum nächsten Samstag nach Ostern, am v + 27 März = v — 4 April, durch 53 Tage;

daher im Ganzen durch 93 — $r\frac{v+1}{7}$ Tage.

Tafel 8.

Prob

von allgemeinen arithmetischen Ausdrucken der Data von Märkten einiger Städte.

Agram, Hauptstadt in Croatien. Donnerstag vor Palmsonntag, am $v + 11$ März $= v - 20$ April. Tag nach Markus (25 April) am 26 April $\equiv - v + 2$. An Margarita, am 13 Juli $\equiv - v + 3$. Tag nach Stephan König (20 Aug.) am 21 August $\equiv - v$. Jeder dauert 14 Tage. An Simon und Juda, 28 October $\equiv - v - 2$. Tag nach Mariä Empfängniß (8 Dec.) am 9 December $\equiv - v - 2$. Jeder dauert 8 Tage.

Altenburg, in Obersachsen. Montag nach Rogate, am $v + 26$ April $= v - 4$ Mai. Montag nach Rosalia (4 Sept.), am $5 + r\frac{v+1}{7}$ Sept.

Altena, in Holstein. Mont. n. Judica, am $v + 8$ März $= v - 23$ Apr. Montag vor Johann dem Täufer (24 Juni), am $17 + r\frac{v-3}{7}$ Juni. Montag nach Mariä Geburt (8 Sept.), am $9 + r\frac{v-3}{7}$ Sept. Montag nach Nikolai (6 Dec.), am $7 + r\frac{v-1}{7}$ December.

Antwerpen, in Belgien, hat 3 große freie Messen: An Lichtmeß, 2 Febr. $\equiv - v - i + 3$; Mittw. nach Pfingsten, am $v + 12$ Mai $= v - 19$ Juni; an Kreuzerhöhung, 14 Sept. $\equiv - v + 3$.

Bamberg, in Baiern. Montag nach Cantate, am $v + 19$ April $= v - 11$ Mai. An Theresia, 15 Oct. $\equiv - v - 1$.

Bats, in Ung. Sonnt. Invocavit, am $v + i + 7$ Febr. $= v - 21$ März. An Philipp und Jakobi, 1 Mai $\equiv - v$. Pfingstsonntag am $v + 9$ Mai $= v - 22$ Juni. An Rochus, 16 Aug. $\equiv - v + 2$. An Simon und Juda, 28 Oct. $\equiv - v - 2$.

Bautzen, in Sachsen. Sonnabend vor Pauli Bekehrung (25 Januar) am $18 + r\frac{v+i-2}{7}$ Januar. Samstag vor Palmsonntag, am $v + 13$ März $= v - 18$ Apr. Sonnt. nach Petri Kettenfeier (1 Aug.), am $2 + r\frac{v-1}{7}$ Aug. Samst. nach Ursula (21 October), am $22 + r\frac{v+1}{7}$ October.

Brünn, Hauptstadt in Mähren. Montag vor Aschermittwoch, am $v + i + 1$ Febr. $= v - 27$ März. Am dritten Mont. nach dem Pfingstmont., am v Juni $= v - 30$ Juli. Montag vor Mariä Geburt (8 September), am $1 + r\frac{v-2}{7}$ Sept. Mont. vor Mariä Empf. (8 Dec.), am $1 + r\frac{v-2}{7}$ Dec. Jeder dauert 14 Tage. Wollmärkte: Samst. vor Dreifalt., am $v + 15$ Mai $= v - 16$ Juni; am ersten Dinst. im Juli, den $1 + r\frac{v-2}{7}$ Juli, dauert 8 Tage; Tag vor Mariä Empf. (8 Dec.), am 7 Dec. $\equiv - v + 3$.

Dresden, Hauptstadt in Sachsen. Montag nach Invocavit, am $v + i + 8$ Febr. $= v - 20$ März. An Joh. Bapt., 24 Juni $\equiv - v - 2$.

Frankfurt am Main. Osterdinst., den $v + 23$ März $= v - 8$ Apr. Sonnt. vor Mariä Geburt (8 Sept.), am $1 + r\frac{v-3}{7}$ September. Jeder dauert 3 Wochen.

Frankfurt an der Oder. Mont. n. Reminiscere, am $v + i + 15$ Febr. $= v - 13$ März. Mont. nach Margarita (13 Juli), am $14 + r\frac{v-2}{7}$ Juli. Montag nach Martini (11 Nov.), am $12 + r\frac{v+3}{7}$ Nov., durch 3 Wochen.

Gotha, im Fürstenthum Gotha. Mittw. n. Cantate, am $v + 21$ April $= v - 9$ Mai. Mittwoch nach Margarita (13 Juli), am $14 + r\frac{v}{7}$ Juli. Mittwoch nach Allerheil. (1 Nov.), am $2 + r\frac{v+1}{7}$ November.

Grätz, Hauptst. in Steiermark. Samst. vor Lätare, am $v - 1$ März $= v - 32$ April. An Aegidi, 1 Sept. $\equiv - v - 3$. Jeder dauert 14 Tage.

Großwardein, in Ungarn. Mittwoch nach heil. 3 König (6 Jan.), am $7 + r\frac{v+i-1}{7}$ Jan. Mittw. n. Quadragesima, am $v + i + 10$ Febr. $= v + i - 18$ März. Mittwoch nach Frohnleichnam, am $v + 26$ Mai $= v - 5$ Juni. Mittwoch in der Woche Mariä Heimsuchung (2 Juli), am $3 + r\frac{v-3}{7}$ Juli. Mittw. in d. W. Aegidi (1 Sept.), am $2 + r\frac{v-1}{7}$ Sept. Mittw. in d. W. Franz Ser. (4 Oct.), am $5 + r\frac{v+1}{7}$ October.

Halle, in Merseburg. Dinst. n. d. 3 Jan., am $4 + r\frac{v+i+1}{7}$ Januar. Am 18 April $\equiv - v + 1$. Mittwoch nach Pfingsten, am $v + 12$ Mai $= v - 19$ Juni. Tag nach Mariä Geburt (8 Sept.), am 9 September $\equiv - v - 2$. An Martin Bischof, den 11 Nov. $\equiv - v - 2$.

Hannover, im gleichnamigen Königreiche. Mittw. nach heil. 3 König (6 Jan.), am $7 + \mathfrak{r}\frac{v+l-1}{7}$ Jan. Donnerst. vor Judica, am $v + 4$ März $= v - 27$ April, Mont. vor Philipp und Jacobi (1 Mai), am $24 + \mathfrak{r}\frac{v+2}{7}$ Apr. Mont. nach Jacobi d. Gr. (25 Juli), am $26 + \mathfrak{r}\frac{v}{7}$ Juli. Mont. n. Aegidi (1 Sept.), am $2 + \mathfrak{r}\frac{v-3}{7}$ Sept. Montag nach Allerheiligen (1 Nov.), den $2 + \mathfrak{r}\frac{v-1}{7}$ November.

Hermanstadt in Siebenbürgen. Mont. n. heil. 3 Könige (6 Jan.), am $7 + \mathfrak{r}\frac{v+l-3}{7}$ Jan. Dinstag nach Palmsonntag, am $v + 16$ März $= v - 15$ April. An Kreuzerfindung, den 3 Mai $\equiv - v + 2$. An Kreuzerhöhung, den 14 Sept. $\equiv - v + 3$.

Jena, im Fürstenth. Weimar. Dinst. n. Reminisc., am $v + l + 16$ Febr. $= v - 12$ März. Dinstag nach Rogate, am $v + 27$ April $= v - 3$ Mai $= v - 34$ Juni. Dinst. vor u. nach Sim. u. Jud., am $21 + \mathfrak{r}\frac{v-2}{7}$ October und am $29 + \mathfrak{r}\frac{v-3}{7}$ Oct. $= \mathfrak{r}\frac{v-3}{7} - 2$ Nov.

Königsberg, in Preußen. Montag nach Johanni (24 Juni), am $25 + \mathfrak{r}\frac{v+3}{7}$ Juni $= \mathfrak{r}\frac{v+3}{7} - 5$ Juli.

Leipzig, in Sachsen, hat drei berühmte Messen. Montag nach dem Neujahr, am $2 + \mathfrak{r}\frac{v+l+2}{7}$ Jan. Montag nach Jubilate, am $v + 12$ April $= v - 18$ Mai. Montag nach Michaeli (29 Sept.), am $30 + \mathfrak{r}\frac{v-3}{7}$ Sept. $= \mathfrak{r}\frac{v-3}{7}$ Oct. Jede dauert 14 Tage. Wollmarkt: Mitte Juni.

Lemberg, Hauptstadt in Galizien. Große Dreikönigsmesse, Montag nach heil. 3 König, am $7 + \mathfrak{r}\frac{v+l-3}{7}$ Jan., durch 4 Wochen. An Agnes, den 28 März $\equiv - v + 1$. Am 24 Mai $\equiv - v + 2$ durch 4 Wochen. Am 12 Oct. $\equiv - v + 3$ durch 2 Wochen. Haupt-Wollmarkt: 1 bis 8 Juli.

Linz, in Ober-Oesterreich. Am ersten Mont. n. Ostern, den $v + 29$ März $= v - 2$ April $= v - 32$ Mai. An Bartholomäus, 24 Aug. $\equiv - v + 3$. Jeder dauert 3 Wochen.

Mainz, in Hessen. Mont. n. Lätare, am $v + 1$ März $= v - 30$ Apr. Mont. nach Mariä Himmelfahrt (15 Aug.), am $16 + \mathfrak{r}\frac{v}{7}$ Aug. An Martini, 11 Nov. $\equiv - v - 2$.

Nürnberg, in Baiern. Heil. 3 Könige, 6 Jan. $\equiv - v - i - 3$. Mittw. nach Ostern, am $v + 24$ März $= v - 7$ April. An Aegidi, 1 Sept. $\equiv - v - 3$.

Olmütz, in Mähren. Mont. n. heil. 3 Kön., am $7 + r\frac{v+i-3}{7}$ Jan. Mont. vor Georgi (24 April), am $17 + r\frac{v+2}{7}$ April. Montag n. Joh. d. T. (24 Juni), am $25 + r\frac{v+3}{7}$ Juni $= r\frac{v+3}{7} - 5$ Juli. Montag nach Michaeli (29 Sept.), am $30 + r\frac{v-3}{7}$ Sept. $= r\frac{v-3}{7}$ October. Jeder dauert 14 Tage. Wollmarkt: Mittwoch nach Pfingsten, am $v + 12$ Mai $= v - 19$ Juni. Viehmarkt: Tag vor Allerheiligen (1 Nov.), am 31 Oct. $\equiv - v + 1$.

Prag, Hauptstadt in Böhmen. Tag n. Lichtm. (2 Febr.), den 3 Febr. $\equiv - v - i - 3$ auf d. Neustadt. An Veit, den 15 Juni $\equiv - v + 3$ auf der Kleinseite. An Wenzel, den 28 Sept. $\equiv - v + 3$ auf der Altstadt. Jeder dauert 20 Tage mit Einschl. 3er Tage zum Aus- und 3er Tage zum Einpacken. Töpfermärkte auf der Neustadt: in der Woche nach heil. 3 Kön. (6 Jan.); Mittfasten, Mittwoch den $v + i + 24$ Februar $= v - 4$ März; Margaretha (20 Juli). Großer Wollmarkt: 24 bis 28 Juni.

Reichenberg, in Böhmen. Montag nach dem weißen Sonntage, am $v + 29$ März $= v - 2$ April $= v - 32$ Mai. Montag vor Veit (15 Juni) am $8 + r\frac{v-1}{7}$ Juni, durch 8 Tage. Montag nach Mariä Geburt, am $9 + r\frac{v-3}{7}$ September, durch 8 Tage. Montag und Dinstag nach dem dritten Sonntag im October, am $16 + r\frac{v+2}{7}$ October. Montag und Dinstag vor dem ersten Adventsonntage, am $21 + r\frac{v-1}{7}$ November. Viehmärkte: Samst. v. d. weißen Sonnt., am $v + 27$ März $= v - 4$ Apr. $= v - 34$ Mai; Samstag vor dem ersten Adventsonntage, am $26 + r\frac{v-1}{7}$ Novemb. Wollmärkte: Dinst. und Mittw. nach Pfingsten, am $v + 11$ Mai $= v - 20$ Juni. Dinst. und Mittw. nach Michaeli (29 Sept.), am $30 + r\frac{v-2}{7}$ September $= r\frac{v-2}{7}$ October.

Stuttgart, Hauptstadt in Würtemberg. Montag vor Urban (25 Mai), am $18 + r\frac{v-1}{7}$ Mai. Dinst. vor Aegidius (1 Sept), am $25 + r\frac{v-1}{7}$ August. Dinstag vor dem dritten Adventsonntage, am $6 + r\frac{v+1}{7}$ December.

Teschen, in österr. Schlesien. Tag nach Lichtmeß am 3 Februar $\equiv - v - i - 3$. Am Pfingstdinstage, den $v + 11$ Mai $= v - 20$ Juni. Montag vor Maria Magdalena (22 Juli), am $15 + r\frac{v-3}{7}$ Juli. An Mariä Geburt, den 8 September $\equiv - v - 3$. An Andreas, den 30 November $\equiv - v + 3$. Wollmärkte: Am 28 Mai und 2 October.

Wien, Residenzstadt in Oesterreich. Messen: Montag nach Jubilate, den $v + 12$ April $= v - 18$ Mai; den Tag nach Allerheiligen, am 2 Nov. $\equiv - v + 3$; jede dauert 4 Woch. Leopoldstadt: Margaretha, d. 20 Juli $\equiv - v + 3$, dauert 14 Tage. Roßau: 26 April, durch 1 Woche mit Holz- und Töpferwaaren; 1 Juli durch 3 Wochen mit Binder- und Töpferwaaren; 27 Sept. durch 2 Wochen mit Holzwaaren. Pferdemärkte: 8 Tage vor Allerheiligen, am 25 October, jeder dauert 3 Tage.

Gedruckt bei J. P. Sollinger.

Druckberichtigungen.

Seite 25, Zeile 3, seze Beistrich statt Punkt; und in Gleich. (55) kehre um dann in ihr und in (56) das zweite und lezte Doppelz

» 30, Gleich. (70), sollen alle Ausdrücke, außer dem lezten, dieselben wi sein.

» 43, Zeile 19, lies: jeden

» 61, » 4, von unten, verbessere: $\psi = 0, 1, 2, \ldots$ bis zur kle zwei Zahlen η und $\mu - \eta$,

» 89, » 13, von unten, verbessere: 113

» 99, » 8, zu $\mathfrak{x}\frac{\varepsilon a+\delta}{\omega}$ seze den Factor M

» 101, » 8, lies: ganzen Jahre

» 161, » 10, von unten, lies: kann, im Gemeinjahre den

» 176, » 5, von unten, den Theiler 4 in q— erseze durch 7

» 188, » 18, statt b seze d

» 207, » 18, verbessere: a =

» 214, » 15, von unten, verbessere: 3q—

» 215, » 8, von unten, lies: Neumonde

» 226, » 11, lies: Aeren

» 237, » 9, verbessere: v = 4,

» 238, » 7, von unten, lies: in diesen Abschnitten

» 240, » 17, lösche 25

» 253, » 2, von unten, lies: calendrier

» 271, » 11, verbessere: $+\, \alpha$

» 272, » 5, von unten, verbessere: $-\, k + 1$

» 275, » 19 und 20, das dortige aber < 19, seze vor also

» 281, » 4, von unten, verbessere: $L - 3$

» 300, » 6, lies: Nummer

» 306, » 4, verbessere: $+ 15 \equiv 15$,

» 306, » 16, von unten, verbessere: Folgenden

» 308, Gleich. (198), verbessere: $+\, \omega$ und 11(M

» 339, Zeile 8, von unten, verbessere: Ostern = 33 — 5

» 339, » 1, von unten, lies: Ausgabe

» 418, » 5, von unten, seze in q— den Theiler 19

» 456, » 7, von unten, verbessere: (365)

» 480, » 16, unter 49 stelle 202 als Nenner.

» 500, » 19, lies: von dem

» 502, » 10, lies: in den

» 503, » 7, lies: dort nach 2.8 + 7.



